

ΛΥΣΗ

α)

- i. Τα τρίγωνα $\triangle A\Delta E$ και $\triangle AB\Gamma$ έχουν την γωνία \hat{A} κοινή οπότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν την γωνία.

$$\text{Επίσης } \Gamma E = \frac{1}{4} A\Gamma, \text{ οπότε } A E = \frac{3}{4} A\Gamma.$$

$$\frac{(\triangle A\Delta E)}{(\triangle AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot A E}{A B \cdot A\Gamma} = \frac{A\Delta}{A B} \cdot \frac{A E}{A\Gamma} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \text{ άρα } (\triangle AB\Gamma) = 4(\triangle A\Delta E).$$

- ii. Τα EZ και ΓH είναι ύψη των τριγώνων $\triangle A\Delta E$ και $\triangle AB\Gamma$ αντίστοιχα.

$$\frac{(\triangle A\Delta E)}{(\triangle AB\Gamma)} = \frac{\frac{1}{2} A\Delta \cdot E Z}{\frac{1}{2} A B \cdot \Gamma H} = \frac{A\Delta}{A B} \cdot \frac{E Z}{\Gamma H} = \frac{1}{3} \frac{E Z}{\Gamma H}. \text{ Επειδή όμως } \frac{(\triangle A\Delta E)}{(\triangle AB\Gamma)} = \frac{1}{4} \text{ από το ερώτημα}$$

$$(\alpha), \text{ θα έχουμε } \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{E Z}{\Gamma H} \Rightarrow \frac{E Z}{\Gamma H} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{4}$$

- β) Για να ισχύει $(\triangle AB\Gamma) = 2(\triangle A\Delta E)$ πρέπει $\frac{(\triangle A\Delta E)}{(\triangle AB\Gamma)} = \frac{1}{2}$. Σκεπτόμενοι ανάλογα με το πρώτο

ερώτημα $\frac{(\triangle A\Delta E)}{(\triangle AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot A E}{A B \cdot A\Gamma} = \frac{A\Delta}{A B} \cdot \frac{A E}{A\Gamma} = \frac{1}{2}$ και επειδή ο λόγος $\frac{A E}{A\Gamma} = \frac{3}{4}$ παραμένει σταθερός

θα έχουμε $\frac{A\Delta}{A B} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A\Delta}{A B} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow A\Delta = \frac{2}{3} A B.$

