

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ**2^ο Θέμα**

1565. Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B' = A'\Gamma'$).

α) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $AB = A'B'$ και $A = A'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. (Μονάδες 13)

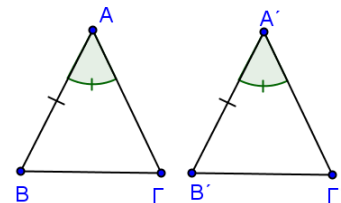
β) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $B = B'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή, τότε αν $AB = A'B'$,
θα είναι $A\Gamma = AB = A'B' = A'\Gamma'$.

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

- 1) $AB = A'B'$
- 2) $A\Gamma = A'\Gamma'$ και
- 3) $A = A'$, άρα με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



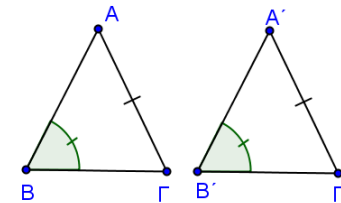
β) Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή με βάσεις τις $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες, δηλαδή

$B = \Gamma$ και $\Gamma' = B'$. Όμως $B = B'$, άρα $\Gamma = B = B' = \Gamma'$.

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

- 1) $A\Gamma = A'\Gamma'$
- 2) $AB = A'B'$ και
- 3) $A = A'$ γιατί $\Gamma = B = B' = \Gamma'$ (έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες των τριγώνων είναι ίσες)

Άρα με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα.



1582. Στο διπλανό σχήμα είναι $\alpha = \delta$, $\beta = \hat{\gamma}$ και

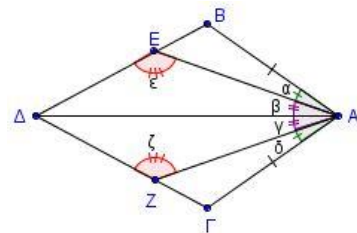
$AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Οι γωνίες ϵ και ζ είναι ίσες.

(Μονάδες 13)

**Λύση**

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- την πλευρά $A\Delta$ κοινή και
- $\angle B\Delta A = \alpha + \hat{\beta} = \hat{\delta} + \hat{\gamma} = \angle \Gamma\Delta A$

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα $E\Delta A$ και $Z\Delta A$ έχουν

- την πλευρά $A\Delta$ κοινή
- $\angle E\Delta A = \angle A\Delta Z$ γιατί τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα και
- $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ (υπόθεση)

Σύμφωνα με το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$.

1591. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $KB = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι: τα τρίγωνα BAK και KAG είναι ίσα.

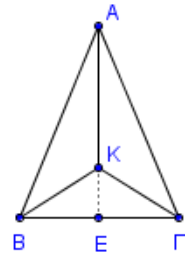
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAG .

(Μονάδες 6)

γ) Η προέκταση της AK τέμνει την $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$.

(Μονάδες 7)



Λύση

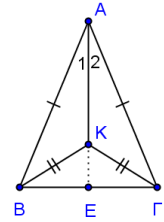
α) Τα τρίγωνα BAK και KAG έχουν:

- την πλευρά AK κοινή
- $AB = A\Gamma$ και
- $KB = K\Gamma$.

-Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα BAK και KAG είναι ίσα, έχουν και $\angle A_1 = \angle A_2$, άρα η AE είναι διχοτόμος της γωνίας BAG .

γ) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές η AE θα είναι και ύψος και διάμεσος. Άρα η KE είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο $BK\Gamma$.



1592. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) $B_{εξ} = \Gamma_{εξ}$

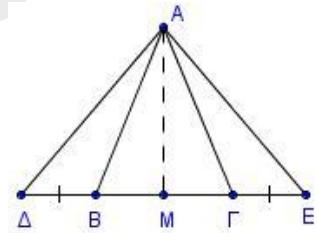
(Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

γ) Η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, είναι $B = \Gamma$.

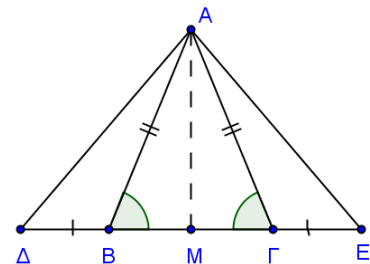
$$\text{Είναι } B_{εξ} = 180^\circ - B = 180^\circ - \Gamma = \Gamma_{εξ}$$

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- 1) $AB = A\Gamma$
- 2) $B_{εξ} = \Gamma_{εξ}$ και
- 3) $B\Delta = \Gamma E$

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Επειδή $BM = M\Gamma$ και $B\Delta = \Gamma E$, είναι και $BM + B\Delta = M\Gamma + \Gamma E \Leftrightarrow \Delta M = ME$, άρα το M είναι μέσο του ΔE , οπότε η AM είναι διάμεσος στο τρίγωνο $A\Delta E$.



1598. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA τριγώνου $AB\Gamma$, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $A\epsilon = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η προέκταση της AM τέμνει την $E\Delta$ στο Z , να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα.

(Μονάδες 7)

ii. $Z\Delta = \frac{E\Delta}{2}$.

(Μονάδες 6)

Λύση

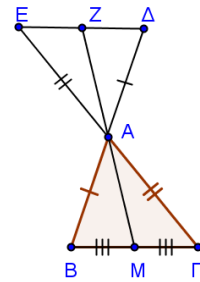
α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν:

1) $A\Delta = AB$

2) $AE = A\Gamma$

3) $\angle B A \Gamma = \angle E A \Delta$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) i. Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM έχουν:

1) $A\Delta = AB$

2) $\angle B A M = \angle \Delta A Z$ ως κατακορυφήν και

3) $\angle A B \Gamma = \angle A \Delta E$ γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα.

ii. Επειδή τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα έχουν και $\Delta Z = BM$. Όμως $BM = \frac{AB}{2}$ και $AB = \Delta E$ γιατί

τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα, άρα $\Delta Z = \frac{\Delta E}{2}$.

1601. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα BAM και MAG είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Η AM είναι διχοτομεί τη γωνία $B\Gamma$.

(Μονάδες 13)

Λύση

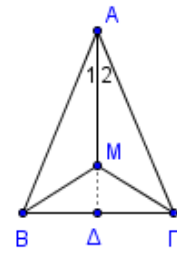
α) Τα τρίγωνα BAM και MAG έχουν:

1) την πλευρά AM κοινή

2) $AB = A\Gamma$ και

3) $MB = M\Gamma$.

Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα BAM και MAG είναι ίσα, έχουν και $\angle A_1 = \angle A_2$, άρα η AM είναι διχοτόμος της γωνίας BAG , άρα είναι ύψος και διάμεσος του.

Στο ισοσκελές τρίγωνο $B\Gamma M$, η AM είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma$.

1621. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές AB , $A\Gamma$ παίρνουμε

αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $A\epsilon = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα $B\Delta$ και $\Gamma\epsilon$ είναι ίσα.

(Μονάδες 5)

β) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $M\epsilon\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο $\Delta\epsilon M$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Επειδή $AB = A\Gamma$ και $A\Delta = A\epsilon$, είναι και $AB - A\Delta = A\Gamma - A\epsilon \Leftrightarrow B\Delta = \Gamma\epsilon$

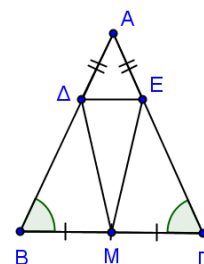
β) Τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $M\epsilon\Gamma$ έχουν:

1) $B\Delta = \Gamma\epsilon$

2) $BM = M\Gamma$ γιατί το M είναι μέσο της $B\Gamma$ και

3) $\angle B = \angle \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



γ) Επειδή τα τρίγωνα BAM και $MEΓ$ είναι ίσα, έχουν και $MA = ME$, οπότε το τρίγωνο MAE είναι ισοσκελές.

1627. Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της $Oδ$. Θεωρούμε σημείο M της $Oδ$ και σημεία A και B στις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:

α) $MA = MB$

(Μονάδες 15)

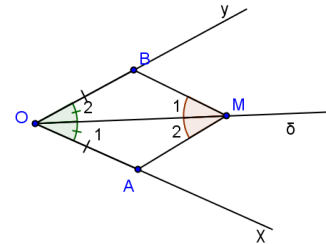
β) Η $Oδ$ είναι διχοτόμος της γωνίας AMB .

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Τα τρίγωνα BMO και AMO έχουν:

- 1) Την πλευρά OM κοινή
- 2) $OA = OB$ και
- 3) $\angle 1 = \angle 2$ γιατί η $Oδ$ είναι διχοτόμος της γωνίας O .
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $MA = MB$.



β) Επειδή τα τρίγωνα BMO και AMO είναι ίσα,

έχουν και $\angle M_1 = \angle M_2$, άρα η $Oδ$ είναι διχοτόμος της γωνίας AMB .

1632. Αν $\angle AOB = \angle BOΓ = \angle ΓΟΔ$ και $OA = OB = OG = OD$, να αποδείξετε ότι:

α) $AG = BD$

(Μονάδες 10)

β) το M είναι μέσο του BD , όπου M το σημείο τομής των τμημάτων OG και BD .

(Μονάδες 15)

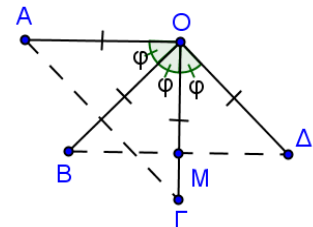
Λύση

α) Έστω ότι $\angle AOB = \angle BOΓ = \angle ΓΟΔ = \varphi$.

Τα τρίγωνα $AOΓ$ και $BOΔ$ έχουν:

- 1) $OA = OB$
- 2) $OG = OD$ και
- 3) $\angle AOG = \angle BOD = 2\varphi$

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AG = BD$.



β) Στο ισοσκελές τρίγωνο $BOΔ$ η OM είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του, άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή το M είναι μέσο του BD .

1648. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ με $AB = AG$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και $ΓA$ (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $A\Delta = AE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = Γ\Delta$

(Μονάδες 6)

β) $BD = GE$

(Μονάδες 10)

γ) $\angle BΓ = \angle EΓB$

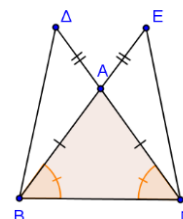
(Μονάδες 9)

Λύση

α) Επειδή $AB = AG$ και $AE = A\Delta$ είναι και $AB + AE = AG + A\Delta \Leftrightarrow BE = Γ\Delta$

β) Τα τρίγωνα $\Delta BΓ$ και $EBΓ$ έχουν:

- 1) την πλευρά $BΓ$ κοινή
- 2) $BE = Γ\Delta$



3) $ΕΒΓ = ΔΓΒ$ γιατί βρίσκονται στη βάση ΒΓ του
ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΒΔ = ΓΕ$.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα, έχουν και $ΔΒΓ = ΕΓΒ$.

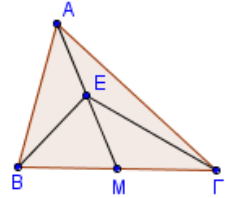
1660. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ. Αν $ΒΓ = 2ΒΕ$,
να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΕΒ = ΕΜΓ$

(Μονάδες 12)

β) $ΑΒ = ΕΓ$.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Είναι $ΒΜ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{2ΒΕ}{2} = ΒΕ$, άρα το τρίγωνο ΒΕΜ είναι

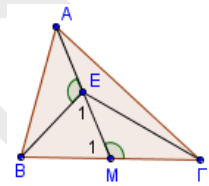
ισοσκελές με βάση την ΕΜ και έχει $Ε_1 = Μ_1$. Όμως

$ΑΕΒ = 180^\circ - Ε_1$ και $ΕΜΓ = 180^\circ - Μ_1$, άρα $ΑΕΒ = ΕΜΓ$.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΕΜΓ έχουν:

- 1) $ΑΕ = ΕΜ$ γιατί το Ε είναι μέσο του ΑΜ
- 2) $ΒΕ = ΒΜ = ΜΓ$ και
- 3) $ΑΕΒ = ΕΜΓ$

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΒ = ΕΓ$.



12635. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και Μ είναι το μέσο της βάσης του ΒΓ. Στις
προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ προς τα Β, Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ ώστε
 $ΒΔ = ΓΕ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ.

(Μονάδες 10)

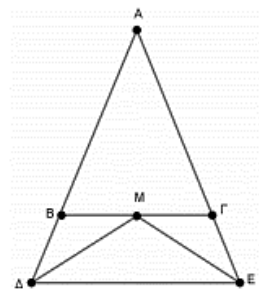
Λύση

α) Τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ έχουν:

- $ΜΒ = ΜΓ$ (Μ μέσο του ΒΓ)
- $ΒΔ = ΓΕ$ (υπόθεση)
- $ΔΒΜ = ΕΓΜ$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β, Γ του
ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα έχουν και $ΜΔ = ΜΕ$, οπότε το
τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές. Οι γωνίες ΜΔΕ και ΜΕΔ είναι ίσες γιατί
βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΜΔΕ.



12636. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , AG παίρνουμε τα τμήματα BD , GE αντίστοιχα ώστε $BD=GE$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $MG\epsilon$ είναι ίσα.

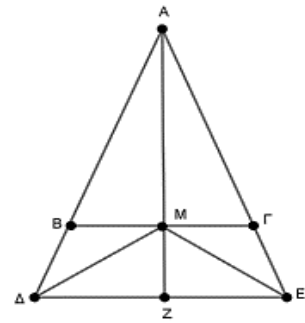
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta\epsilon$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν η AM τέμνει την $\Delta\epsilon$ στο σημείο Z να αποδείξετε ότι η AZ είναι κάθετη στην $\Delta\epsilon$.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $MG\epsilon$ έχουν:

- $MB = MG$ (M μέσο του $B\Gamma$)

- $BD = GE$ (υπόθεση)

- $\angle B = \angle \Gamma$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών B , Γ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $MG\epsilon$ είναι ίσα έχουν και $M\Delta = ME$, οπότε το τρίγωνο $M\Delta\epsilon$ είναι ισοσκελές. Οι γωνίες $M\Delta\epsilon$ και $ME\Delta$ είναι ίσες γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $M\Delta\epsilon$.

γ) Είναι $AB = AG$ και $BD = GE$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$AB + BD = AG + GE \Leftrightarrow AD = AE$, δηλαδή το τρίγωνο $A\Delta\epsilon$ είναι ισοσκελές.

Η AM είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας A .

Στο ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\epsilon$ η AZ είναι διχοτόμος της γωνίας A , οπότε είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή $AZ \perp \Delta\epsilon$.

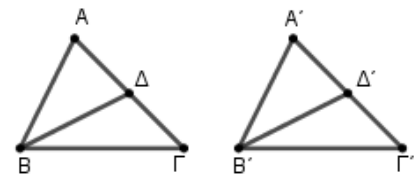
13518. Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος με $AG = A'\Gamma'$ και $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι $B\Delta$ και $B'\Delta'$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

α) $A = A'$

(Μονάδες 15)

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$ έχουν:

- $B\Delta = B'\Delta'$, από υπόθεση,

- $AB = A'B'$, από υπόθεση,

- $AD = A'\Delta'$, ως μισά των ίσων πλευρών AG και $A'\Gamma'$ αντίστοιχα.

Επομένως, τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία. Άρα $A = A'$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές $B\Delta$ και $B'\Delta'$ αντίστοιχα.

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

- $AB = A'B'$, από υπόθεση,

- $AG = A'\Gamma'$, από υπόθεση,

- $A = A'$, από το προηγούμενο ερώτημα.

Επομένως, τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

12705. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma = 2AB$. Η διχοτόμος του A τέμνει την διάμεσο BE στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$.

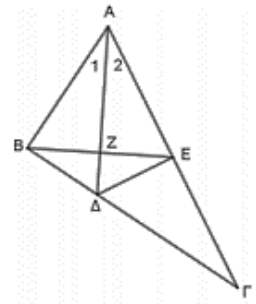
(Μονάδες 7)

β) $\Delta B = \Delta E$.

(Μονάδες 8)

γ) $AZ \perp BE$

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Επειδή η BE είναι διάμεσος, το E είναι μέσο της $A\Gamma$, οπότε $AE = \frac{A\Gamma}{2}$ (1).

Από την υπόθεση είναι $A\Gamma = 2AB \Leftrightarrow AB = \frac{A\Gamma}{2}$ (2). Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι

$$AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$$

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ έχουν:

- $AB = AE$ από το α σκέλος

- $\angle A_1 = \angle A_2$ γιατί η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A

- την πλευρά $A\Delta$ κοινή

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

Άρα, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle A_1, \angle A_2$ έχουμε αντίστοιχα ίσες πλευρές δηλαδή $\Delta B = \Delta E$.

γ) Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές με $AB = AE$ και η AZ είναι διχοτόμος του. Επομένως, η AZ είναι και ύψος, άρα $AZ \perp BE$.

13826. Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ του σχήματος έχουν

$$AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda \text{ και } \angle A = \angle \Gamma.$$

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ίσα και ότι έχουν $BK = \Delta\Lambda$. (Μονάδες 12)

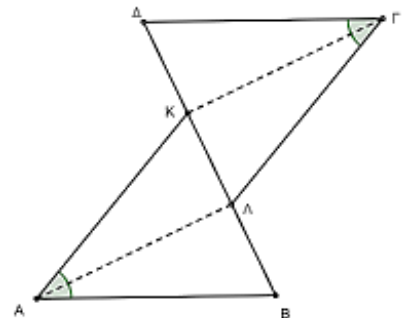
β) Έστω ότι Λ και K είναι τα μέσα των BK και $\Delta\Lambda$ αντίστοιχα:

i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα $B\Lambda, \Lambda K$ και $K\Delta$ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι οι $A\Lambda$ και ΓK είναι κάθετες στην ευθεία $K\Lambda$.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ έχουν:

- $AB = \Gamma\Delta$ από την υπόθεση

- $AK = \Gamma\Lambda$ από την υπόθεση και

- $\angle A = \angle \Gamma$ από την υπόθεση

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ίσα, οπότε είναι και $BK = \Delta\Lambda$, γιατί είναι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle A$ και $\angle \Gamma$.

β) i. Αφού Λ και K είναι μέσα των BK και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, τότε θα ισχύει ότι $B\Lambda = \Lambda K$ και $\Lambda K = K\Delta$, οπότε θα είναι $B\Lambda = \Lambda K = K\Delta$.

ii. Αφού τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ισοσκελή με $AB = AK$ και $\Gamma\Delta = \Gamma\Lambda$ και Λ, K τα μέσα των βάσεων τους $BK, \Delta\Lambda$ αντίστοιχα, τότε τα AL και ΓK είναι διάμεσοι στις βάσεις τους, οπότε θα είναι και ύψη, οπότε είναι κάθετα σε αυτές, δηλαδή το AL είναι κάθετο στο BK και το ΓK είναι κάθετο στο $\Delta\Lambda$. Επομένως οι AL και ΓK είναι κάθετες στην ευθεία KL .

4ο Θέμα

1725. Δίνεται οξεία γωνία $\chi O\psi$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία K, A και την $O\psi$ στα Λ, B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $AL = BK$

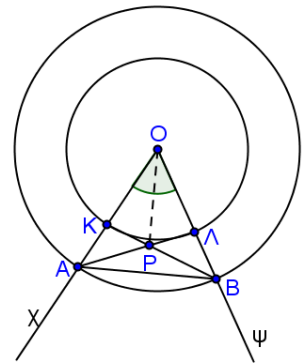
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των AL, BK .

(Μονάδες 8)

γ) Η OP διχοτομεί τη γωνία $\chi O\psi$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Τα τρίγωνα $AO\Lambda$ και BOK έχουν:

- 1) $OA = OB = \rho_2$
- 2) $OK = O\Lambda = \rho_1$ και
- 3) τη γωνία O κοινή

Από το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΓΠ τα τρίγωνα $AO\Lambda$ και BOK είναι ίσα, οπότε έχουν και $AL = BK$.

β) Επειδή $OA = OB$, το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές, άρα $OAB = OBA$ (1)

Επειδή τα τρίγωνα $AO\Lambda$ και BOK είναι ίσα, ισχύει ότι: $OAL = OBK$ (2)

Από (1)-(2) έχουμε: $OAB - OAL = OBA - OBK \Leftrightarrow PAB = PBA$, οπότε το τρίγωνο PAB είναι ισοσκελές.

γ) Τα τρίγωνα OPA και OPB έχουν:

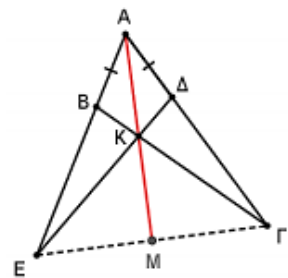
- 1) $OA = OB$
- 2) τη πλευρά OP κοινή και
- 3) $PA = PB$ (τρίγωνο APB ισοσκελές)

Από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα OPA και OPB είναι ίσα οπότε έχουν και $AOP = BOP$, δηλαδή η OP είναι διχοτόμος της γωνίας $\chi O\psi$.

1846. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = A\Gamma$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$.

Αν τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και η προέκταση της AK τέμνει την $E\Gamma$ στο M , να αποδείξετε ότι:

- α) $B\Gamma = \Delta E$ (Μονάδες 6)
- β) $BK = K\Delta$ (Μονάδες 7)
- γ) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A . (Μονάδες 6)
- δ) Η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$. (Μονάδες 6)



Λύση

α) Το τρίγωνο ΕΑΓ είναι ισοσκελές ($AE=AG$) οπότε $\hat{AEM} = \hat{AGE}$ (1).

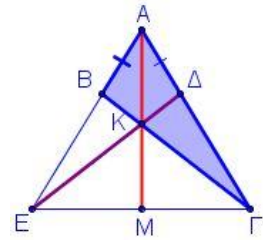
Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΔΕΓ, έχουν :

i) ΕΓ κοινή

ii) $BE=ΔΓ$ (διαφορές των ίσων τμημάτων ΑΕ, ΑΒ και ΑΓ, ΑΔ αντίστοιχα)

iii) $\hat{AEM} = \hat{AGE}$ από τη σχέση (1)

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΔΕΓ είναι ίσα οπότε έχουν και $BΓ=ΔΕ$



β) Το τρίγωνο ΕΚΓ είναι ισοσκελές ($\hat{EKG} = \hat{GKE}$ από την ισότητα των τριγώνων ΒΕΓ και ΔΕΓ) οπότε $EK=KG$ (2)

Τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΔΚΓ έχουν:

i) $EK=KG$ (από τη σχέση (2))

ii) $BE=ΔΓ$ (διαφορές των ίσων τμημάτων ΑΕ, ΑΒ και ΑΓ, ΑΔ αντίστοιχα)

iii) $\hat{BEK} = \hat{DGK}$ (Διαφορές των ίσων γωνιών $\hat{BEG}, \hat{KEG}$ και $\hat{AGE}, \hat{KGE}$ αντίστοιχα)

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΔΚΓ είναι ίσα, οπότε είναι και $BK=KD$.

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΚΔ έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία ($BK=KD, AK$ κοινή και $AB=AD$) άρα είναι ίσα. Επομένως $\hat{BAK} = \hat{KAD}$ οπότε η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

δ) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές και η ΑΜ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ άρα η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.

14880. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $AB=AD$ και $GB=GD$. Αν Ε το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΑ και ΓΒ, να αποδείξετε ότι:

α) Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ.

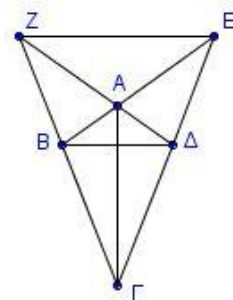
(Μονάδες 7)

β) $ΓΖ=ΓΕ$.

(Μονάδες 9)

γ) $EZ \parallel BD$.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν:

1) $AB=AD$

2) $GB=GD$ και

3) τη πλευρά ΓΑ κοινή, άρα

από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{BGA} = \hat{AGD}$, $\hat{BAG} = \hat{DAG}$.

Άρα η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ.

β) Τα τρίγωνα ΖΑΓ και ΕΑΓ έχουν:

1) τη πλευρά ΑΓ κοινή

2) $\hat{BGA} = \hat{AGD}$ και

3) $\hat{ZAG} = \hat{EAG}$ γιατί $\hat{ZAB} = \hat{EAD}$ ως κατακορυφήν και $\hat{BAG} = \hat{DAG}$.

Άρα λόγω του ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε και $ΓΖ=ΓΕ$.

γ) Επειδή τα Α,Γ ισαπέχουν από τα Β και Δ, ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΒΔ.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΖΕ η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ, οπότε είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου. Επειδή $ΓΑ \perp ΒΔ$ και $ΓΑ \perp ΕΖ$, είναι $EZ \parallel BD$.

3^ο Θέμα

12069. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) παίρνουμε στην πλευρά AB σημείο Δ , ώστε $\Delta B = 2\Delta\Delta$, και στην πλευρά $A\Gamma$ σημείο E , ώστε $E\Gamma = 2A\Gamma$. Το M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τμήματα ΔB και $E\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Αν P το σημείο τομής των τμημάτων BE και $\Gamma\Delta$ να δείξετε ότι:

i. Οι γωνίες ΓBE και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσες. (Μονάδες 6)

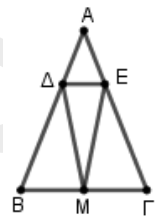
ii. Το τμήμα PM διχοτομεί τη γωνία BPG . (Μονάδες 7)

Λύση

α) i. Επειδή $\Delta B = 2\Delta\Delta$, είναι $\Delta\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $\Delta B = \frac{2}{3}AB$.

Επειδή $E\Gamma = 2A\Gamma$ είναι $A\Gamma = \frac{1}{3}A\Gamma$ και $E\Gamma = \frac{2}{3}A\Gamma$.

Επειδή $AB = A\Gamma$ είναι και $\Delta B = E\Gamma$.



ii. Τα τρίγωνα ΔBM και $EM\Gamma$ έχουν:

- $\Delta B = E\Gamma$

- $MB = M\Gamma$ γιατί το M είναι μέσο του $B\Gamma$

- $\angle B = \angle \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΔBM και $EM\Gamma$ είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta M = EM$.

Επομένως το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές.

β) i. Τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $EB\Gamma$ έχουν:

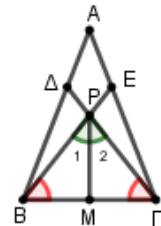
- $B\Gamma$ πλευρά κοινή

- $\Delta B = E\Gamma$

- $\angle B = \angle \Gamma$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $EB\Gamma$ είναι ίσα οπότε έχουν και

$\angle B\Gamma E = \angle B\Gamma\Delta$.



ii. Επειδή $\angle B\Gamma E = \angle B\Gamma\Delta$, το τρίγωνο $PB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$. Επειδή η PM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $PB\Gamma$, είναι και διχοτόμος του τριγώνου, δηλαδή το τμήμα PM διχοτομεί τη γωνία BPG .

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ**2ο Θέμα**

1532. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE . Αν $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) $EH = \Delta Z$

(Μονάδες 12)

Λύση

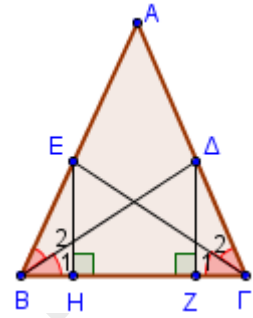
α) Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE έχουν:

- 1) Την πλευρά $B\Gamma$ κοινή
- 2) $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ και
- 3) $B_1 = \frac{B}{2} = \frac{\Gamma}{2} = \Gamma_1$

Με βάση το κριτήριο Γ -Π- Γ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα EBH και $\Delta Z\Gamma$ έχουν:

- 1) $B = \Gamma$ και
- 2) $BE = \Gamma\Delta$ (από ισότητα τριγώνων $B\Gamma\Delta$ και ΓBE).
Άρα τα τρίγωνα EBH και $\Delta Z\Gamma$ έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες και είναι ίσα, οπότε έχουν και $EH = \Delta Z$.



1545. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και ΓEB είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

β) $A\Delta = AE$

(Μονάδες 10)

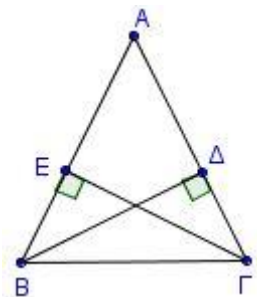
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και ΓEB έχουν:

- 1) την πλευρά $B\Gamma$ κοινή και
 - 2) $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$
- Άρα τα τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες και είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και ΓEB είναι ίσα, έχουν και $BE = \Gamma\Delta$.

Όμως είναι $AB = A\Gamma$, άρα είναι και $AB - BE = A\Gamma - \Gamma\Delta \Leftrightarrow AE = A\Delta$.



1546. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε τις αποστάσεις MK και $M\Lambda$ του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:

α) $MK = M\Lambda$

(Μονάδες 13)

β) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας KML .

(Μονάδες 12)

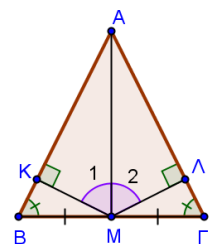
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα MKB και $M\Lambda\Gamma$ έχουν:

- 1) $MB = M\Gamma$ γιατί το M είναι μέσο του $B\Gamma$ και
 - 2) $B = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου
- Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $MK = M\Lambda$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα AKM και ALM έχουν:

- 1) την πλευρά AM κοινή και
- 2) $MK = M\Lambda$,



Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά ίση και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $M_1 = M_2$, δηλαδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ.

1547. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$. Από το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ φέρουμε κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $MD = ME$

(Μονάδες 12)

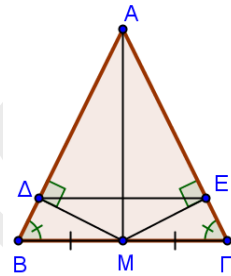
β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:

- 1) $MB = MG$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ και
- 2) $B = G$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου
Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $MD = ME$.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ίσα, έχουν και $DB = EG$.

Όμως $AB = AG$, άρα και $AB - DB = AG - EG \Leftrightarrow AD = AE$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

1568. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = AG$, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:

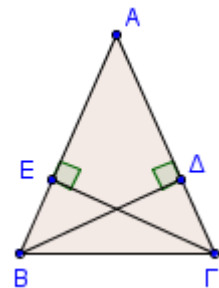
- 1) την πλευρά ΒΓ κοινή και
- 2) $B = G$ γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, αφού έχει $AB = AG$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BD = GE$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:

- 1) την πλευρά ΒΓ κοινή και
- 2) $BD = GE$

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B = G$. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες του ίσες, οπότε είναι ισοσκελές και έχει $AB = AG$.



1569. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ.

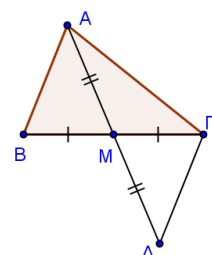
(Μονάδες 13)

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ έχουν:

- 1) $AM = MD$
- 2) $BM = MG$ γιατί το Μ είναι μέσο της ΒΓ και
- 3) $AMB = DMG$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



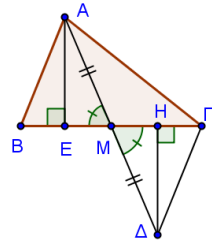
β) Έστω ΑΕ και ΔΗ οι αποστάσεις των Α, Δ από τη ΒΓ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΜ και ΜΔΗ έχουν:

1) $AM = MD$

2) $\angle AMB = \angle DMG$

Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτεινόμενες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου τριγώνου είναι ίσα, οπότε έχουν και $AE = DH$.



1571. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A = 90^\circ$) και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β. Από το Δ

φέρουμε $DE \perp B\Gamma$ και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α). Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = BE$

(Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $BE\Delta$ έχουν:

1) τη πλευρά ΒΔ κοινή

2) $\angle B_1 = \angle B_2$ λόγω της διχοτόμησης

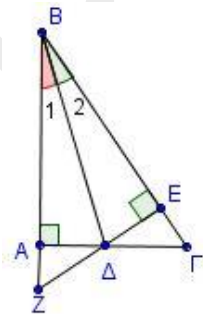
Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτεινόμενες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα, κατά συνέπεια έχουν και $AB = BE$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB έχουν:

1) Τη γωνία Β κοινή

2) $AB = BE$

Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά τους ίση και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα.



1656. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $MD = NE$ τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) Αν $AB = AG$ τότε $MD = NE$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AM\Delta$ και AEN έχουν:

1) $MD = ME$ και 2) τη γωνία Α κοινή, άρα έχουν μια κάθετη πλευρά και μια οξεία γωνία τους ίση,

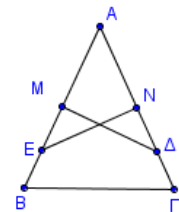
οπότε είναι ίσα και έχουν $AM = AN \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{AG}{2} \Leftrightarrow AB = AG$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AM\Delta$ και AEN έχουν:

1) $AM = AN$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ και

2) τη γωνία Α κοινή, άρα

έχουν την υποτεινόμενα και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $MD = ME$.



1657. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

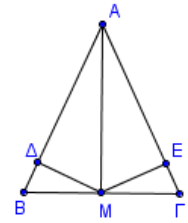
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $M\Delta = ME$, τότε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και AME είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Αν $AB = A\Gamma$ και M το μέσο του $B\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AM\Delta$ και AME έχουν:

1) την πλευρά MA κοινή και 2) $M\Delta = ME$, δηλαδή έχουν τις υποτείνουσες και μια κάθετη πλευρά τους ίση, οπότε είναι ίσα.

β) Αν $AB = A\Gamma$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $M\Delta B$ και $ME\Gamma$ έχουν:

1) $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ και

2) $MB = M\Gamma$, γιατί το M είναι μέσο του $B\Gamma$

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $M\Delta = ME$.

1658. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $M\Delta = ME$ τότε:

i. τα τρίγωνα BAM και GEM είναι ίσα.

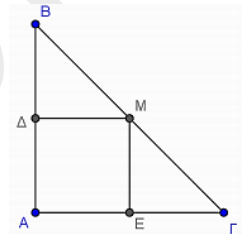
(Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = ME$.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα BAM και GEM έχουν:

- $M\Delta = ME$

- $MB = M\Gamma$, διότι M μέσο της $B\Gamma$.

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες οπότε είναι ίσα.

ii. Από τα ίσα τρίγωνα BAM και GEM προκύπτει ότι $B = \Gamma$, διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές $M\Delta$ και ME . Άρα $AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα BAM και GEM έχουν:

- $MB = M\Gamma$, διότι M μέσο της $B\Gamma$

- $B = \Gamma$, ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα τα τρίγωνα BAM και GEM είναι ίσα, οπότε ισχύει $M\Delta = ME$ ως απέναντι από τις ίσες γωνίες B, Γ .

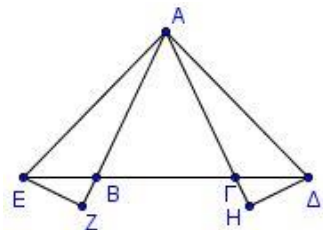
1659. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = AE$

(Μονάδες 12)

β) $EZ = \Delta H$

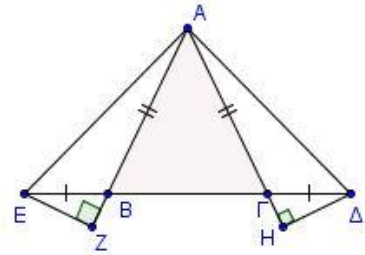
(Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ έχουν:

- 1) $AB = AG$
- 2) $GD = BE$ και
- 3) $ABE = AGD$ παραπληρωματικές των ίσων γωνιών B και G του ισοσκελούς τριγώνου ABG .
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AD = AE$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα EBZ και $ΓHΔ$ έχουν:

- 1) $GD = BE$ και
- 2) $EBZ = ΔΓH$ κατακορυφήν με τις ίσες γωνίες B και $Γ$ του ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$.
Τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $EZ = ΔH$.

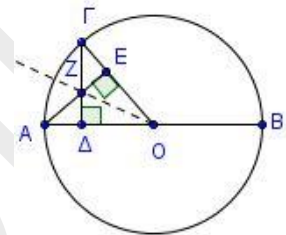
1677. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν AE κάθετο στην OG και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην AO να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

β) Η OZ διχοτομεί τη γωνία $AOΓ$ και προεκτείνόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου $ΑΓ$.

(Μονάδες 12)

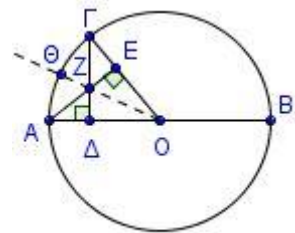


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα AEO και $\Gamma\Delta O$ έχουν:

- 1) $OA = OG = \rho$ και
- 2) τη γωνία O κοινή,

δηλαδή τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μία οξεία γωνία τους ίση, άρα είναι ίσα. Οπότε και $OD = OE$ άρα το τρίγωνο $OΔE$ είναι ισοσκελές.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $ZΔO$ και ZEO έχουν:

- 1) $OD = OE$ και
- 2) τη πλευρά OZ κοινή,

δηλαδή έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά τους ίση, οπότε είναι ίσα, άρα έχουν και $\Delta OZ = ZOE$, δηλαδή η OZ είναι διχοτόμος της γωνίας $AOΓ$. Επειδή οι γωνίες AOZ και ZOG είναι επίκεντρες και είναι ίσες, τότε και τα αντίστοιχα τόξα $A\Theta$ και $\Theta\Gamma$ είναι ίσα, οπότε το Θ είναι μέσο του τόξου $ΑΓ$.

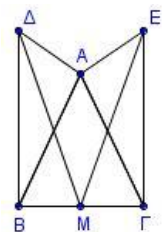
1698. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AG$). Στα σημεία B και Γ της $BΓ$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $BΓ$ τα τμήματα $BD \perp BΓ$ και $ΓE \perp BΓ$ τέτοια, ώστε $BD = ΓE$. Αν M το μέσο της $BΓ$, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $BΔM$ και $ΓEM$ είναι ίσα

(Μονάδες 12)

β) $AD = AE$.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $BΔM$ και $ΓEM$ έχουν:

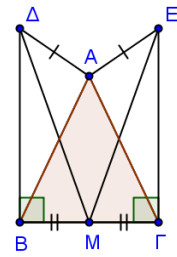
- 1) $BD = ΓE$ και 2) $BM = MΓ$ γιατί το M είναι μέσο της $BΓ$

Τα δύο τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα $\triangle ADB$ και $\triangle AEG$ έχουν:

- 1) $BD = GE$
- 2) $AB = AG$ και
- 3) $\angle ABD = \angle BGM - B = 90^\circ - \Gamma = \angle AGE$ (οι γωνίες B και Γ είναι στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $\triangle ABG$ και είναι ίσες)

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AD = AE$.

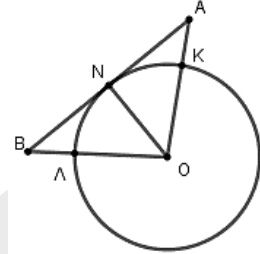


1676. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $\triangle AOB$ είναι ισοσκελές.
- β) Το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.

(Μονάδες 13)

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Επειδή η AB είναι εφαπτομένη του κύκλου, ισχύει ότι $AB \perp ON$.

Στο τρίγωνο $\triangle OAB$ η ON είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Η ON εκτός από ύψος και διάμεσος είναι και διχοτόμος της γωνίας $\angle BOA$, άρα $\angle BON = \angle NOA$.

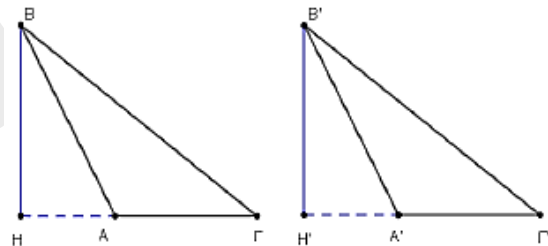
Επειδή σε ίσες επίκεντρες γωνίες ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσα τόξα, είναι $KN = N\Lambda$, οπότε το N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.

12149. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ ($\angle A = 90^\circ$) και $\triangle A'B'\Gamma'$ ($\angle A' = 90^\circ$) με $\gamma = \gamma'$ και $\beta = \beta'$.

Αν τα ύψη BH και $B'H'$ των τριγώνων $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

- α) $BAH = B'A'H'$.
- β) Τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)



(Μονάδες 12)

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle BHA$ και $\triangle B'H'A'$ έχουν:

- $BH = B'H'$, από υπόθεση
- $\gamma = \gamma'$, από υπόθεση

Επομένως είναι ίσα, επειδή είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Άρα και οι γωνίες που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές BH και $B'H'$ είναι ίσες, δηλαδή $\angle BAH = \angle B'A'H'$.

β) Τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ έχουν:

- $\gamma = \gamma'$, από υπόθεση
- $\beta = \beta'$, από υπόθεση

- $\angle BAH = \angle B'A'H'$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\angle BAH$ και $\angle B'A'H'$.

Επομένως, τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

13517. Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ με

$A = \Delta$, $AB\Gamma = \Delta EZ$. Αν τα ύψη τους BH και $E\Theta$ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

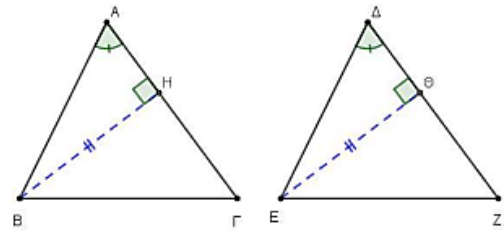
α) $AB = \Delta E$.

(Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα .

(Μονάδες 12)

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABH και $\Delta E\Theta$ έχουν:

- $BH = E\Theta$ από την υπόθεση,

- $ABH = \Delta E\Theta$ γιατί τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες τους είναι ίσες

Επομένως, τα τρίγωνα ABH και $\Delta E\Theta$ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά τους και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως, θα έχουν τις υποτείνουσες ίσες, δηλαδή $AB = \Delta E$ (1).

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν:

- $AB = \Delta E$, από (1),

- $A = \Delta$ υπόθεση

- $AB\Gamma = \Delta EZ$ υπόθεση.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

13533. Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με

$AB = AG$. Η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ και η κάθετη στην AG στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

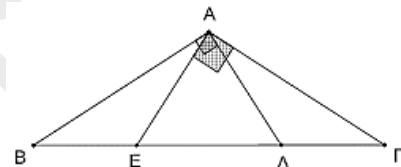
β) το τρίγωνο $A\Delta\epsilon$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)

γ) $BE = \Gamma\Delta$.

(Μονάδες 8)

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ έχουν:

- $AB = AG$ υπόθεση

- $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ προκύπτει ότι $A\Delta = A\epsilon$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους B, Γ αντίστοιχα. Άρα το τρίγωνο $A\Delta\epsilon$ είναι ισοσκελές.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ έχουμε ότι $B\Delta = \Gamma\epsilon$ (1) ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους $B\Delta\Delta$ και $\Gamma\Delta\epsilon$ αντίστοιχα.

Λόγω της (1) είναι $BE = B\Delta - \Delta\epsilon = \Gamma\epsilon - \Delta\epsilon = \Gamma\Delta$.

4^ο Θέμα

1707. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου AA στο σημείο E . Αν Θ, Z είναι οι προβολές του E στις AB, AG , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

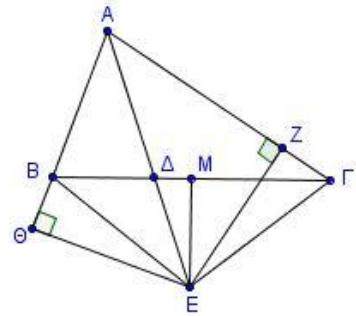
(Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΘBE και ZGE είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

γ) $\angle AGE + \angle ABE = 180^\circ$.

(Μονάδες 12)



α) Στο τρίγωνο $EB\Gamma$ η EM είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

2ος τρόπος: E σημείο της μεσοκαθέτου του $B\Gamma$, οπότε ισαπέχει από τα άκρα του.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΘBE και EZG έχουν:

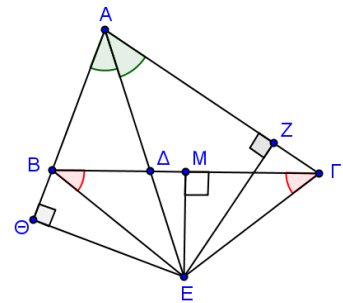
1) $EB = EG$

2) $\angle E\Theta B = \angle EZG$ γιατί το E ανήκει στη διχοτόμο AA της γωνίας A , οπότε ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

Άρα τα τρίγωνα έχουν τις υποτεινόμενες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου, είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΘBE και EZG είναι ίσα είναι και $\angle AGE = \angle \Theta BE$ (1)

Είναι $\angle \Theta BE + \angle ABE = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \angle AGE + \angle ABE = 180^\circ$



1724. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές AG και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = AG$, τότε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει.

(Μονάδες 10)

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $BE\Gamma$ έχουν:

1) τη πλευρά $B\Gamma$ κοινή και

2) $\angle AB\Gamma = \angle AG\Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα τα τρίγωνα έχουν τις υποτεινόμενες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου, είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε είναι ίσα.

Επομένως είναι και $BE = \Gamma\Delta$.

β) **Π':** Αν δύο ύψη τριγώνου είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ίσες τις πλευρές στις οποίες αντιστοιχούν τα ύψη.

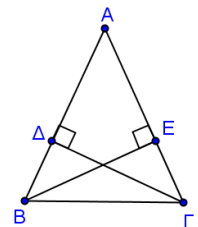
Απόδειξη

Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ έχουν:

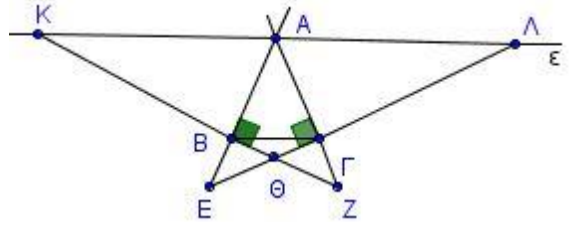
1) τη πλευρά $B\Gamma$ κοινή και 2) $BE = \Gamma\Delta$

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $\angle AB\Gamma = \angle AG\Gamma$. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει δύο γωνίες ίσες, είναι ισοσκελές με $AB = AG$.

γ) Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.



1875. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Η κάθετη στη πλευρά AB στο B τέμνει την ε στο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο Z . Η κάθετη στη πλευρά $A\Gamma$ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία AB στο E .



α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $AZ = AE$ (Μονάδες 8)
- ii. $AK = AL$ (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των $KZ, E\Lambda$. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Λύση

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ABZ και $A\Gamma E$ έχουν:

- 1) τη γωνία A κοινή
- 2) $AB = A\Gamma$ (ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε

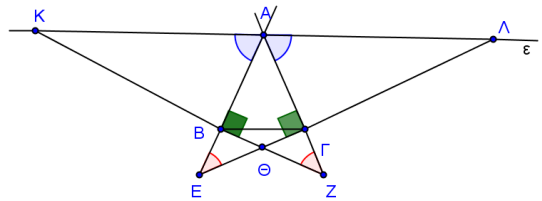
και $AE = AZ$, $\angle A\Gamma E = \angle ABZ$.

ii. Τα τρίγωνα EAL και KAZ έχουν:

- 1) $AE = AZ$
- 2) $\angle A\Gamma E = \angle ABZ$ και
- 3) $\angle EAL = \angle KAZ = A + \frac{1}{2}A_{\text{εξ}}$ (ή με σύγκριση των

τριγώνων KAB και $\Lambda A\Gamma$)

Από το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε και $AK = AL$.



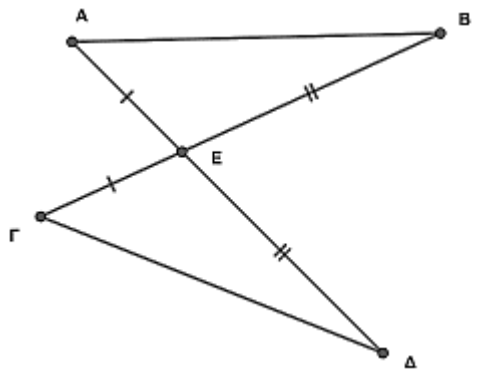
β) Είναι $\angle ABZ = \angle A\Gamma E = 90^\circ$ και $\angle AB\Gamma = \angle A\Gamma B$ (στη βάση του ισοσκελούς $AB\Gamma$), άρα και $\angle ABZ - \angle AB\Gamma = \angle A\Gamma E - \angle A\Gamma B \Leftrightarrow \angle \Gamma B\Theta = \angle \Gamma\Theta B$. Τότε το τρίγωνο $B\Theta\Gamma$ είναι ισοσκελές και $B\Theta = \Gamma\Theta$. Όμως τα $B\Theta, \Gamma\Theta$ είναι οι αποστάσεις του Θ από τις πλευρές της γωνίας A , οπότε το Θ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας A . Δηλαδή η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της A .

13839. Τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$ και $B\Gamma$ τέμνονται στο σημείο E έτσι ώστε $AE = \Gamma E$ και $BE = E\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις EH και $E\Theta$ του σημείου E από τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$, αντίστοιχα, είναι ίσες. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι προεκτάσεις των AB και $\Gamma\Delta$ προς τα A και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Lambda Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABE και $\Gamma\Delta E$ έχουν:

- $AE = \Gamma E$ (υπόθεση)
- $BE = E\Delta$ (υπόθεση)

- $\angle AEB = \angle GED$ (ως κατακορυφήν)

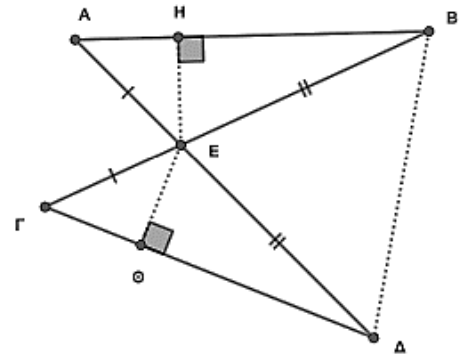
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $\triangle ABE$ και $\triangle GDE$ είναι ίσα

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AHE$ και $\triangle GDE$ έχουν:

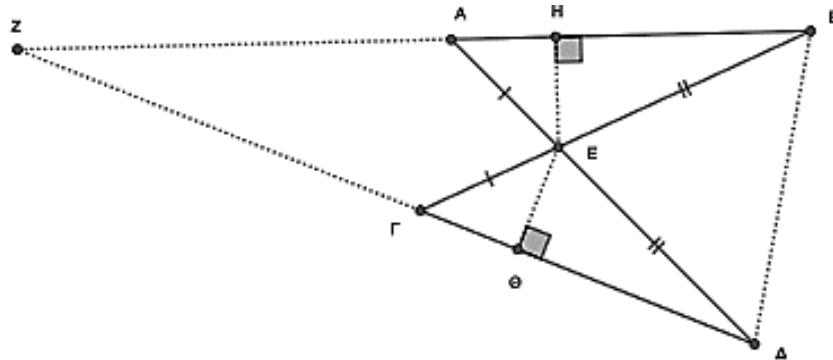
- $AE = GE$

- $\angle A = \angle G$ (από σύγκριση ερωτήματος α) αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές EB και ED)

Τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτεινούσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα και $EH = EG$ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle A$ και $\angle G$ αντίστοιχα.



γ)



Από την ισότητα των τριγώνων του α) ερωτήματος έχουμε ότι $\triangle ABE = \triangle GDE$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AE και GE αντίστοιχα.

Από υπόθεση έχουμε $EB = ED$ άρα το τρίγωνο $\triangle EBD$ είναι ισοσκελές με βάση BD συνεπώς οι προσκείμενες στη βάση γωνίες θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή $\angle EBD = \angle EDB$. Το τρίγωνο $\triangle BZD$ είναι ισοσκελές με βάση τη BD αφού οι προσκείμενες στη βάση γωνίες, $\angle ZBD$ και $\angle ZDB$, είναι ίσες μεταξύ τους ως άθροισμα ίσων γωνιών: $\angle ABE + \angle EBD = \angle GDE + \angle EDB \Leftrightarrow \angle ZBD = \angle ZDB$

ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ – ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ - ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ**2^ο Θέμα**

1587. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) του σχήματος ισχύουν $\alpha = \beta$ και $\hat{\gamma} = \delta$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα.

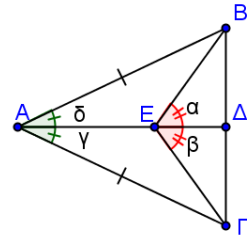
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $ΓΕΒ$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

(Μονάδες 9)

**Λύση**

α) Τα τρίγωνα AEB και AEG έχουν:

1) την πλευρά AE κοινή

2) $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ (υπόθεση) και

3) $AB = A\Gamma$ (υπόθεση)

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα, έχουν και $EB = EG$, άρα το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$.

γ) Επειδή τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα, έχουν και $AB = A\Gamma$, δηλαδή το A ισαπέχει από τα B και Γ οπότε βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$. Επειδή $EB = EG$, το E ισαπέχει από τα B, Γ άρα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$. Επειδή τα A, E βρίσκονται στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$, η $A\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος αυτού.

1558. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

β) Οι γωνίες $\hat{AIB}$ και $\hat{AIG}$ είναι ίσες.

(Μονάδες 10)

γ) Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Επειδή οι $BI, \Gamma I$ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, ισχύει ότι

$B_2 = \frac{B}{2}$ και $\Gamma_2 = \frac{\Gamma}{2}$. Όμως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου

$AB\Gamma$, οπότε $B_2 = \Gamma_2$. Το τρίγωνο $B\Gamma I$ έχει δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα AIB και AIG έχουν:

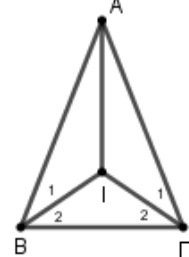
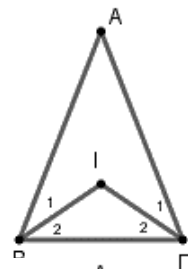
- $AB = A\Gamma$ (υπόθεση)

- $BI = \Gamma I$ γιατί το τρίγωνο $IB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$

- $B_1 = \Gamma_1$ γιατί είναι ίσες με το μισό των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα AIB και AIG είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{AIB} = \hat{AIG}$.

γ) Επειδή $AB = A\Gamma$ και $IB = \Gamma I$, τα σημεία A και I ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος $B\Gamma$, οπότε η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.



1574. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE .

(Μονάδες 12)

Λύση

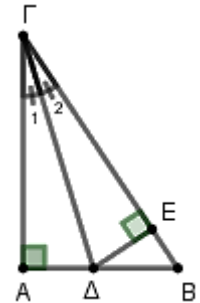
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ έχουν:

- την πλευρά $\Gamma\Delta$ κοινή

- $\Gamma_1 = \Gamma_2$ λόγω διχοτόμησης της γωνίας Γ .

Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα τους ίση και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα, έχουν $\Gamma A = \Gamma E$ και $\Delta A = \Delta E$. Δηλαδή τα σημεία Γ , Δ ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος AE , επομένως η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AE .



1578. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα Z και H .

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και $EZ\Gamma$.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

Λύση

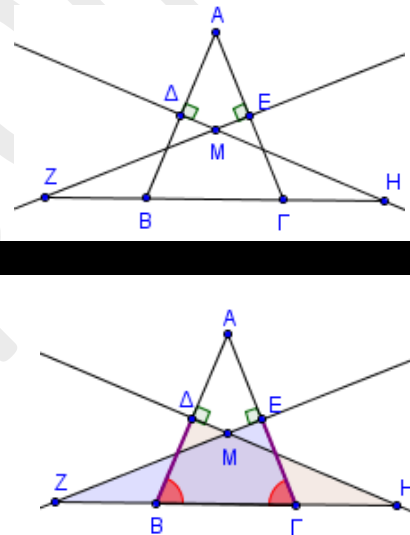
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔBH και $EZ\Gamma$ έχουν:

1) $\Delta B = E\Gamma$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$

2) $B = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΔBH και $E\Gamma Z$ είναι ίσα, έχουν και $Z = H$. Το τρίγωνο MZH έχει δύο γωνίες ίσες, άρα είναι ισοσκελές.



1585. Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $A = \Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BA\Gamma = B\Gamma A$

(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

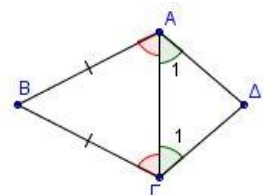
(Μονάδες 10)

γ) Η ευθεία BA είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Επειδή $BA = B\Gamma$, το τρίγωνο $BA\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Gamma$, άρα $BA\Gamma = B\Gamma A$.



β) Επειδή $A = \Gamma$ και $BA\Gamma = B\Gamma A$, είναι και $A - BA\Gamma = \Gamma - B\Gamma A \Leftrightarrow A_1 = \Gamma_1$, άρα το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Gamma$ και είναι $\Delta A = \Delta \Gamma$.

γ) Επειδή $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta \Gamma$, τα σημεία B, Δ ισαπέχουν από τα A, Γ , άρα η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του $A\Gamma$.

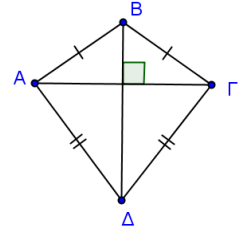
1624. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta \Gamma$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma, B\Delta$ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:

α) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)

β) Η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ έχουν:

- 1) $BA = B\Gamma$
- 2) $\Delta A = \Delta \Gamma$ και
- 3) τη πλευρά $B\Delta$ κοινή

Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν $\angle A\Delta B = \angle B\Gamma\Delta$ και $\angle A\Delta B = \angle B\Gamma\Delta$, δηλαδή η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.

β) Επειδή $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta \Gamma$, τα σημεία A και Γ ισαπέχουν από τα B, Δ , άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του $A\Gamma$. Οπότε η $B\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του $A\Gamma$.

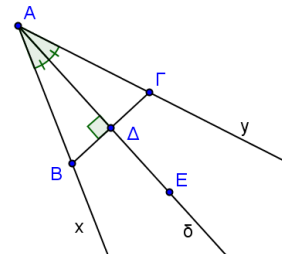
1670. Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της $A\delta$. Από τυχαίο σημείο B της Ax φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την Ay στο Γ . Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = A\Gamma$

(Μονάδες 12)

β) Το τυχαίο σημείο E της $A\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ .

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η $A\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, επομένως $AB = A\Gamma$.

β) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές η $A\Delta$ θα είναι και διάμεσος. Επειδή η $A\Delta$ είναι κάθετη στο μέσο Δ της $B\Gamma$, είναι μεσοκάθετη της $B\Gamma$. Επειδή κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος, το ίδιο ισχύει και για το τυχαίο σημείο E της $A\delta$.

1688. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.

Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια.

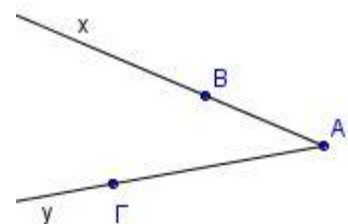
(Μονάδες 9)

β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.

(Μονάδες 9)

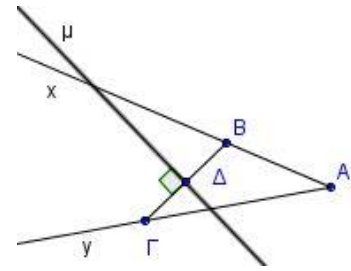
γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση. (Μονάδες 7)

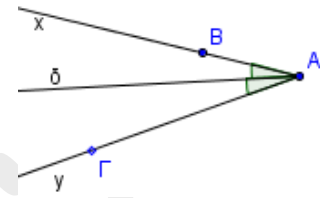


Λύση

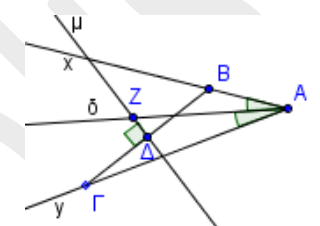
α) Γνωρίζουμε ότι τα σημεία που ισαπέχουν από δύο σημεία Β και Γ, βρίσκονται στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ. Κατά συνέπεια ο θησαυρός βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο μ του ΒΓ.



β) Για να ισαπέχει ο θησαυρός από τα δύο ποτάμια, θα ισαπέχει από τις πλευρές Αχ και Αγ της γωνίας χΑγ, άρα θα βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας αυτής.



γ) Αν ο θησαυρός ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια, τότε ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΒΓ και στη διχοτόμο Αδ της γωνίας χΑγ, άρα ο θησαυρός βρίσκεται στο σημείο τομής Ζ των Αδ, μ.



4^ο Θέμα

13854. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=AG$). Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο Ο.

α) Να αποδείξετε ότι $ΒΔ=ΓΕ$.

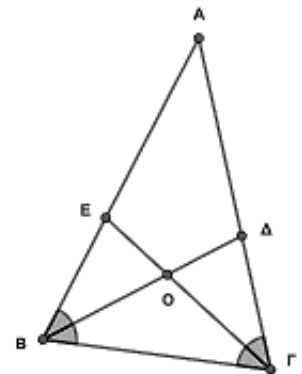
(Μονάδες 9)

β) Από τα σημεία Ε και Δ φέρνουμε κάθετες ΕΛ και ΔΚ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $ΔΚ=ΕΛ$.

(Μονάδες 9)

γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ που η απόστασή του από το σημείο Ε να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και Κ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΓ έχουν:

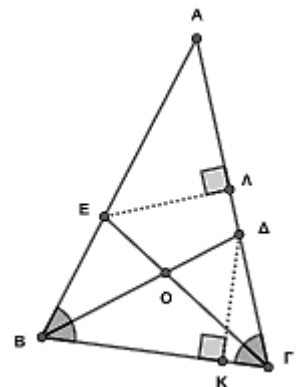
- τη ΒΓ κοινή πλευρά
- $ABG = AGB$ ως προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
- $\Delta BG = \Gamma GB$ ως μισά των ίσων γωνιών ΑΒΓ και ΑΓΒ

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, άρα $BD=GE$ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών ΑΓΒ και ΑΒΓ.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΕΛ έχουν:

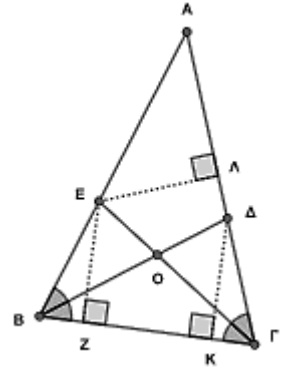
- $BD = GE$ από το προηγούμενο ερώτημα
- $\Delta BK = \Gamma GL$ ως μισά των ίσων γωνιών ΑΒΓ και ΑΓΒ

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα $DK=EL$ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών ΚΒΔ και ΛΓΕ.



γ) Αναζητούμε ένα σημείο Z της πλευράς $B\Gamma$ το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση $ZE = \Delta K$.

Από το β) ερώτημα έχουμε ότι $\Delta K = E\Lambda$ συνεπώς το σημείο Z που αναζητούμε θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $ZE = E\Lambda$. Το σημείο E ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\Lambda\Gamma B$ και $E\Lambda$ είναι η απόστασή του από την πλευρά ΓA , η οποία είναι ίση με την απόσταση του σημείου E από τη άλλη πλευρά, $B\Gamma$, της γωνίας. Συνεπώς το ζητούμενο σημείο Z θα είναι το ίχνος της κάθετης από το σημείο E στην πλευρά $B\Gamma$.



ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ**2^ο Θέμα**

1540. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο DE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = DE$

(Μονάδες 13)

β) $AD < DB$

(Μονάδες 12)

Λύση

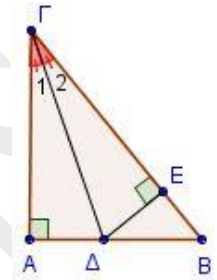
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ έχουν:

1) την πλευρά $\Gamma\Delta$ κοινή και

2) $\Gamma_1 = \Gamma_2$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Γ .

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AD = DE$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔEB η DB είναι η υποτείνουσα, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή $DB > DE$, όμως $AD = DE$, άρα $DB > AD$.



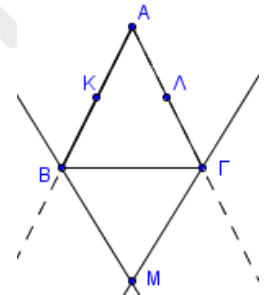
1553. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των AB και $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Gamma M$ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) $MK = M\Lambda$

(Μονάδες 13)

**Λύση**

α) Επειδή οι BM και ΓM είναι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ αντίστοιχα, έχουμε:

$$MB\Gamma = \frac{B_{\text{εξ}}}{2} = \frac{180^\circ - B}{2} = \frac{180^\circ - \Gamma}{2} = \frac{\Gamma_{\text{εξ}}}{2} = M\Gamma B.$$

Το τρίγωνο $M\Gamma B$ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, άρα $MB = M\Gamma$.

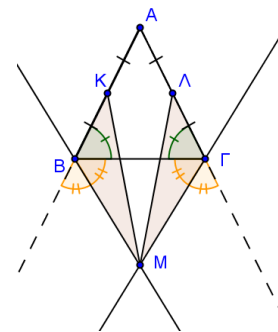
β) Τα τρίγωνα KBM και $\Lambda\Gamma M$ έχουν:

1) $KB = \Lambda\Gamma$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$

2) $MB = M\Gamma$ και

3) $KBM = B + MB\Gamma = \Gamma + M\Gamma B = \Lambda\Gamma M$

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $MK = M\Lambda$.



1573. Στο διπλανό σχήμα, η AD είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της AD , ώστε $DE = AD$.

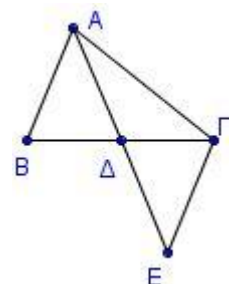
Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = \Gamma E$.

(Μονάδες 12)

β) $AD < \frac{AB + A\Gamma}{2}$.

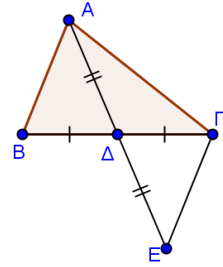
(Μονάδες 13)

**Λύση**

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και ΔGE έχουν:

- 1) $A\Delta = \Delta E$
- 2) $B\Delta = \Delta\Gamma$ γιατί το Δ είναι μέσο της $B\Gamma$ και
- 3) $\angle A\Delta B = \angle E\Delta\Gamma$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AB = GE$ (1).



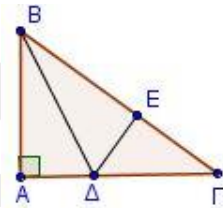
β) $AE = A\Delta + \Delta E \Leftrightarrow AE = 2A\Delta$

Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma E$ ισχύει ότι:

$$AE < AG + GE \Leftrightarrow AE < AB + A\Gamma \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2A\Delta < AB + A\Gamma \Leftrightarrow A\Delta < \frac{AB + A\Gamma}{2}.$$

1646. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A . Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , η ΔE είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας B . Να αποδείξετε ότι:

- α) $A\Delta = \Delta E$ (Μονάδες 8)
- β) $A\Delta < \Delta\Gamma$ (Μονάδες 9)
- γ) $A\Gamma > AB$ (Μονάδες 8)

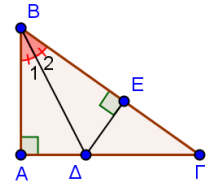


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $B\Delta E$ έχουν:

- 1) την πλευρά $B\Delta$ κοινή και
- 2) $\angle B_1 = \angle B_2$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας B .

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\Delta = \Delta E$.



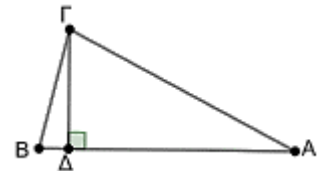
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ η $\Delta\Gamma$ είναι η υποτείνουσα, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή $\Delta\Gamma > \Delta E$, όμως $A\Delta = \Delta E$, άρα $\Delta\Gamma > A\Delta$.

γ) Γνωρίζουμε ότι απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές, άρα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ επειδή $\Gamma < B$ είναι και $AB < A\Gamma$.

13844. Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $B\Delta < A\Delta$, $AB = A\Gamma$ και

$$\angle A\Delta\Gamma = 90^\circ.$$

- α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma > B\Gamma$. (Μονάδες 10)
- β) Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 15)



Λύση

α) Από το σημείο Γ που είναι εκτός της ευθείας AB έχουμε το κάθετο τμήμα $\Gamma\Delta$ και τα πλάγια τμήματα ΓB και ΓA . Το Δ είναι το ίχνος της καθέτου $\Gamma\Delta$ στην AB . Το ίχνος της $A\Gamma$ στην AB είναι το A , ενώ το ίχνος της $B\Gamma$ στην AB είναι το B .

Εφόσον $A\Delta > B\Delta$, το ίχνος της $A\Gamma$ (δηλαδή το A) απέχει από το ίχνος της καθέτου (δηλαδή το Δ) περισσότερο από όσο απέχει το ίχνος της $B\Gamma$ (δηλαδή το B). Άρα $A\Gamma > B\Gamma$.

β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία B βρίσκεται απέναντι από την πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, ενώ η γωνία A βρίσκεται απέναντι από την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$. Εφόσον $A\Gamma > B\Gamma$, ομοίως άνισες είναι και οι απέναντι γωνίες, άρα $B > A$. Επιπλέον, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$. Επομένως για τις γωνίες της βάσης του, $B\Gamma$ ισχύει ότι $B = \Gamma$. Άρα $\Gamma > A$, οπότε η μικρότερη γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι η A .

4^ο Θέμα

1749. Θεωρούμε δύο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ε , τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην ε . Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ε .

α) Αν η BA' τέμνει την ευθεία ε στο σημείο O , να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία ε διχοτομεί τη γωνία AOA' .

(Μονάδες 6)

ii. Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ε .

(Μονάδες 6)

β) Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ε , να αποδείξετε ότι:

i. $KA = KA'$

(Μονάδες 6)

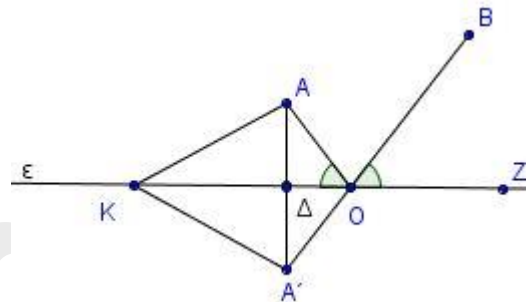
ii. $KA + KB > AO + OB$

(Μονάδες 7)

Λύση

α) i. Επειδή στο τρίγωνο OAA' η OD είναι ύψος και διάμεσος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές και η OD είναι διχοτόμος της γωνίας AOA' .

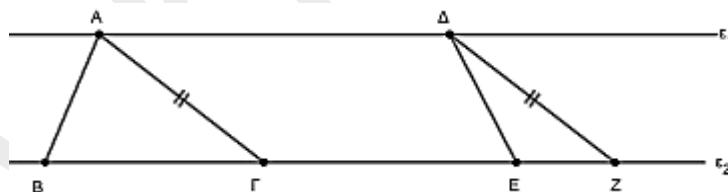
ii. Επειδή το τρίγωνο AOD είναι ορθογώνιο, η γωνία AOA' είναι οξεία. Είναι $\angle OAA' = \angle BOZ$ ως κατακορυφήν και $\angle OAA' < 90^\circ$, άρα και $\angle BOZ < 90^\circ$. Άρα οι ζητούμενες οξείες γωνίες είναι οι $\angle AOD$, $\angle BOZ$ και είναι ίσες.



β) i. Επειδή το K ανήκει στη μεσοκάθετο του AA' ισχύει ότι: $KA = KA'$.

ii. Στο τρίγωνο KBA' από τη τριγωνική ανισότητα, ισχύει ότι:
 $KA' + KB > BA' \Leftrightarrow KA + KB > OA' + OB \Leftrightarrow KA + KB > OA + OB$

13751. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔEZ είναι αμβλυγώνιο με $E > 90^\circ$. Ισχύει επίσης ότι $A\Gamma = \Delta Z$.



α) i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές A και Δ ονομάζοντας τα AH και $\Delta\Theta$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι $H\Gamma = \Theta Z$.

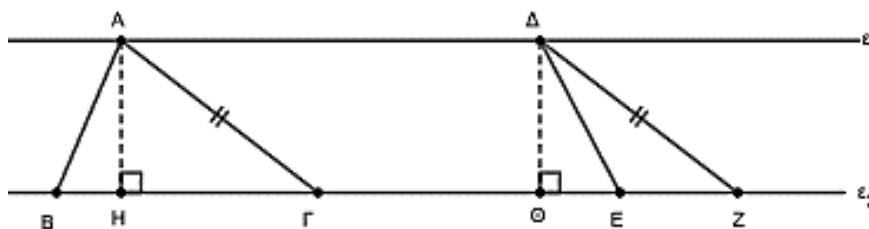
(Μονάδες 12)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί $EZ < B\Gamma$.

(Μονάδες 08)

Λύση

α) i.



ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AH\Gamma$ και $\Delta\Theta Z$ έχουν:

• $\angle A\Theta = \angle \Delta\Theta$, ως αποστάσεις παραλλήλων ευθειών

- $ΑΓ = ΔΗ$, από την υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε και οι άλλες κάθετες πλευρές τους είναι ίσες, δηλαδή $ΗΓ = ΘΖ$.

β) Το σημείο $Η$ είναι εσωτερικό του τμήματος $ΒΓ$ γιατί το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, οπότε $ΗΓ < ΒΓ$.

Το σημείο $Θ$ είναι εξωτερικό του τμήματος $ΕΖ$ γιατί η γωνία $Ε$ είναι αμβλεία, οπότε $ΕΖ < ΘΖ$.

Από το α) ii. ερώτημα βρήκαμε ότι $ΘΓ = ΘΗ$. Άρα $ΕΖ < ΘΖ$, $ΗΓ = ΘΓ$ και $ΗΓ < ΒΓ$, επομένως $ΕΗ < ΒΓ$.

Σχετική θέση ευθείας - κύκλου

2^ο Θέμα

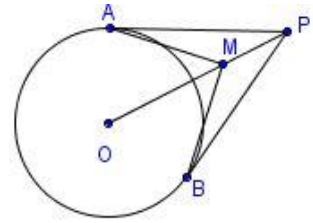
1617. Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB. Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) $\angle MAO = \angle MBO$.

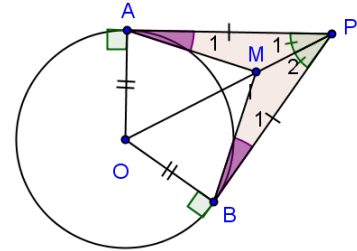
(Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα PAM και PMB έχουν:

- 1) τη πλευρά PM κοινή
 - 2) $PA = PB$ γιατί είναι τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το P προς τον κύκλο
 - 3) $\angle P_1 = \angle P_2$ γιατί η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων
- Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα, έχουν και

$\angle A_1 = \angle B_1$. Όμως $\angle OAM = \angle OBM = 90^\circ$ γιατί οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτομένες, άρα $\angle MAO = 90^\circ - \angle A_1 = 90^\circ - \angle B_1 = \angle MBO$.

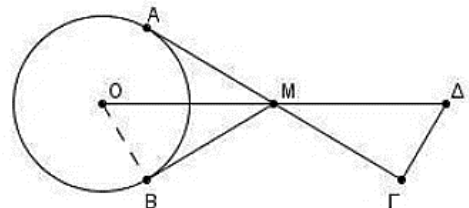
1620. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB. Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Gamma = MA$ και την OM κατά τμήμα $M\Delta = OM$.

α) Να αποδείξετε ότι $MB = M\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB που άγονται από το M προς τον κύκλο είναι μεταξύ τους ίσα. Ακόμη $MA = M\Gamma$, οπότε είναι και $MB = M\Gamma$.

β) Η διακεντρική ευθεία MO διχοτομεί τη γωνία AMB των εφαπτομένων, δηλαδή $\angle AMO = \angle OMB$.

Όμως $\angle AMO = \angle M\Gamma\Delta$ ως κατακορυφήν, άρα $\angle AMO = \angle M\Gamma\Delta$.

Τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ έχουν:

- $OM = M\Delta$ (υπόθεση)
- $MB = M\Gamma$

- $\angle AMO = \angle M\Gamma\Delta$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα

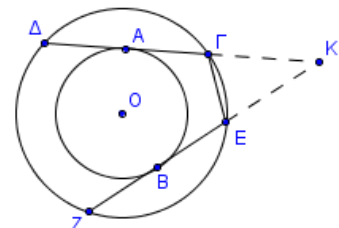
1667. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές ΔΓ και ZE του κύκλου (O,R) εφάπτονται στον κύκλο (O,ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$

(Μονάδες 12)

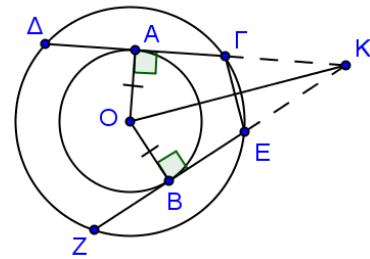
β) Αν οι ΔΓ και ZE προεκτείνόμενες τέμνονται στο σημείο K, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KEG είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Έστω OA και OB οι ακτίνες του κύκλου (O, ρ) που καταλήγουν στα σημεία επαφής με τις εφαπτομένες. Τότε $OA \perp \Gamma\Delta$ και $OB \perp EZ$. Τα OA, OB είναι αποστήματα των χορδών $\Gamma\Delta$ και EZ στον κύκλο (O, R) και είναι ίσα ($OA = OB = \rho$), άρα και οι χορδές $\Gamma\Delta$ και EZ είναι ίσες.



β) Επειδή τα KA, KB είναι εφαπτόμενα τμήματα από το K προς τον κύκλο (O, ρ) , είναι μεταξύ τους ίσα. Επειδή τα OA, OB είναι αποστήματα των χορδών $\Gamma\Delta$ και EZ , τα σημεία A και B είναι μέσα των χορδών και επειδή οι χορδές είναι ίσες, είναι και $AG = BE$. Είναι $KA = KB$ και $AG = BE$, άρα και $KA - AG = KB - BE \Leftrightarrow KG = KE$, οπότε το τρίγωνο KGE είναι ισοσκελές.

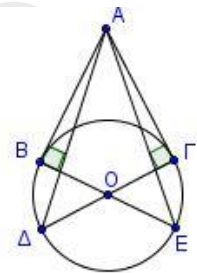
1684. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Από σημείο εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG . Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και AGE είναι ίσα.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Επειδή οι εφαπτομένες ενός κύκλου είναι κάθετες στις ακτίνες στα σημεία επαφής, οι γωνίες ABE και $AG\Delta$ είναι ορθές. Τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ έχουν:

- 1) $AB = AG$ γιατί τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν είναι ίσα και
- 2) $BE = \Gamma\Delta = 2\rho$

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα OBD και OGE έχουν:

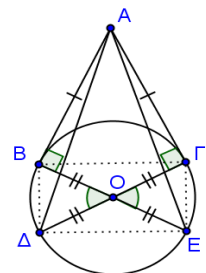
- 1) $OB = OE = \rho$, 2) $OD = OG = \rho$ και 3) $\angle BOD = \angle GOE$ ως κατακορυφήν.

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BD = GE$.

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και AGE έχουν:

- 1) $AB = AG$
- 2) $AD = AE$ γιατί τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα και
- 3) $BD = GE$

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



13817. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο B του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ϵ) . Θεωρούμε στην ευθεία (ϵ) δύο σημεία A και Γ εκατέρωθεν του B έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AZ και ΓM στον κύκλο.

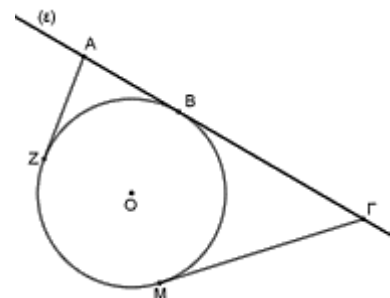
α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $AG = AZ + MG$.

(Μονάδες 10)

Λύση



α) Από τα δεδομένα τα ευθύγραμμα τμήματα AB και AZ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο από σημείο εκτός

αυτό, άρα είναι ίσα, δηλαδή $AB = AZ$.

Όμοια από το σημείο Γ που είναι εκτός του κύκλου τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΒ, ΓΜ είναι εφαπτόμενα σε αυτόν, άρα $GB = GM$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε $AG = AB + BG = AZ + MG$.

13759. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου Ο του κύκλου από μια ευθεία (ε). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

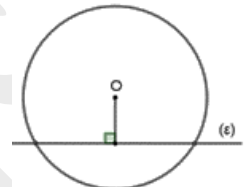
α) $d = 3$. (Μονάδες 9)

β) $d = 6$. (Μονάδες 8)

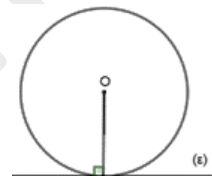
γ) $d = 9$. (Μονάδες 8)

Λύση

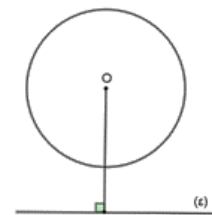
α) Επειδή η απόσταση $d = 3$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μικρότερη από την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι τέμνουσα του κύκλου.



β) Επειδή η απόσταση $d = 6$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, δηλαδή είναι εφαπτόμενη του κύκλου.



γ) Επειδή η απόσταση $d = 9$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μεγαλύτερη με την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι εξωτερική του κύκλου.



4^ο Θέμα

1751. Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α, Δ και Β.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $PG = \Gamma\Delta + AP$

(Μονάδες 6)

ii. $PG - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$

(Μονάδες 8)

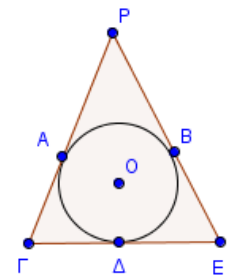
β) Αν $AG = BE$, να αποδείξετε ότι

i. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 6)

ii. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 5)



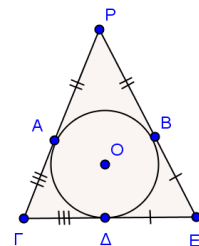
Λύση

α) i. Τα ΓΑ, ΓΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Γ προς τον κύκλο, οπότε $\Gamma A = \Gamma \Delta$. Είναι $PG = PA + AG \Leftrightarrow PG = PA + \Gamma \Delta$.

ii. Τα ΕΒ, ΕΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ε προς τον κύκλο, οπότε $EB = ED$. Όμοια ΡΑ, ΡΒ εφαπτόμενα τμήματα από το Ρ και ισχύει $PA = PB$.

Όμως $PG = \Gamma \Delta + PA \Leftrightarrow PA = PG - \Gamma \Delta$ και

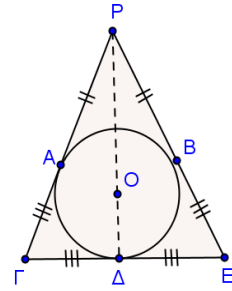
$PB = PE - BE = PE - \Delta E$, άρα $PG - \Gamma \Delta = PE - \Delta E$.



β) i. Αν $AG = BE$, τότε $AG = GD = DE = BE$.

Είναι $PG = GD + PA$, $PE = PB + DE$, οπότε $PG = PE$, άρα το τρίγωνο PGE είναι ισοσκελές.

ii. Επειδή $OA = OB = r$ και $OA \perp PG$, $OB \perp PE$, το O ισαπέχει από τις πλευρές PG , PE της γωνίας P , οπότε βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας. Επειδή το τρίγωνο PGE είναι ισοσκελές και το PD είναι διάμεσος, θα είναι και διχοτόμος της γωνίας P . Άρα τα O, D ανήκουν στη διχοτόμο της γωνίας P , οπότε τα σημεία P, O, D είναι συνευθειακά.



1752. Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα PA και PB . Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) $GA = \Delta B$.

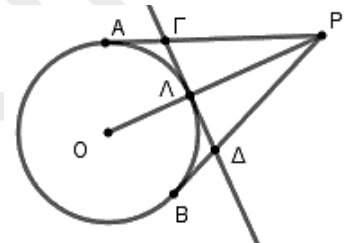
(Μονάδες 8)

γ) η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι ίση με $PA + PB$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Επειδή η $\Gamma\Delta$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Λ , ισχύει ότι $\Gamma\Delta \perp PO$. Επειδή η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί την γωνία $\Gamma P \Delta$ των εφαπτομένων, στο τρίγωνο $P\Gamma\Delta$, το $P\Lambda$ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



β) Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB είναι ίσα και οι πλευρές $P\Gamma$ και $P\Delta$ του ισοσκελούς τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι επίσης ίσες, ισχύει ότι:
 $PA - P\Gamma = PB - P\Delta \Leftrightarrow GA = \Delta B$

γ) Τα $GA, \Gamma\Lambda$ είναι εφαπτόμενα τμήματα από το Γ προς τον κύκλο, οπότε είναι ίσα.

Τα $\Delta B, \Delta\Lambda$ είναι εφαπτόμενα τμήματα από το Δ προς τον κύκλο, οπότε είναι ίσα.

Αν Π η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$, είναι $\Pi = P\Gamma + \Gamma\Delta + P\Delta = P\Gamma + \Gamma\Lambda + \Lambda\Delta + P\Delta = P\Gamma + GA + \Delta B + P\Delta = PA + PB$

Σχετική θέση δύο κύκλων

2^ο Θέμα

12417. Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R=3$, $r=2$ και $K\Lambda=4$. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B .

(Μονάδες 15)

β) $\angle K\Lambda\Lambda > \angle A\Lambda K$

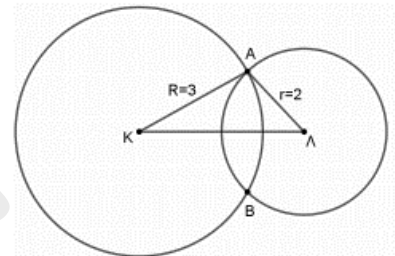
(Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $R + r = 5$ και $R - r = 1$.

Επειδή $R - r < K\Lambda < R + r$ οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία A και B .

β) Στο τρίγωνο $K\Lambda\Lambda$ είναι $K\Lambda > AK$ και επειδή απέναντι από άνισες πλευρές σε ένα τρίγωνο βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες, ισχύει ότι $\angle K\Lambda\Lambda > \angle A\Lambda K$.



13758. Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 3)$ και $(\Lambda, 8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α) $K\Lambda = 13$. (Μονάδες 5)

β) $K\Lambda = 2$. (Μονάδες 5)

γ) $K\Lambda = 5$. (Μονάδες 5)

δ) $K\Lambda = 11$. (Μονάδες 5)

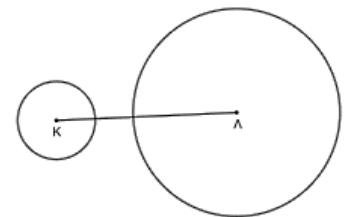
ε) $K\Lambda = 9$. (Μονάδες 5)

Λύση

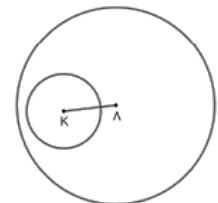
Έστω $R = 8$ και $r = 3$. Υπολογίζουμε τη διαφορά και το άθροισμα των δύο ακτίνων, δηλαδή

$$R - r = 8 - 3 = 5 \text{ και } R + r = 8 + 3 = 11.$$

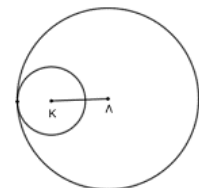
α) Επειδή η διάκεντρος $K\Lambda = 13$ έχει μεγαλύτερο μήκος από το άθροισμα των δύο ακτίνων $R + r = 11$, ο κύκλος $(\Lambda, 8)$ βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου $(K, 3)$



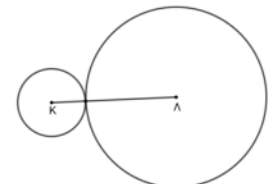
β) Επειδή η διάκεντρος $K\Lambda = 2$ έχει μικρότερο μήκος από τη διαφορά των δύο ακτίνων $R - r = 5$, ο κύκλος $(K, 3)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 8)$.



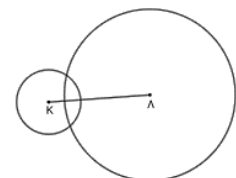
γ) Επειδή η διάκεντρος $K\Lambda = 5$ έχει ίσο μήκος με τη διαφορά των δύο ακτίνων $R - r = 5$, οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.



δ) Επειδή η διάκεντρος $K\Lambda = 11$ έχει ίσο μήκος με το άθροισμα των δύο ακτίνων $R + r = 11$, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



ε) Επειδή η διάκεντρος $K\Lambda = 9$ έχει μήκος μεταξύ της διαφοράς $R - r = 5$ και του αθροίσματος των δύο ακτίνων $R + r = 11$, οι κύκλοι τέμνονται.



13757. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,2) και (Λ,5).

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

(Μονάδες 6)

γ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν ο κύκλος (Κ,2) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι τέμνονται;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Λύση

Έστω $R = 5$ και $\rho = 2$.

α) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε για τη διάκεντρο ΚΛ έχουμε : $ΚΛ = R + \rho = 5 + 2 = 7$.

β) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε για τη διάκεντρο ΚΛ έχουμε : $ΚΛ = R - \rho = 5 - 2 = 3$.

γ) Για να είναι ο κύκλος (Κ,2) στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5) θα πρέπει $ΚΛ < R - \rho$, δηλαδή $ΚΛ < 5 - 2$ ή $ΚΛ < 3$.

δ) Για να τέμνονται οι κύκλοι θα πρέπει $R - \rho < ΚΛ < R + \rho$, δηλαδή $5 - 2 < ΚΛ < 5 + 2$ ή $3 < ΚΛ < 7$.

13835. Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.

α) Να αποδείξετε ότι $1 < ΚΛ < 9$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.

(Μονάδες 13)

Λύση

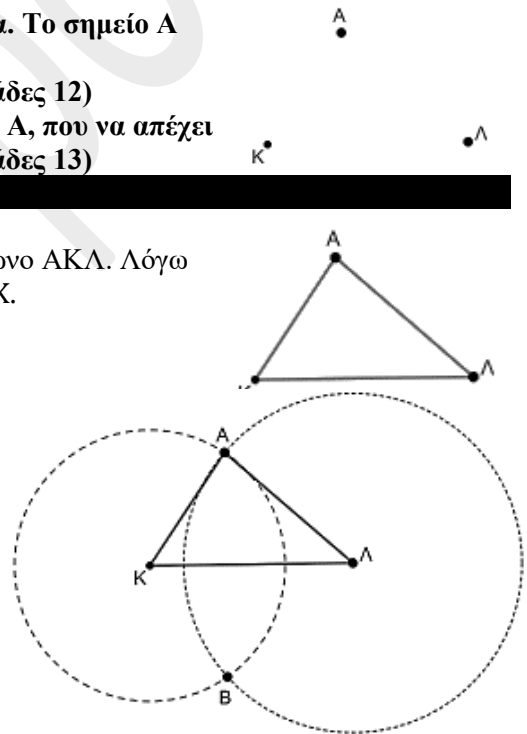
α) Τα τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Κ και Λ ορίζουν το τρίγωνο ΑΚΛ. Λόγω της τριγωνικής ανισότητας ισχύει ότι $ΑΛ - ΑΚ < ΚΛ < ΑΛ + ΑΚ$.
Άρα $5 - 4 < ΚΛ < 5 + 4$ ή $1 < ΚΛ < 9$.

β) Το ζητούμενο σημείο είναι σημείο του κύκλου (Κ, 4) και του κύκλου (Λ, 5). Σχεδιάζουμε δύο κύκλους: ο ένας έχει κέντρο το Κ και ακτίνα 4 και ο άλλος έχει κέντρο το Λ και ακτίνα 5. Από το α) ερώτημα για τη διάκεντρο των κύκλων έχουμε ότι:

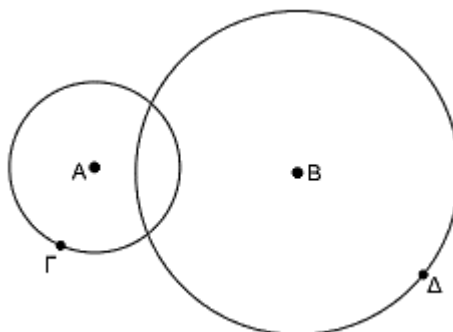
$$ΑΛ - ΑΚ < ΚΛ < ΑΛ + ΑΚ \text{ ή } R - \rho < ΚΛ < R + \rho,$$

όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Λ και ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Κ.

Άρα οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία. Το ένα είναι το Α και το άλλο είναι το Β, που είναι και το ζητούμενο σημείο.



13836.α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) ισχύει $\rho < R$.



Να αποδείξετε ότι $BD - AG < AB < AG + BD$.

(Μονάδες 10)

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 5 από το B του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;

(Μονάδες 15)

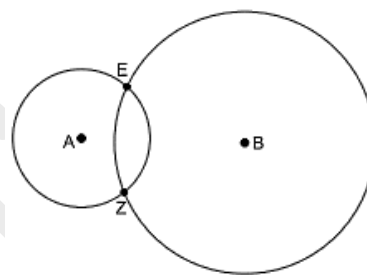
Λύση

α) Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι. Άρα ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το A, R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο B και δ η διάκεντρός τους. Όμως η διάκεντρος είναι η AB και επιπλέον ισχύουν $AG = \rho$ και $BD = R$. Επομένως $BD - AG < AB < BD + AG$.

β) Ο θησαυρός, επειδή απέχει 3 από το A και 5 από το B είναι σε σημείο του κύκλου με κέντρο το A και ακτίνα 3 και σε σημείο του κύκλου με κέντρο το B και ακτίνα 5.

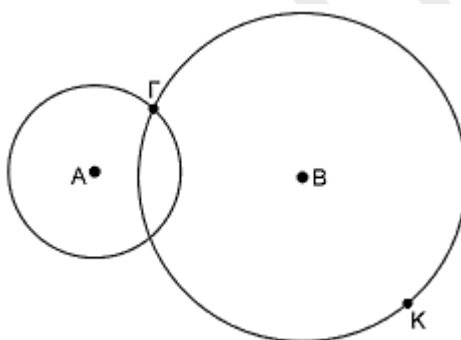
Σχεδιάζουμε δύο κύκλους (A, ρ) και (B, R) με $\rho = 3$ και $R = 5$. Τότε η $AB = 6$ είναι η διάκεντρος του κύκλου και ισχύει $R - \rho < AB < R + \rho$ γιατί αντικαθιστώντας έχουμε $5 - 3 < 6 < 5 + 3$, που είναι αληθές.

Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία τα E και Z. Αυτά τα σημεία έχουν την ιδιότητα να απέχουν 3 από το A και 5 από το B, άρα είναι τα σημεία που μπορεί να κρύβεται ο θησαυρός.



4^ο Θέμα

13823.α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$ και $AB = 6$.



i. Να αποδείξετε ότι $BK - AG < AB < BK + AG$.

ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα K και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το B.»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το A.»

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 16)

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 2 από το B του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;

(Μονάδες 9)

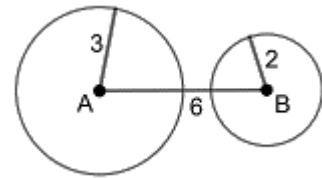
Λύση

α) i. Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι. Άρα ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το A, R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο B και δ η διάκεντρός τους. Όμως η διάκεντρος είναι η AB και επίσης $\rho = AG$ και $R = BK$. Επομένως $BK - AG < AB < BK + AG$.

ii. Το σημείο K έχει μόνο την ιδιότητα 1, γιατί είναι σημείο του κύκλου (B, R) και όχι του κύκλου (A, ρ). Το σημείο Γ έχει και τις δύο ιδιότητες γιατί είναι σημείο και των δύο κύκλων, δηλαδή απέχει ρ από το A και R από το B.

β) Έστω Α και Β τα δύο σημεία του χάρτη.

Σύμφωνα με την οδηγία το σημείο του θησαυρού ανήκει σε ένα κύκλο κέντρου Α και ακτίνας 3 και σε κύκλο κέντρου Β και ακτίνας 2. Επειδή απέχει 3 από το Α και 2 από το Β θα είναι το σημείο τομής των δύο αυτών κύκλων, αν υπάρχει. Όμως η απόσταση των σημείων Α και Β που είναι η διάκεντρος των κύκλων (Α,3) και (Β,2) είναι 6, δηλαδή είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων τους. Αυτό σημαίνει ότι οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και μάλιστα ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου. Συνεπώς η οδηγία δεν είναι σωστή, γιατί δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου (άρα και του χάρτη) για το οποίο να ισχύει αυτό που περιγράφει η οδηγία.



13846. Δίνεται το διπλανό σχήμα με τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) με $R > \rho$. Επίσης $AB = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι $R + \rho < 9$.

(Μονάδες 7)

β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΚΛΜ με ΚΛ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛΜ να είναι ίση με R. Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα.

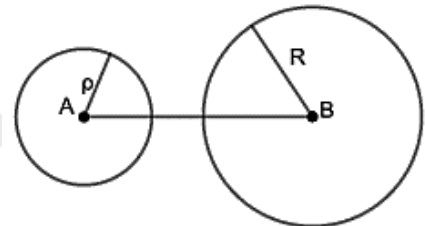
Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 που περιγράφονται παρακάτω;

Ι1: «Η απόσταση των σημείων από το Κ είναι ίση με ρ».

Ι2: «Η απόσταση των σημείων από το Μ είναι ίση με R».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

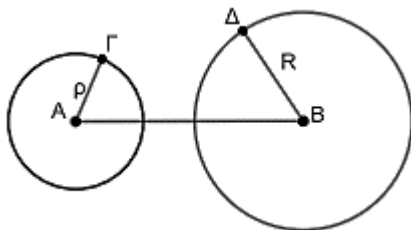
(Μονάδες 8)



Λύση

α) Οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και είναι ο ένας στο εξωτερικό του άλλου και η διάκεντρός τους είναι το ευθύγραμμο ΑΒ. Άρα ισχύει $R + \rho < AB$ ή $R + \rho < 9$.

β) Έστω Γ σημείο του κύκλου με κέντρο Α και ακτίνα ρ και Δ σημείο του κύκλου με κέντρο Β και ακτίνα R, όπως στο παρακάτω σχήμα. Με το διαβήτη «μεταφέρουμε» τα $AG = \rho$ και $BD = R$ έτσι ώστε να σχηματίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ και ΛΜ. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε και την ΚΜ.



Ισχύει ότι $LM > KL$, γιατί $R > \rho$. Άρα από την τριγωνική ανισότητα για το τρίγωνο ΚΛΜ έχουμε ότι $LM - KL < KM < LM + KL$ ή $R - \rho < KM < R + \rho$.

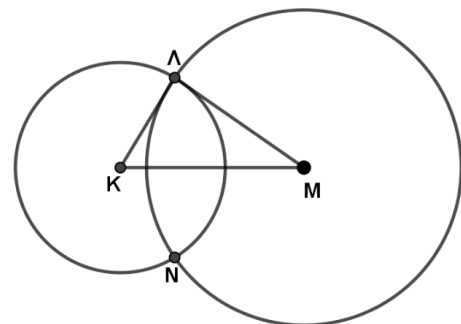
Όμως από το α) έχουμε ότι $R + \rho < 9$. Άρα $KM < 9$.

Δηλαδή η τρίτη πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από 9.

γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που έχουμε σχεδιάσει. Τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα Ι1 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Κ και ακτίνα ρ, ενώ τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα Ι2 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Μ και ακτίνα R.

Επομένως, τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 είναι εκείνα που βρίσκονται και στους δύο αυτούς κύκλους. Δηλαδή είναι τα κοινά σημεία των δύο κύκλων.

Όπως έχουμε αποδείξει στο προηγούμενο ερώτημα $R - \rho < KM < R + \rho$ όπου ΚΜ η διάμετρος των δύο κύκλων. Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι οπότε έχουν δύο σημεία τομής.



Άρα δύο σημεία είναι τα ζητούμενα σημεία τα Λ και N .

3^ο Θέμα

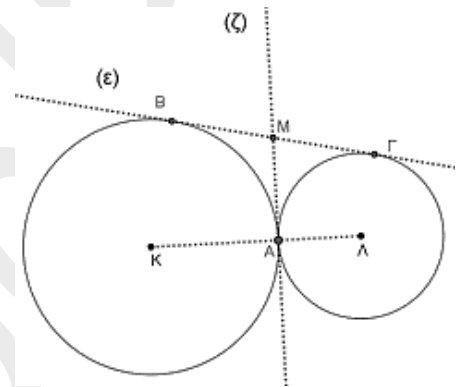
13702. Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A . Μια ευθεία (ϵ) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία B και Γ αντίστοιχα. Αν η εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους A τέμνει την ευθεία (ϵ) σε σημείο M , να αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία A , B και Γ ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 12)

β) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ εφάπτεται στη διάκεντρο $K\Lambda$ των κύκλων (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) . (Μονάδες 13)

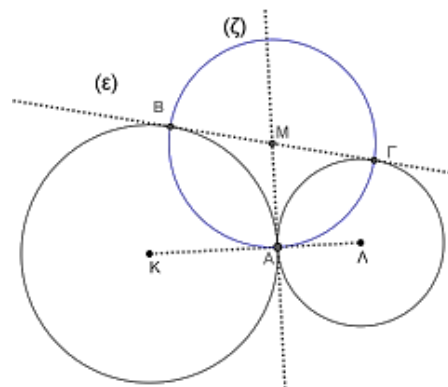
Λύση

Έστω οι κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A , (ϵ) η ευθεία η οποία εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους B και Γ αντίστοιχα, (ζ) η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους A και M το σημείο στο οποίο τέμνει την ευθεία (ϵ)



α) Το σημείο A είναι σημείο της διακέντρου $K\Lambda$ και τα B, Γ είναι σημεία επαφής της κοινής εξωτερικής εφαπτομένης των δυο κύκλων με αυτούς, οπότε τα τρία σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά. Άρα τα σημεία A, B και Γ θα είναι σημεία ενός μοναδικού κύκλου. Το σημείο M είναι εξωτερικό σημείο των κύκλων (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) ως σημείο τομής των κοινών εφαπτομένων τους από τα δεδομένα. Είναι $MB = MA$ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (K, ρ_1) από το σημείο M . Επίσης είναι $MA = M\Gamma$ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (Λ, ρ_2) από το σημείο M . Οπότε θα είναι $MB = MA = M\Gamma (= \kappa)$. Άρα ο κύκλος που ζητείται να κατασκευαστεί θα έχει κέντρο το σημείο M και ακτίνα ίση με κ .

β) Επειδή οι κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο A , η κοινή εφαπτομένη τους (ζ) είναι κάθετη στην ακτίνα KA και κάθετη στην ακτίνα LA αντίστοιχα. Και επειδή το σημείο A είναι σημείο της διακέντρου $K\Lambda$, η εφαπτομένη (ζ) των δυο κύκλων στο A θα είναι κάθετη στη διάκεντρο $K\Lambda$. Η ακτίνα $MA (= \kappa)$ του κύκλου που σχεδιάζεται με κέντρο το M έχει ως φορέα την εφαπτομένη (ζ) των δυο κύκλων στο σημείο επαφής τους A , οπότε η ακτίνα MA θα είναι κάθετη στη διάκεντρο $K\Lambda$. Άρα ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ θα εφάπτεται της διακέντρου $K\Lambda$ στο σημείο A .



Παραλληλία

2^ο Θέμα

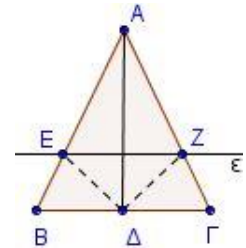
1544. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ και μια ευθεία (ϵ) παράλληλη προς τη $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\epsilon Z$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

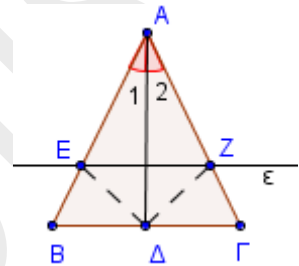
β) Τα τρίγωνα $A\epsilon\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Είναι $\angle AEZ = \angle B$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $EZ, B\Gamma$ που τέμνονται από την AB και $\angle AZE = \angle \Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $EZ, B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$. Όμως $\angle B = \angle \Gamma$ αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, άρα $\angle AEZ = \angle AZE$, οπότε το τρίγωνο $A\epsilon Z$ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές με βάση την EZ .



β) Τα τρίγωνα $A\epsilon\Delta$ και $AZ\Delta$ έχουν:

1) την πλευρά $A\Delta$ κοινή

2) $\angle A_1 = \angle A_2$ γιατί η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A και

3) $AE = AZ$ επειδή το τρίγωνο $A\epsilon Z$ είναι ισοσκελές με βάση την EZ .

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

1594. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε η διχοτόμος ΔE της γωνίας $\angle A\Delta B$ να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $\angle E\Delta B = \angle \Delta B\Gamma$ και $\angle E\Delta A = \hat{\Gamma}$.

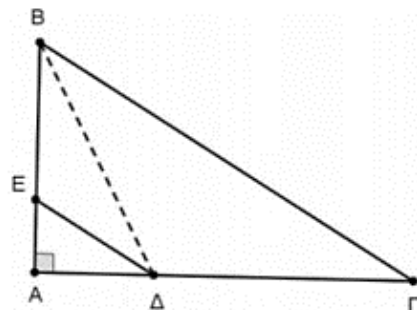
(Μονάδες 4 + 4)

ii) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

β) Αν $\angle A\Delta B = 60^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

(Μονάδες 9)



Λύση

α) i) Οι γωνίες $\angle E\Delta B, \angle \Delta B\Gamma$ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Delta E, B\Gamma$ που τέμνονται από την ΔB , οπότε είναι ίσες.

Οι γωνίες $\angle E\Delta A, \hat{\Gamma}$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\Delta E, B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$, οπότε είναι ίσες.

ii) Επειδή ΔE διχοτόμος της γωνίας $\angle A\Delta B$ είναι $\angle E\Delta A = \angle E\Delta B$, τότε λόγω του προηγούμενου σκέλους είναι και $\angle \Delta B\Gamma = \hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Είναι $\hat{\Gamma} = \angle E\Delta A = \frac{\angle A\Delta B}{2} = 30^\circ$

1595. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma\chi \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta A\Gamma$ είναι ίση με τη $\Gamma\Delta A$.

(Μονάδες 12)

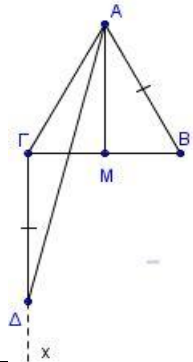
β) Να αποδείξετε ότι:

i) $\Gamma\Delta \parallel AM$

(Μονάδες 6)

ii) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.

(Μονάδες 7)

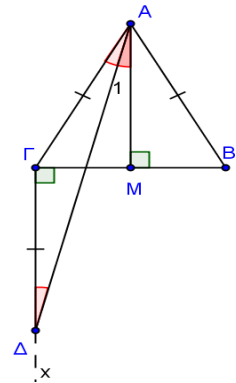


Λύση

α) Είναι $\Gamma\Delta = AB$ και $AB = A\Gamma$, άρα $\Gamma\Delta = A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Delta$, άρα έχει και $\Delta A\Gamma = \Gamma\Delta A$.

β) i) Η AM είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και ύψος του τριγώνου. Είναι $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ και $AM \perp B\Gamma$, άρα $\Gamma\Delta \parallel AM$.

ii) Είναι $\Gamma\Delta A = A_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Gamma\Delta$, AM που τέμνονται από την ΓB και $\Delta A\Gamma = \Gamma\Delta A$, άρα είναι και $\Delta A\Gamma = A_1$, δηλαδή η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.



1597. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και ΓA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $A\epsilon = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\epsilon$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) $\Delta\epsilon \parallel B\Gamma$

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\epsilon$ έχουν:

1) $A\Delta = AB$

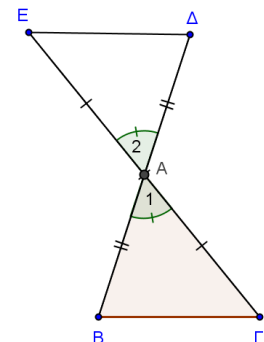
2) $A\epsilon = A\Gamma$

3) $A_1 = A_2$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\epsilon$ είναι ίσα, έχουμε και $\epsilon = \Gamma$.

Οι γωνίες αυτές όμως είναι εντός εναλλάξ των $\Delta\epsilon$, $B\Gamma$ που τέμνονται από την $E\Gamma$, άρα οι $\Delta\epsilon$, $B\Gamma$ είναι παράλληλες.



13534. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

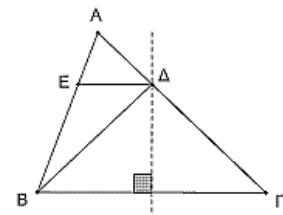
(Μονάδες 12)

β) η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$.

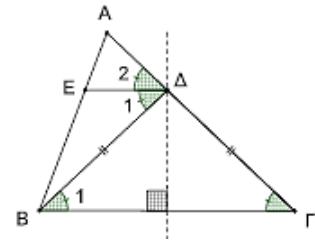
(Μονάδες 13)

Λύση

α) Το σημείο Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Gamma$, άρα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή $\Delta B = \Delta\Gamma$. Συνεπώς το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.



β) Είναι $E_1 = B_1$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την $B\Delta$ και $E_2 = \Gamma$ (2) ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$.
 Όμως $B_1 = \Gamma$ επειδή το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$,
 οπότε από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $E_1 = E_2$, επομένως η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$.



12710. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του BE . Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με υποτείνουσα τη $\Gamma\Delta$ έτσι, ώστε τα σημεία B και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

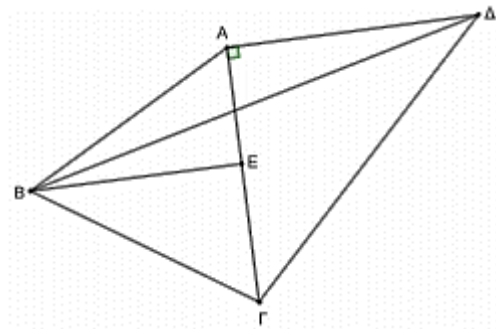
α) $BE \parallel A\Delta$.

(Μονάδες 10)

β) οι γωνίες $EB\Delta$ και $A\Delta B$ είναι ίσες.

(Μονάδες 7)

γ) το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οπότε η διχοτόμος BE είναι και ύψος, δηλαδή η BE είναι κάθετη στην $A\Gamma$. Το τρίγωνο $\Gamma A\Delta$ είναι ορθογώνιο στην κορυφή A , οπότε η $A\Delta$ είναι κάθετη στην $A\Gamma$. Τα ευθύγραμμα τμήματα BE και $A\Delta$ είναι κάθετα στην $A\Gamma$, οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλα.

β) Οι γωνίες $EB\Delta$ και $A\Delta B$ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων BE και $A\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$, άρα είναι ίσες.

γ) Από το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $AB = A\Gamma = B\Gamma$ και από το ισοσκελές τρίγωνο $\Gamma A\Delta$ έχουμε $A\Gamma = A\Delta$, οπότε $AB = A\Delta$, επομένως το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές.

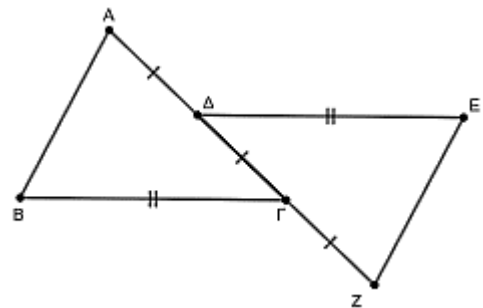
13748. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την $A\Gamma$ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β) $AB \parallel EZ$.

(Μονάδες 15)



Λύση

Για το τμήμα ΔZ έχουμε: $\Delta Z = \Delta\Gamma + \Gamma Z = 2\Delta\Gamma$.

Όμως το Δ είναι το μέσο του $A\Gamma$, άρα $2\Delta\Gamma = A\Gamma$, οπότε θα είναι $\Delta Z = A\Gamma$ (1).

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$ έχουν:

- $B\Gamma = \Delta E$, από την υπόθεση
- $A\Gamma = \Delta Z$, από τη σχέση (1)

- $\angle A\Gamma B = \angle Z\Delta E$, ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων $B\Gamma$ και ΔE που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$.

Άρα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες από το κριτήριο ΠΓΠ.

β) Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$, προκύπτει ότι $\angle B A \Gamma = \angle E Z \Delta$ γιατί είναι γωνίες που

βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $B\Gamma$ και $ΕΔ$ αντίστοιχα. Όμως, είναι γωνίες εντός εναλλάξ των AB και EZ που τέμνονται από την AZ , άρα $AB \parallel EZ$.

13752. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $ΑΓ$. Φέρουμε τμήμα $ΔΕ$ ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ και από το σημείο E φέρουμε τμήμα EZ ίσο και παράλληλο με την πλευρά AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

1. Οι γωνίες ΔEZ και $AB\Gamma$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.
2. Οπότε $\Delta EZ = AB\Gamma$.
3. Τα τρίγωνα ΔEZ και $AB\Gamma$ είναι ίσα.
4. Το τμήμα ΔZ είναι ίσο με το τμήμα $ΑΓ$.

(Μονάδες 08)

β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3.

(Μονάδες 10)

γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $B < 90^\circ$, να συγκρίνετε τα τμήματα $ΑΓ$ και ΔZ για τα διάφορα είδη της γωνίας B και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 07)

Λύση

α) 1. Σ 2. Λ 3. Λ 4. Λ

β) Η απάντηση στον συλλογισμό 2. είναι λάθος. Προεκτείνουμε την ZE και τη $B\Gamma$ και έστω H το σημείο τομής τους. Τότε:

$\angle ZED = \angle EHG$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες των παραλλήλων ΔE και BH που τέμνονται από την ZH .

$\angle EHG + \angle AB\Gamma = 180^\circ$ γιατί είναι γωνίες εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων AB και ZH που τέμνονται από την BH . Άρα $\angle ZED + \angle AB\Gamma = 180^\circ$, δηλαδή είναι παραπληρωματικές γωνίες και αφού $B < 90^\circ$ από την

υπόθεση, τότε $\angle ZED > 90^\circ$. Άρα δεν είναι ίσες.

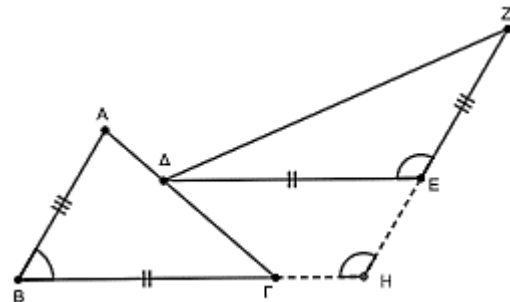
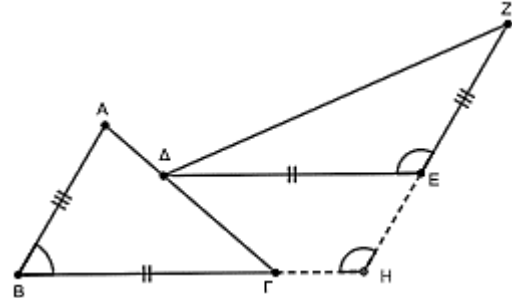
Η απάντηση στο συλλογισμό 3. είναι λάθος, γιατί τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία, τις ΔE , $B\Gamma$ και τις ZE , AB , αλλά οι περιεχόμενες γωνίες αυτών των πλευρών δεν είναι ίσες αλλά παραπληρωματικές, όπως δικαιολογήθηκε παραπάνω.

γ) Οι γωνίες $\angle ZED$ και $AB\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.

• Αν $AB\Gamma < 90^\circ$, τότε $\angle ZED > 90^\circ$ και τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές άνισες. Οπότε, θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες. Δηλαδή, αφού $AB\Gamma < \angle ZED$ τότε $ΑΓ < \Delta Z$.

• Αν $AB\Gamma > 90^\circ$, τότε $\angle ZED < 90^\circ$ και τα τρίγωνα όπως προηγουμένως θα έχουν τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες. Δηλαδή, αφού $AB\Gamma > \angle ZED$ τότε $ΑΓ > \Delta Z$.

• Αν $AB\Gamma = 90^\circ$, τότε $\angle ZED = 90^\circ$ και τα τρίγωνα είναι ορθογώνια με ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε θα είναι ίσα και συνεπώς θα έχουν ίσες και τις υποτείνουσες τους. Δηλαδή, αφού $AB\Gamma = \angle ZED$ τότε $ΑΓ = \Delta Z$. Άρα η μόνη περίπτωση στην οποία τα τμήμα ΔZ είναι ίσο με το τμήμα $ΑΓ$ είναι όταν οι γωνίες ΔEZ και $AB\Gamma$ είναι παραπληρωματικές και ίσες, δηλαδή ορθές.



4^ο Θέμα

1744. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τις διαμέσους BA και GE . Μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους BA και GE στα σημεία Θ και K αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ = \Gamma H$

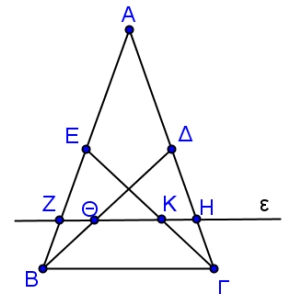
(Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) $ZK = H\Theta$.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Είναι $AZH = AB\Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ε , $B\Gamma$ που τέμνονται από την AB . Όμοια $AHZ = A\Gamma B$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ε , $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$. Όμως $AB\Gamma = A\Gamma B$ γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές άρα και $AHZ = AZH$, οπότε το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές και $AZ = AH$. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $AZ = AH$, είναι και $AB - AZ = A\Gamma - AH \Leftrightarrow BZ = \Gamma H$.

β) Αρχικά θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ για να βρούμε στοιχεία που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Αυτά έχουν:

1) $AB = A\Gamma$

2) $AE = A\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$ και

3) τη γωνία A κοινή

Λόγω του κριτηρίου ισότητας Π-Γ-Π, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $AB\Delta = A\Gamma E$.

Τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ έχουν:

1) $BZ = \Gamma H$

2) $AB\Delta = A\Gamma E$ και

3) $BZ\Theta = KH\Gamma$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών AHZ και AZH .

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ είναι ίσα.

γ) Είναι $ZK = Z\Theta + \Theta K = KH + \Theta K = H\Theta$. ($Z\Theta = HK$ από την ισότητα των τριγώνων $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$)

1809. Θεωρούμε κύκλο κέντρου O , με διάμετρο $B\Gamma$. Από σημείο A του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. Από τα σημεία B και Γ φέρουμε τα τμήματα BA και ΓE κάθετα στην ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι οι BA και ΓA είναι διχοτόμοι των γωνιών $\Delta B\Gamma$ και $E\Gamma B$.

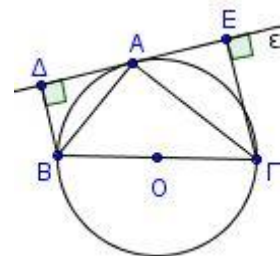
(Μονάδες 8)

β) Αν AZ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι: $A\Delta = AE = AZ$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι: $B\Delta + \Gamma E = B\Gamma$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή $OB = OA = OG = R$, τα τρίγωνα OAB και OAG είναι ισοσκελή, οπότε οι γωνίες που αντιστοιχούν στις βάσεις τους είναι ίσες. Δηλαδή $ABO = OAB$ και $OAG = AGO$.

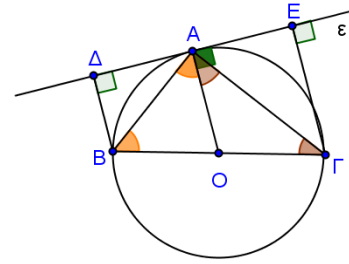
Επειδή $\Delta BA = OAB$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $B\Delta, OA$ που τέμνονται από την AB είναι και

$\Delta BA = ABO$, άρα η AB είναι

διχοτόμος της γωνίας $\Delta\text{Β}\Gamma$.

Επειδή $ΟΑΓ = ΑΓΕ$ ως εντός εναλλαξ των παραλλήλων $ΕΓ, ΟΑ$
που τέμνονται από την $ΑΓ$ είναι και

$\text{ΟΓΑ} = \text{ΑΓΕ}$, δηλαδή η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΕΓΒ.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle A\Delta B$ και $\triangle ABZ$ έχουν:

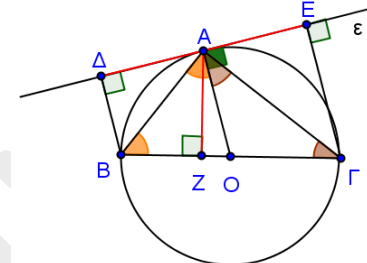
- 1) τη πλευρά AB κοινή και
- 2) $\angle B A = \angle B O$, άρα

τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $ΑΔ=ΑΖ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΓ και ΑΓΕ έχουν:

- 1) τη πλευρά ΑΓ κοινή και
- 2) ΟΓΑ = ΑΓΕ, άρα

τα τρίγωνα έχουν τις υποτεινουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα . Άρα έχουν και $AZ = AE$.



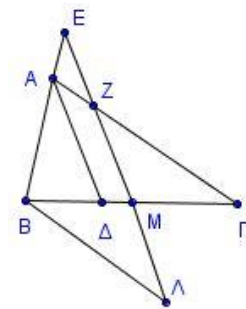
γ) Επειδή τα τρίγωνα $\triangle ADB$ και $\triangle AZB$ είναι ίσα, ισχύει ότι $BD = BZ$ και επειδή τα τρίγωνα

ΑΖΓ και ΑΓΕ είναι ίσα, ισχύει ότι $\Gamma\epsilon = \Gamma\zeta$. Είναι $\text{ΒΔ} + \overset{\text{ΒΔ}=\text{ΒΖ}}{\Gamma\epsilon} = \overset{\text{ΓΕ}=\text{ΖΓ}}{\text{ΒΖ}} + \text{ΖΓ} = \text{ΒΓ}.$

1818. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και ευθεία ε παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$.

Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην $ΑΔ$ η οποία τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο Z , την ευθεία ε στο σημείο Λ και την προέκταση της $ΒΑ$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή.



(Μονάδες 8)

β) $\mathbf{B}\Lambda = \Gamma\mathbf{Z}$.

(Μονάδες 9)

$\gamma)$ $\mathbf{AE} = \mathbf{A}\Gamma - \mathbf{B}\Lambda$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Είναι $\angle E = \angle B A \Delta$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A \Delta, E M$ που τέμνονται από την $B E$ και $\angle Z A = \angle A \Gamma$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A \Delta, E M$ που

τέμνονται από την ΑΓ. Επειδή $\text{ΒΑΔ} = \text{ΔΑΓ}$ γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, είναι και $\text{Ε} = \text{ΕΖΑ}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

Είναι $\angle EZA = \angle BAE$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $ΑΓ, ΒΔ$ που τέμνονται από την $ΕΑ$. Άρα $\angle E = \angle BAE$ και το τρίγωνο $ΒΑΕ$ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΒΜΛ και ΖΜΓ έχουν:

- 1) $BM = MF$
- 2) $ZMF = BM\Lambda$ ως κατακορυφήν και

3) $\angle \text{BM} = \angle \text{ZM}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\text{ΑΓ}, \text{ΒΛ}$ που τέμνονται από την ΒΓ . Σύμφωνα με το κριτήριο ΓΠΓ , τα τρίγωνα BMΛ και ZMΓ είναι ίσα. Άρα $\text{BL} = \text{ΖZ}$.

γ) Είναι $AE = AZ = A\Gamma - \Gamma Z = A\Gamma - B\Lambda$

1890. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.

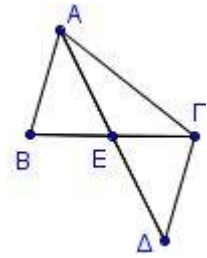
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ. (Μονάδες 5)

ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. (Μονάδες 5)

iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από το δρόμο ΑΔ. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ. (Μονάδες 7)



Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΕΔ έχουν:

1) $AE = ED$

2) $BE = EG$ και

3) $\angle AEB = \angle GED$ ως κατακορυφήν.

Με βάση το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $AB = GD$.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΕΔ είναι ίσα και οι γωνίες ΑΒΕ και ΕΓΔ είναι ίσες. Όμως οι γωνίες αυτές είναι και εντός εναλλάξ των ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.

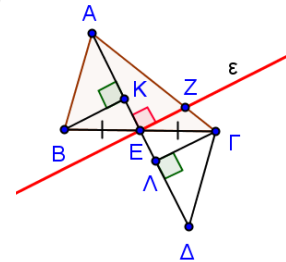
iii. Έστω ΒΚ, ΓΛ οι αποστάσεις των Β, Γ από την ΑΔ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΚ και ΓΛΕ έχουν:

1) $BE = EG$ και

2) $\angle AEB = \angle GED$ ως κατακορυφήν, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $BK = GL$.

β) Γνωρίζουμε ότι ένα σημείο ισαπέχει από δύο άλλα όταν βρίσκεται στη μεσοκάθετο του τμήματος που ορίζουν τα σημεία αυτά. Για το λόγο αυτό θεωρούμε τη μεσοκάθετο (ε) του ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Το Ζ είναι το ζητούμενο σημείο.



13822. Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ).

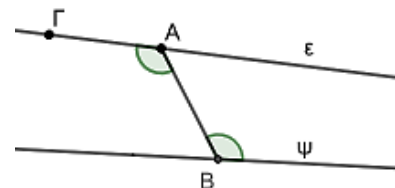
α) Αν η γωνία ΒΑΓ είναι μεγαλύτερη από την ΑΒψ :

i. Να αποδείξετε ότι $\angle BAE + \angle AB\psi < 180^\circ$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί; (Μονάδες 6)

β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών. (Μονάδες 7)

γ) Αν ισχύει $\angle BAG < \angle AB\psi$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί; (Μονάδες 6)



Λύση

α) i. Είναι $\angle BAE + \angle BAG = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAG = 180^\circ - \angle BAE$.

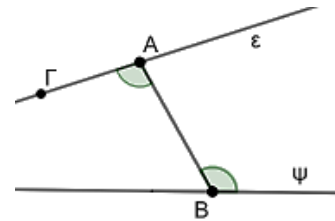
Είναι $\angle BAG > \angle AB\psi \Leftrightarrow 180^\circ - \angle BAE > \angle AB\psi \Leftrightarrow \angle BAE + \angle AB\psi < 180^\circ$

ii. Οι γωνίες ΒΑε και ΑΒψ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ε και ψ που τέμνονται από την ΑΒ και επειδή $\angle BAE + \angle AB\psi < 180^\circ$ οι ε και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΒ προς το μέρος

που βρίσκεται η $AB\psi$.

β) Στο α) αποδείξαμε ότι αν δύο ευθείες τεμνόμενες από άλλη ευθεία σχηματίζουν εντός και εναλλάξ γωνίες που δεν είναι ίσες, τότε οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την τέμνουσα προς το μέρος που βρίσκεται η μικρότερη από τις δύο εντός και εναλλάξ γωνίες.

γ) Οι γωνίες $BA\Gamma$ και $AB\psi$ είναι εντός και εναλλάξ των ευθειών ϵ και ψ με τέμνουσα την AB . Όμως δίνεται ότι $BA\Gamma < AB\psi$. Εφαρμόζοντας την πρόταση που διατυπώσαμε στο β) για τις γωνίες $BA\Gamma$ και $AB\psi$, οι ευθείες ϵ και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την AB προς το μέρος της $BA\Gamma$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



13843. Έστω ότι οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του AB . Να αποδείξετε ότι:

α) οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες.

(Μονάδες 4)

β) οι διχοτόμοι των γωνιών BAX και ABY τέμνονται σε σημείο M .

(Μονάδες 6)

γ) το σημείο M είναι το μέσο του ημικυκλίου AB .

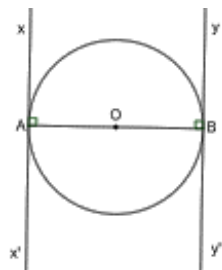
(Μονάδες 10)

δ) αν η διχοτόμος της γωνίας BAX τέμνει τον $y'y$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας ABY τέμνει την $x'x$ στο σημείο Δ , τότε $M\Gamma = M\Delta$.

(Μονάδες 5)

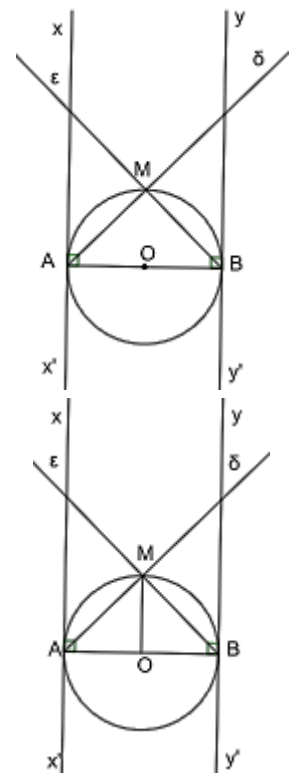
Λύση

α) Οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα της διαμέτρου του AB , επομένως, είναι κάθετες στην AB και συνεπώς είναι μεταξύ τους παράλληλες.



β) Έστω $A\delta$ και Be οι διχοτόμοι των γωνιών BAX και ABY αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται από τη διάμετρο AB . Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180° , οπότε η $A\delta$ και η Be θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας AB που βρίσκονται οι γωνίες.

Είναι $BA\delta + AB\epsilon = \frac{90^\circ}{2} + \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ < 180^\circ$, άρα οι $A\delta$ και Be τέμνονται σε σημείο M του ημιεπιπέδου στο οποίο βρίσκονται οι γωνίες.



γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε $BAM = BA\delta = 45^\circ$ και $ABM = AB\epsilon = 45^\circ$. Επομένως, το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με $MA = MB$. Άρα, το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετο της διαμέτρου AB . Το τρίγωνο AOM είναι ορθογώνιο διότι MO μεσοκάθετος της AB , οπότε $AOM = 90^\circ$.

Στο τρίγωνο AOM έχουμε $OAM = 45^\circ$, άρα $OMA = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ**2^ο Θέμα**

1541. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την πλευρά $A\Gamma$

στο σημείο Δ . Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = AB$

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $B\Delta A = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Delta E$ έχουν:

1) τη πλευρά $B\Delta$ κοινή και

2) $B_1 = B_2$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας B , άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BE = AB$.

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Delta$ έχουμε:

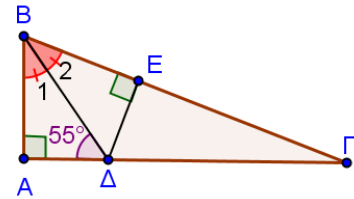
$$B\Delta A + B_1 = 90^\circ \Leftrightarrow 55^\circ + B_1 = 90^\circ \Leftrightarrow B_1 = 35^\circ = B_2 \Leftrightarrow \frac{B}{2} = 35^\circ \Leftrightarrow B = 70^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 20^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $\Gamma\Delta E$, έχουμε:

$$\Gamma\Delta E + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\Delta E = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ. \text{ Τέλος } E = 90^\circ.$$



1552. Ένας μαθητής της Α' Λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $\chi O\psi$. Στη συνέχεια με κέντρο τη κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δύο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές $O\chi$ και $O\psi$ της γωνίας στα σημεία A και B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ , Δ . Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

(Μονάδες 25)

Λύση

Επειδή $OA = OB$ γιατί είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου, το τρίγωνο

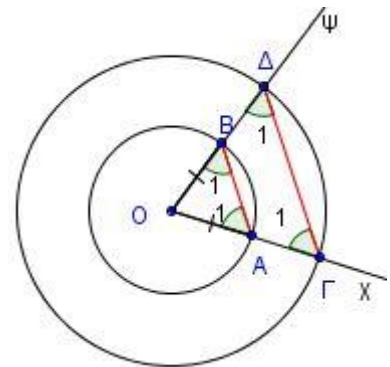
OAB είναι ισοσκελές με βάση την AB , άρα $A_1 = B_1$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου OAB , έχουμε:

$$O + A_1 + B_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 2B_1 = 180^\circ - O \Leftrightarrow B_1 = \frac{180^\circ - O}{2} \quad (1)$$

Επειδή $OG = OD$ γιατί είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου, το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $\Gamma\Delta$, άρα $\Gamma_1 = \Delta_1$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $O\Gamma\Delta$, έχουμε:

$$O + \Gamma_1 + \Delta_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 = 180^\circ - O \Leftrightarrow \Delta_1 = \frac{180^\circ - O}{2} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $B_1 = \Delta_1$. Οι γωνίες αυτές όμως είναι και εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την OD , άρα οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες.



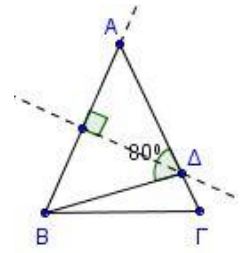
1554. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο $\widehat{A_{εξ}} = 2\widehat{AB\Gamma}$. Φέρουμε τη μεσοκάθετο της πλευράς AB , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο Δ και σχηματίζεται γωνία $\widehat{A\Delta B}$ ίση με 80° .

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή $\widehat{A_{εξ}} = \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$. Όμως $\widehat{A_{εξ}} = 2\widehat{B}$, άρα $2\widehat{B} = \widehat{B} + \widehat{\Gamma} \Leftrightarrow 2\widehat{B} - \widehat{B} = \widehat{\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, δηλαδή $AB = A\Gamma$.

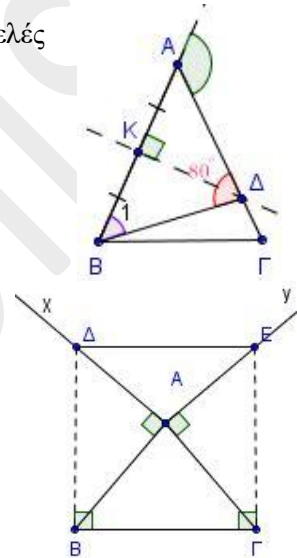
β) Στο τρίγωνο $A\Delta B$ η ΔK είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την AB , οπότε $\widehat{A} = \widehat{B_1}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta B$, έχουμε:

$$\widehat{A\Delta B} + \widehat{A} + \widehat{B_1} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 2\widehat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A} = 100^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} = 50^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 2\widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{B} = 130^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 65^\circ = \widehat{\Gamma}$$



1556. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$.

Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

(Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε

τις γωνίες του τριγώνου $\Delta A E$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A E \Gamma$ έχουν:

1) $AB = A\Gamma$ και

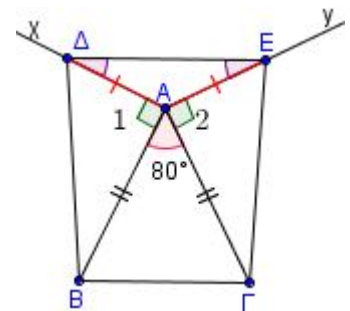
2) $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A E \Gamma} = 90^\circ$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Delta = \Gamma E$.

β) Είναι $\widehat{\Delta A E} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Επειδή $A\Delta = A E$, το τρίγωνο $\Delta A E$ είναι ισοσκελές με βάση την ΔE , άρα

$\widehat{\Delta} = \widehat{E}$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\Delta A E$ έχουμε:

$$\widehat{E} + \widehat{\Delta} + \widehat{\Delta A E} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{E} + 100^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{E} = 80^\circ \Leftrightarrow \widehat{E} = 40^\circ = \widehat{\Delta}$$



1572. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημεία Δ και E στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Έστω $\Delta Z \perp AB$ και $E H \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $BZ = \Gamma H$.

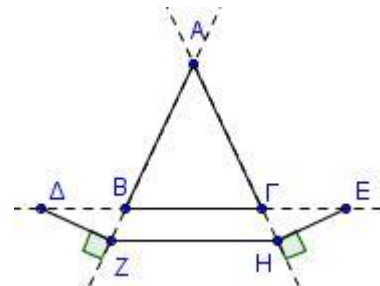
(Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο $\Delta Z H$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\widehat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Delta Z H$.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔBZ και $E\Gamma H$ έχουν:

1) $B\Delta = \Gamma E$ και

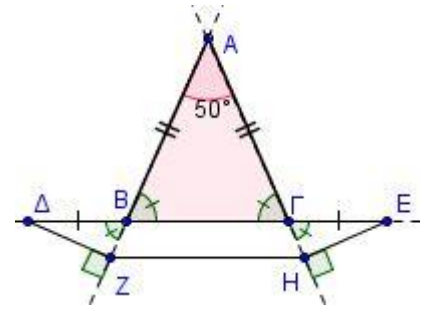
2) $\Delta BZ = E\Gamma H$ γιατί είναι κατακορυφήν των ίσων

γωνιών B και Γ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BZ = \Gamma H$.

ii. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $BZ = \Gamma H$, είναι και

$AB + BZ = A\Gamma + \Gamma H \Leftrightarrow AZ = AH$, άρα το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.



β) Επειδή το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές με βάση τη ZH , είναι $Z = H$.

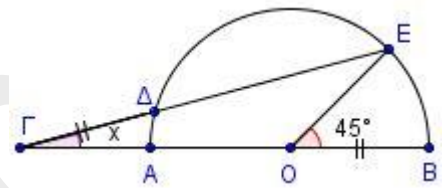
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AZH έχουμε:

$$A + Z + H = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 2Z = 180^\circ \Leftrightarrow 2Z = 130^\circ \Leftrightarrow Z = 65^\circ = H$$

1576. Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma\Delta$ ισούται με το OB και $\angle BOE = 45^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\angle \Gamma O = x$.

(Μονάδες 25)

Λύση



Έστω ρ η ακτίνα του ημικυκλίου. Τότε

$$OA = OB = OE = \Gamma\Delta = O\Delta = \rho.$$

Επειδή $\Gamma\Delta = O\Delta = \rho$, το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με

βάση την $O\Gamma$, άρα $\angle O\Delta A = \Gamma = x$.

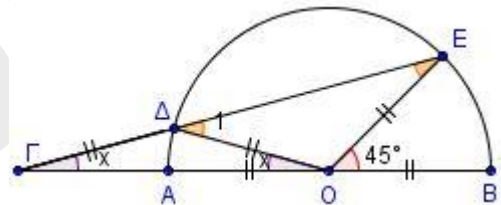
Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο $O\Gamma\Delta$, άρα

$$\Delta_1 = \angle O\Delta A + \Gamma = 2x.$$

Επειδή $OE = O\Delta = \rho$, το τρίγωνο $O\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την ΔE , οπότε $\angle E = \Delta_1 = 2x$.

Η γωνία $\angle BOE$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\Gamma O E$, άρα

$$\angle BOE = \angle E + \Gamma \Leftrightarrow 45^\circ = 2x + x \Leftrightarrow 3x = 45^\circ \Leftrightarrow x = 15^\circ$$



1590. Δίνεται ευθεία ϵ του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ϵ . Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$, τότε:

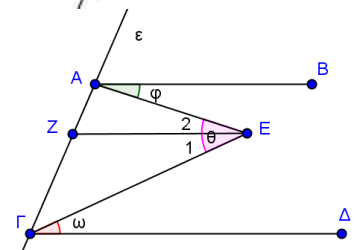
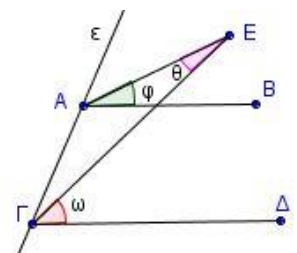
$$\omega = \phi + \theta.$$

(Μονάδες 10)

β) Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$,

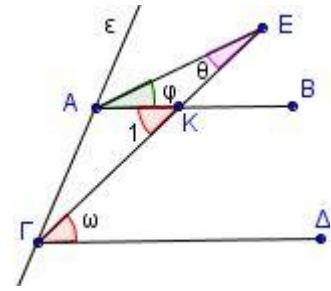
τότε να αποδείξετε ότι $\theta = \phi + \omega$.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Έστω K το σημείο τομής των $ΕΓ$, $ΑΒ$. Είναι $K_1 = \omega$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΑΒ$, $ΓΔ$ που τέμνονται από την $ΕΓ$. Η γωνία K_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΑΚΕ$, άρα
 $K_1 = \hat{\theta} + \varphi \Leftrightarrow \omega = \hat{\theta} + \varphi$



β) Έστω τώρα ότι το E βρίσκεται ανάμεσα στα τμήματα $ΑΒ$ και $ΓΔ$. Τότε $\omega = \hat{\theta}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΕΖ$, $ΓΔ$ που τέμνονται από την $ΕΓ$ και $\varphi = \hat{\theta}_2$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΑΒ$, $ΕΖ$ που τέμνονται από την $ΑΕ$. Είναι $\varphi + \omega = \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}$.

1593. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) με $A = 80^\circ$. Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας A , τέτοιο, ώστε $ΚΒ = ΚΑ = ΚΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΒΚΑ$ και $ΓΚΑ$ είναι ίσα.

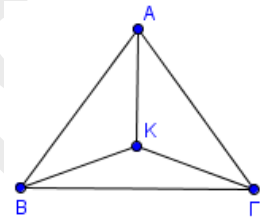
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $ΑΒΚ$ και $ΑΓΚ$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $ΒΚΓ$.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Τα τρίγωνα $ΒΚΑ$ και $ΓΚΑ$ είναι ίσα επειδή έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία:

$ΚΑ$ κοινή, $ΒΚ = ΚΓ$ και $ΑΒ = ΑΓ$

β) Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με βάση τη $ΒΓ$, είναι $B = Γ$.

Επειδή η $ΑΚ$ είναι διχοτόμος της γωνίας A , είναι $ΒΑΚ = ΚΑΓ = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$.

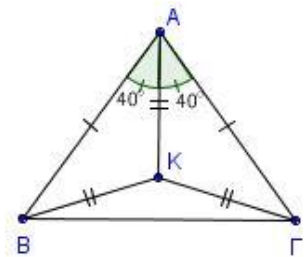
Επειδή $ΚΒ = ΚΑ = ΚΓ$, τα τρίγωνα $ΑΒΚ$ και $ΑΓΚ$ είναι ισοσκελή με βάσεις τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Άρα $ΑΒΚ = ΒΑΚ = 40^\circ$ και $ΚΓΑ = ΚΑΓ = 40^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $ΑΒΚ$ έχουμε:

$$ΑΚΒ + ΑΒΚ + ΒΑΚ = 180^\circ \Leftrightarrow ΑΚΒ + 2 \cdot 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow ΑΚΒ = 100^\circ$$

Όμοια στο τρίγωνο $ΑΓΚ$ προκύπτει ότι $ΑΚΓ = 100^\circ$.

γ) Είναι $ΒΚΓ = 360^\circ - ΑΚΒ - ΑΚΓ = 360^\circ - 100^\circ - 100^\circ = 160^\circ$



1596. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ$. Έστω $Αχ$ η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $Α_{εξ} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην $Αχ$, η οποία τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΒ\Delta = 60^\circ$

(Μονάδες 5)

ii. το τρίγωνο $ΑΒ\Delta$ είναι ισόπλευρο.

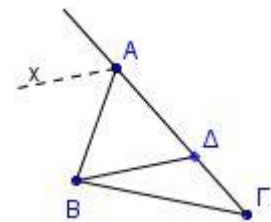
(Μονάδες 5)

iii. $\Delta\Gamma = ΑΓ - ΑΒ$

(Μονάδες 5)

β) Αν η γωνία $Β\Delta\Delta$ είναι διπλάσια της Γ του τριγώνου $ΑΒΓ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $Β\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 10)



Λύση

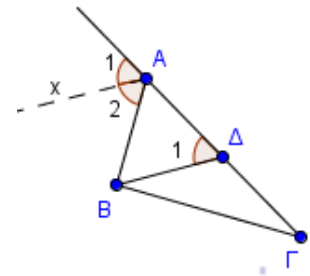
α) i) $ΑΒ\Delta = A_2 = \frac{A_{εξ}}{2} = 60^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $Αχ$, $Β\Delta$ που τέμνονται από την $ΑΒ$.

ii) Είναι $\Delta_1 = A_1 = \frac{A_{εξ}}{2} = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Αx, ΒΔ που τέμνονται από την ΑΔ.
Στο τρίγωνο ΑΒΔ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60° , άρα και η τρίτη του γωνία θα είναι 60° και το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

iii) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι: $AB = AD = BD$.
Είναι $\Delta\Gamma = A\Gamma - AD = A\Gamma - AB$

β) Είναι $B\Delta A = 60^\circ$ και $B\Delta A = 2\Gamma \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ$.

$B\Delta\Gamma = 180^\circ - B\Delta A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ και από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΔΓ, έχουμε: $\Delta B\Gamma + \Gamma + B\Delta\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta B\Gamma + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta B\Gamma = 30^\circ$.



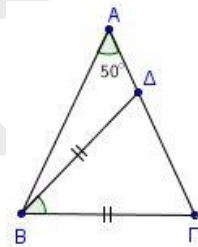
1602. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) με $A = 50^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο, ώστε $B\Delta = B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta B\Gamma = A$.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, ισχύει ότι: $B = \Gamma$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 130^\circ \Leftrightarrow B = 65^\circ = \Gamma$$

β) Επειδή $B\Delta = B\Gamma$, το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΓ, άρα $B\Delta\Gamma = \Gamma = 65^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΒΓ έχουμε:

$$\Delta B\Gamma + B\Delta\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta B\Gamma + 65^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta B\Gamma = 50^\circ = A$$

1603. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) με $\Gamma = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ και $DE \perp B\Gamma$.

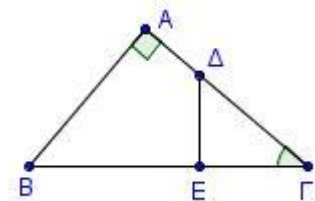
Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

(Μονάδες 10)

β) τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΔΕΒ.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Επειδή $\Delta\hat{E}\Gamma = 90^\circ$, από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΔΕΓ, έχουμε:

$$E\Delta\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow E\Delta\Gamma + 40^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow E\Delta\Gamma = 50^\circ.$$

β) Αρχικά είναι $A = E = 90^\circ$.

$$A\Delta E + E\Delta\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A\Delta E + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A\Delta E = 130^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow B + 40^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B = 50^\circ$$

1604. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $A = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο, ώστε $B\Delta = AB$. Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) τη γωνία $\Delta A\Gamma$.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, ισχύει ότι:

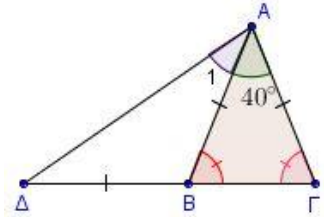
$B = \Gamma$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 140^\circ \Leftrightarrow B = 70^\circ = \Gamma$$

β) Επειδή $B\Delta = AB$, το τρίγωνο $B\Delta A$ είναι ισοσκελές με βάση

την $A\Delta$, άρα $\Delta = A_1$. Η γωνία B του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $B\Delta A$, άρα

$$B = \Delta + A_1 \Leftrightarrow 70^\circ = 2\Delta \Leftrightarrow \Delta = 35^\circ = A_1. \text{ Είναι } \Delta A\Gamma = A + A_1 = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$$



1607. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$

και $BA\Gamma = 40^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $AB\Delta = A\Gamma E = 110^\circ$.

(Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Το τρίγωνο $\Delta A E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Επειδή $AB = A\Gamma$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$ και έχει $B = \Gamma$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 140^\circ \Leftrightarrow B = 70^\circ = \Gamma$$

Οι γωνίες $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών B και Γ , άρα

$$AB\Delta = A\Gamma E = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

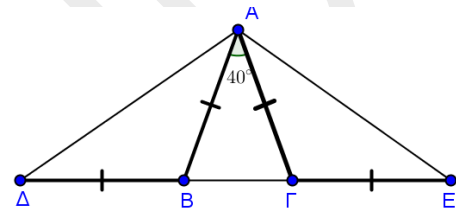
1) $\Delta B = \Gamma E$

2) $BA = A\Gamma$ και

3) $AB\Delta = A\Gamma E = 110^\circ$

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα έχουν και $A\Delta = AE$, οπότε το τρίγωνο $\Delta A E$ είναι ισοσκελές.



1623. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 80^\circ$, $B = 20^\circ + \Gamma$ και έστω $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ .

(Μονάδες 12)

β) Φέρνουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

Να υπολογίσετε τις γωνίες $\Delta A E$ και $E\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 13)

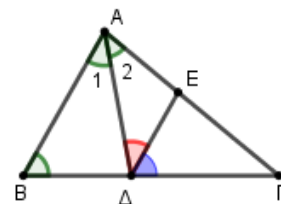
Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 20^\circ + \Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$2\Gamma = 80^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 40^\circ \text{ και } B = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$$

β) Είναι $A_1 = A_2 = \frac{A}{2} = 40^\circ$



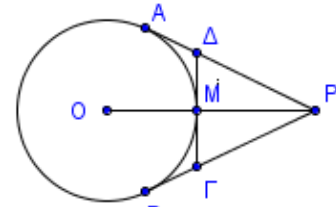
Είναι $\angle A = \angle A_2 = 40^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE , AB που τέμνονται από την AD και $\angle \Delta \Gamma = \angle B = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την $B\Gamma$.
 $\angle E\Gamma = 180^\circ - \angle A\Gamma = 80^\circ$.

1636. Δίνεται κύκλος κέντρου O και από ένα σημείο P εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Το τμήμα PO τέμνει τον κύκλο στο M και η εφαπτομένη του κύκλου στο M τέμνει τα PA και PB στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $P\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\angle APB = 40^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία AOB . (Μονάδες 12)

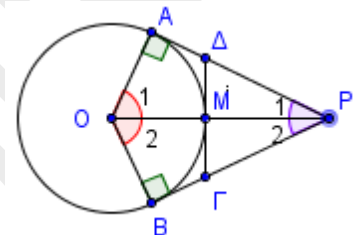


Λύση

α) Επειδή η OM είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων.

Στο τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ η PM είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



β) Επειδή τα OA και OB είναι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής, είναι κάθετες στις εφαπτομένες. Από το άθροισμα γωνιών

του ορθογώνιου τριγώνου OAP έχουμε: $O_1 + P_1 = 90^\circ \Leftrightarrow O_1 + 20^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow O_1 = 70^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου OBP έχουμε:

$O_2 + P_2 = 90^\circ \Leftrightarrow O_2 + 20^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow O_2 = 70^\circ$. Είναι $\angle AOB = O_1 + O_2 = 140^\circ$.

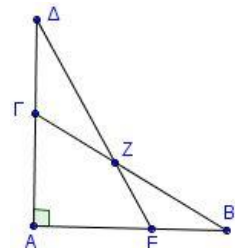
1639. Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ (γωνία A ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει $\angle B = \angle \Delta = 30^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου $A\epsilon Z\Gamma$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Gamma Z\Delta$ και EBZ είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\angle B + \angle \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \angle \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \Gamma = 60^\circ.$$

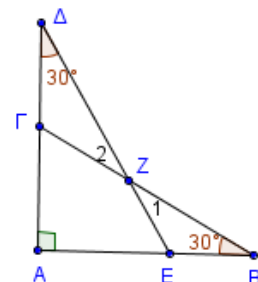
Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου $A\Delta E$, έχουμε:

$$\angle \Delta + \angle \Delta E = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \angle \Delta E = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \Delta E = 60^\circ.$$

Η γωνία $\angle \Delta E\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο EZB , άρα

$$\angle E = \angle Z_1 + \angle B \Leftrightarrow 60^\circ = \angle Z_1 + 30^\circ \Leftrightarrow \angle Z_1 = 30^\circ.$$

$$\text{Είναι } \angle \Gamma ZE = 180^\circ - \angle Z_1 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$



β) Επειδή $\angle Z_1 = \angle B = 30^\circ$, το τρίγωνο EBZ είναι ισοσκελές.

Είναι $\angle Z_2 = \angle Z_1 = 30^\circ$ ως κατακορυφήν, άρα $\angle Z_2 = \angle \Delta$, οπότε το τρίγωνο $\Gamma Z\Delta$ είναι ισοσκελές.

1640. Στο διπλανό σχήμα, οι $ΑΔ$, $ΒΕ$ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν

$ΑΔ = ΑΖ$, $ΒΕ = ΒΖ$ και $Α = 70^\circ$.

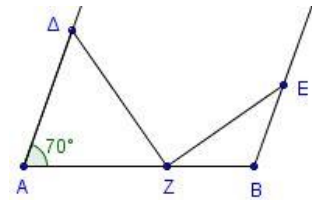
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων

$ΑΔΖ$ και $ΒΖΕ$.

(Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $ΔΖΕ = 90^\circ$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή $ΑΔ = ΑΖ$, το τρίγωνο $ΑΔΖ$ είναι ισοσκελές με βάση την $ΔΖ$, άρα $Δ = Ζ_1$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $ΑΔΖ$, έχουμε:

$$Α + Δ + Ζ_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 2Δ = 180^\circ \Leftrightarrow 2Δ = 110^\circ \Leftrightarrow Δ = 55^\circ = Ζ_1$$

Οι γωνίες $Α$ και $Β$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $ΑΔ$, $ΒΕ$ που τέμνονται από την $ΑΒ$, οπότε είναι παραπληρωματικές,

δηλαδή $Α + Β = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + Β = 180^\circ \Leftrightarrow Β = 110^\circ$

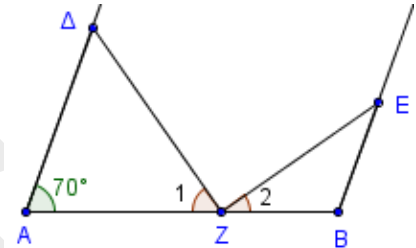
Επειδή $ΒΕ = ΒΖ$, το τρίγωνο $ΒΕΖ$ είναι ισοσκελές με βάση την $ΕΖ$,

άρα $Ζ_2 = Ε$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $ΒΕΖ$ έχουμε:

$$Β + Ζ_2 + Ε = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + 2Ε = 180^\circ \Leftrightarrow 2Ε = 70^\circ \Leftrightarrow Ε = 35^\circ = Ζ_2$$

β) Είναι $ΔΖΕ = 180^\circ - Ζ_1 - Ζ_2 = 180^\circ - 55^\circ - 35^\circ = 90^\circ$



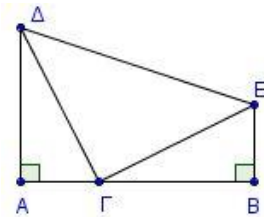
1641. Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $Α, Β$ είναι ορθές και επιπλέον $ΑΔ = ΒΓ$ και $ΑΓ = ΒΕ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $ΑΓΔ$ και $ΒΓΕ$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Αν $ΕΓΒ = 40^\circ$, τότε το τρίγωνο $ΔΓΕ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΓΔ$ και $ΒΓΕ$ έχουν:

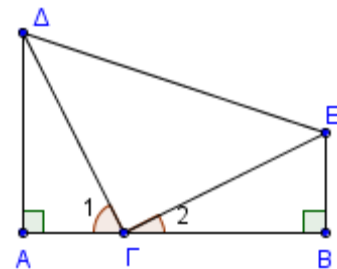
1) $ΑΔ = ΒΓ$ και 2) $ΑΓ = ΒΕ$, οπότε έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες και είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα $ΑΓΔ$ και $ΒΓΕ$ είναι ίσα, είναι και $ΔΓ = ΓΕ$, οπότε το τρίγωνο $ΔΓΕ$ είναι ισοσκελές. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $ΒΓΕ$ έχουμε:

$$ΕΓΒ + Ε = 90^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + Ε = 90^\circ \Leftrightarrow Ε = 50^\circ$$

Επειδή τα τρίγωνα $ΑΓΔ$ και $ΒΓΕ$ είναι ίσα, είναι και $Γ_1 = Ε = 50^\circ$.

Είναι $ΔΓΕ = 180^\circ - Γ_1 - ΕΓΒ = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο $ΔΓΕ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



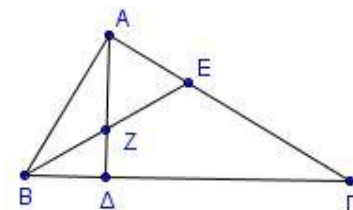
1645. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύουν $Α + Γ = 2Β$ και $Α = 3Γ$.

α) Να αποδείξετε ότι $Β = 60^\circ$.

(Μονάδες 10)

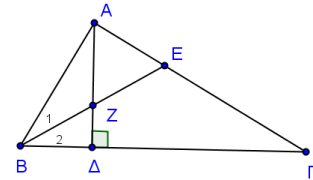
β) Αν το ύψος $ΑΔ$ και η διχοτόμος $ΒΕ$ τέμνονται στο σημείο $Ζ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΖΕ$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 15)



Λύση

- α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε: $A + B + \Gamma = 180^\circ$,
όμως $A + \Gamma = 2B$, άρα $2B + B = 180^\circ \Leftrightarrow 3B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 60^\circ$.



- β) Επειδή $B = 60^\circ$ είναι $A + \Gamma = 2B = 120^\circ$. Όμως $A = 3\Gamma$, άρα
 $3\Gamma + \Gamma = 120^\circ \Leftrightarrow 4\Gamma = 120^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ$. Τότε

$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A + 60^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 90^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE από το άθροισμα γωνιών του έχουμε:

$$B + \angle AEB = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{B}{2} + \angle AEB = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \angle AEB = 90^\circ \Leftrightarrow \angle AEB = 60^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AD\Gamma$ έχουμε:

$$\angle A\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \angle A\Gamma + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \angle A\Gamma = 60^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AZE έχουμε:

$$\angle AEB + \angle A\Gamma + \angle AZE = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 60^\circ + \angle AZE = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AZE = 60^\circ$$

Το τρίγωνο AZE έχει τις γωνίες του ίσες είναι ισόπλευρο.

- 1661.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του AD τέτοια, ώστε
 $BA\Delta = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε $AD = AE$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

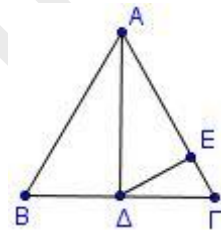
(Μονάδες 8)

- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ADE .

(Μονάδες 9)

- γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 8)



Λύση

- α) Επειδή $AB = A\Gamma$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. Η διάμεσος AD είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Επειδή η AD είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι $\angle A\Gamma = \angle BAA = 30^\circ$, επομένως $A = 60^\circ$.

Επειδή το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει μια γωνία του ίση με 60° , είναι ισόπλευρο.

- β) Επειδή $AD = AE$ το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές με βάση τη DE , άρα $\angle ADE = \angle AED$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ADE , έχουμε:

$$\angle A\Gamma + \angle ADE + \angle AED = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 2\angle ADE = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle ADE = 150^\circ \Leftrightarrow \angle ADE = 75^\circ = \angle AED$$

- γ) $\angle E\Delta\Gamma = \angle A\Delta\Gamma - \angle ADE = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

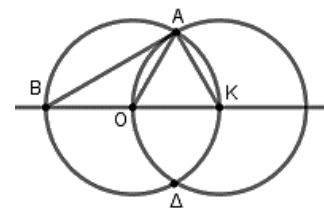
- 1673.** Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ .

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 10)

- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK .

(Μονάδες 15)



Λύση

- α) Είναι $OA = KA = OK = \rho$, οπότε το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.

- β) Επειδή το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο είναι $\angle AOK = 60^\circ$.

Το τρίγωνο BOA είναι ισοσκελές με βάση την AB αφού $OA = \rho$, οπότε $\angle ABO = \angle OAB$.

Στο τρίγωνο BOA η γωνία AOK είναι εξωτερική, οπότε

$$AOK = ABO + OAB \Leftrightarrow 60^\circ = 2OAB \Leftrightarrow OAB = 30^\circ. \text{ Είναι } BAK = OAB + OAK = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

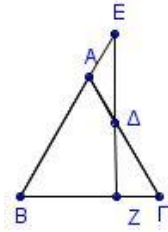
1689. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε $AE = AD$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

(Μονάδες 10)

β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ (προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ.

(Μονάδες 15)



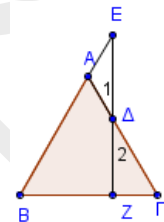
Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του είναι ίσες με 60° . Άρα $\angle ADE = 180^\circ - A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ, έχει $\Delta_1 = E$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:

$$\Delta_1 + E + \angle ADE = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 = 60^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 30^\circ = E$$

β) Είναι $\Delta_2 = \Delta_1 = 30^\circ$ ως κατακορυφήν και $\Gamma = 60^\circ$, οπότε από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΖΓ προκύπτει ότι $\angle Z\Gamma = 90^\circ$, άρα $EZ \perp B\Gamma$.



1693. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο

Δ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΕ.

(Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία Β είναι 20° μεγαλύτερη από τη γωνία Γ, να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Είναι $AG \perp AB$ και $AB \parallel DE$, άρα είναι και $AG \perp DE$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο.

β) Επειδή $A_1 = \frac{A}{2} = 45^\circ$, από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου

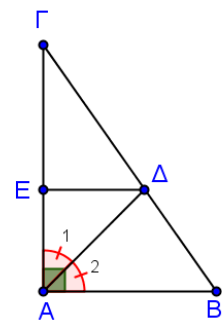
ΑΔΕ προκύπτει ότι $\angle ADE = 45^\circ$.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ, έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ, \text{ όμως } B = \Gamma + 20^\circ, \text{ άρα } \Gamma + 20^\circ + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma = 70^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 35^\circ$$

και $B = 55^\circ$.

Είναι $\angle E\Delta\Gamma = B = 55^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΒΓ.



1699. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$.

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

(Μονάδες 13)

β) Αν $A = 75^\circ + B$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 12)

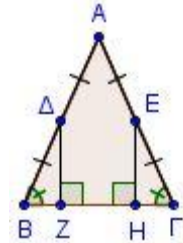
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΗΓ έχουν:

1) $\Delta B = E\Gamma$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ και

2) $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη τους πλευρά ίση και μια οξεία γωνία τους ίση, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta Z = E\Gamma$. δηλαδή τα Δ και Ε ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.



β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 75^\circ + B + B + B = 180^\circ \Leftrightarrow 3B = 105^\circ \Leftrightarrow B = 35^\circ = \Gamma \text{ και}$$

$$A = 75^\circ + 35^\circ = 110^\circ.$$

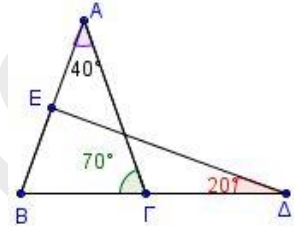
1700. Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + B + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 70^\circ$$

Επειδή $B = 70^\circ = \Gamma$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΕΔ έχουμε:

$$B + E + D = 180^\circ \Leftrightarrow B + 70^\circ + 20^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 90^\circ, \text{ άρα και } AED = 90^\circ.$$

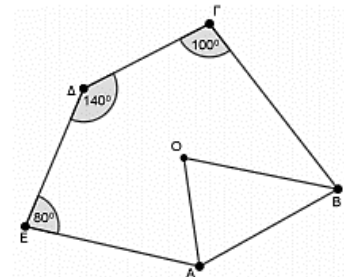
12640. Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100° , η γωνία του Δ ισούται με 140° και η γωνία του Ε ισούται με 80° τότε, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του αθροίσματος $A + B$.

(Μονάδες 12)

β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με n πλευρές είναι $2 \cdot n - 4$ ορθές. Έτσι για το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$$A + B + \Gamma + \Delta + E = (2 \cdot 5 - 4)90^\circ = 540^\circ \Leftrightarrow A + B + 100^\circ + 140^\circ + 80^\circ = 540^\circ \Leftrightarrow A + B = 540^\circ - 320^\circ = 220^\circ$$

β) Στο τρίγωνο ΟΑΒ είναι

$$AOB + OAB + OBA = 180^\circ \Leftrightarrow AOB + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow AOB + \frac{A+B}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$AOB + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow AOB = 70^\circ$$

12644. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110° . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:

α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.

(Μονάδες 9)

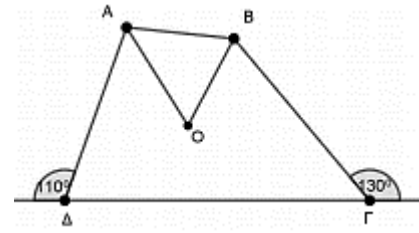
β) το μέτρο του αθροίσματος Α + Β.

(Μονάδες 9)

γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

(Μονάδες 7)

Λύση



α) Είναι $\Gamma = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ και $\Delta = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

β) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές είναι $2 \cdot \nu - 4$ ορθές. Έτσι για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$$A + B + \Gamma + \Delta = 360^\circ \Leftrightarrow A + B + 50^\circ + 70^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow A + B = 240^\circ$$

γ) Στο τρίγωνο ΟΑΒ είναι

$$AOB + OAB + OBA = 180^\circ \Leftrightarrow AOB + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow AOB + \frac{A+B}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$AOB + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow AOB = 60^\circ$$

12704. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B = 70^\circ$ και $\Gamma_{\text{εξωτ}} = 140^\circ$.

Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε $AD = AB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\angle BAD = 40^\circ$.

(Μονάδες 9)

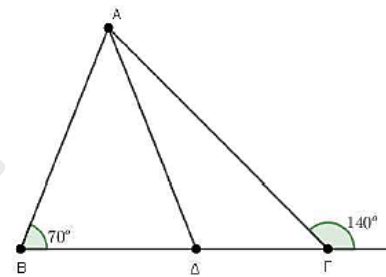
β) $\angle AD\Gamma = 110^\circ$.

(Μονάδες 7)

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

Λύση



α) Επειδή $AD = AB$ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε $\angle ADB = B = 70^\circ$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές του.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ έχουμε:

$$\angle BAD + \angle ADB + B = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAD + 70^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAD = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

β) Είναι $\angle AD\Gamma + \angle ADB = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AD\Gamma = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

γ) Είναι $\angle A\Gamma B + \Gamma_{\text{εξωτ}} = 180^\circ \Leftrightarrow \angle A\Gamma B = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A + 70^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

Επειδή $A = B = 70^\circ$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

13442. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$. Στην πλευρά του ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $BD = \Delta\Gamma$ και $AD = A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\angle AD\Gamma = 45^\circ$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία Β.

(Μονάδες 13)



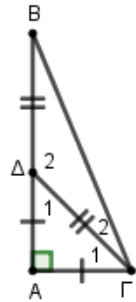
Λύση

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\Gamma$ είναι και ισοσκελές οπότε $\Delta_1 = \Gamma_1$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές του. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\Delta\Gamma\Gamma$ έχουμε:

$$\Delta_1 + \Gamma_1 + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 45^\circ, \text{ άρα } \Delta\Gamma\Gamma = 45^\circ.$$

β) Επειδή $BD = \Gamma\Delta$, το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $B = \Gamma_2$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές του.

Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ οπότε ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή $\Delta_1 = B + \Gamma_2 \Leftrightarrow 45^\circ = 2B \Leftrightarrow B = 22,5^\circ$



13443. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 60^\circ$ και $\Gamma = 40^\circ$. Στην πλευρά $A\Gamma$

θεωρούμε σημείο Δ , ώστε $\Gamma B\Delta = 20^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

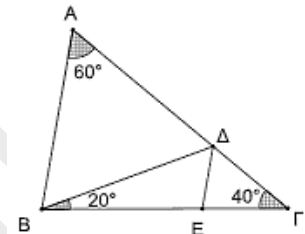
β) Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Delta E = 60^\circ$.

(Μονάδες 8)

ii. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 7)

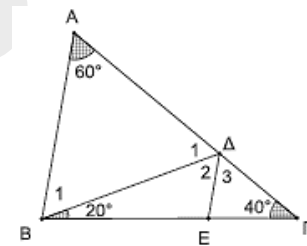


Λύση

α) Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, δηλαδή

$$\Delta_1 = \Gamma B\Delta + \Gamma = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ.$$

Το τρίγωνο $AB\Delta$ έχει δύο γωνίες του ίσες με 60° , οπότε και η τρίτη του γωνία, η B_1 , θα είναι ίση με 60° , οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.



β) i. Είναι $\Delta_2 = B_1 = 60^\circ$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Delta E$ που τέμνονται από την $B\Delta$.

ii. Είναι $\Delta_3 = A = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Delta E$ που τέμνονται από την $A\Gamma$. Άρα $\Delta_2 = \Delta_3 = 60^\circ$, οπότε η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Delta\Gamma$.

13535. Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ϵ_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι παράλληλη στην ευθεία ϵ_2 που ορίζεται από τις κορυφές του A και B .

Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 15)

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 10)

Λύση

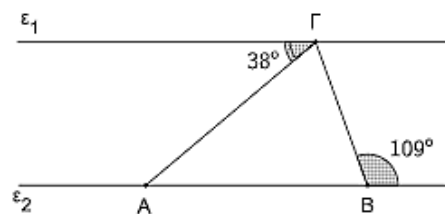
α) Είναι $A = 38^\circ$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ϵ_1, ϵ_2 που τέμνονται από την $A\Gamma$.

$$\text{Είναι } B + 109^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 180^\circ - 109^\circ = 71^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 38^\circ + 71^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 180^\circ - 109^\circ = 71^\circ$$

β) Επειδή $B = \Gamma = 71^\circ$ το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις AB και $A\Gamma$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες.



12707. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 70^\circ$ και $\Gamma = 55^\circ$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το σημείο A και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Z ώστε $BZ\Delta = 35^\circ$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της $B\Gamma$.

Η $Z\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

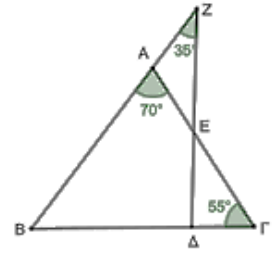
(Μονάδες 7)

β) $Z\Delta B = 90^\circ$.

(Μονάδες 8)

γ) το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + B + 55^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

Επειδή $B = \Gamma$ το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$.

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $ZB\Delta$ έχουμε:

$$Z + Z\Delta B + B = 180^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + Z\Delta B + 55^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Z\Delta B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

γ) Είναι $A + A_{εξ} = 180^\circ \Leftrightarrow A_{εξ} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AZE έχουμε:

$$A_{εξ} + Z + ZEA = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + 35^\circ + ZEA = 180^\circ \Leftrightarrow ZEA = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$$

Επειδή $Z = ZEA$ το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.

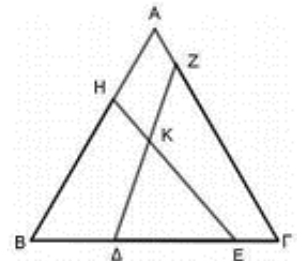
12708. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις πλευρές $B\Gamma$ και ΓA θεωρούμε σημεία E και Z αντίστοιχα ώστε $BE = \Gamma Z$. Στις πλευρές AB και ΓB θεωρούμε σημεία H και Δ αντίστοιχα ώστε $BH = \Gamma\Delta$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔZ και EH τέμνονται στο σημείο K το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $EH = \Delta Z$ και $BHE = \Gamma\Delta Z$.

(Μονάδες 12)

β) τα τρίγωνα BEH και $KE\Delta$ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα BEH και $\Gamma Z\Delta$ έχουν:

- $BE = \Gamma Z$, από την υπόθεση
- $BH = \Gamma\Delta$, από την υπόθεση
- $B = \Gamma = 60^\circ$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

Από το κριτήριο ισότητας Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, επομένως, $EH = \Delta Z$ και απέναντι από τις ίσες πλευρές $BE, \Gamma Z$ βρίσκονται αντίστοιχα οι ίσες γωνίες BHE και $\Gamma\Delta Z$.

β) Από την ισότητα των τριγώνων BEH και $\Gamma Z\Delta$ προκύπτει ότι απέναντι από τις ίσες πλευρές BE και ΓZ βρίσκονται ίσες γωνίες, δηλαδή $H = \Delta$. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι τα τρίγωνα $KE\Delta$ και BEH έχουν τη γωνία E κοινή και $H = \Delta$, επομένως, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή, $\Delta KE = B$.

12709. Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με

$AB = A\Gamma$ και $A = 90^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών B, Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

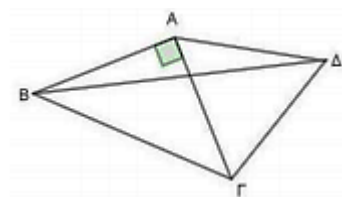
(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $AB\Delta$.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Επειδή $AB = AG$ το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές με βάση τη $BΓ$, οπότε $B = Γ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $ABΓ$ έχουμε:

$$A + B + Γ = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B = 45^\circ = Γ$$

β) Επειδή το τρίγωνο $ΑΔΓ$ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $ΑΔ = ΑΓ$. Όμως $AB = AG$, άρα $AB = AD$, οπότε το τρίγωνο $ABΔ$ είναι ισοσκελές με βάση τη $BΔ$.

γ) Επειδή το τρίγωνο $ΑΔΓ$ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $ΓΑΔ = 60^\circ$, οπότε $BAΔ = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο $ABΔ$ είναι ισοσκελές με βάση τη $BΔ$, ισχύει ότι $ABΔ = AΔB$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $ABΔ$ έχουμε:

$$ABΔ + AΔB + BAΔ = 180^\circ \Leftrightarrow 2ABΔ + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2ABΔ = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \Leftrightarrow ABΔ = 15^\circ$$

13619. Θεωρούμε το τετράπλευρο $ABΓΔ$ του σχήματος με

$$A_{εξ} = 100^\circ \text{ και } B + Γ = 220^\circ.$$

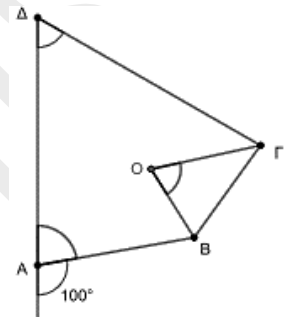
Αν οι διχοτόμοι των γωνιών B και $Γ$ τέμνονται στο O , τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες A και $Δ$ του τετραπλεύρου $ABΓΔ$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $BOΓ = 70^\circ$.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Είναι $A_{εξ} + A = 180^\circ \Leftrightarrow 100^\circ + A = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου $ABΓΔ$ έχουμε:

$$A + B + Γ + Δ = 360^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 220^\circ + Δ = 360^\circ \Leftrightarrow Δ = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$$

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $BΓO$ έχουμε:

$$BOΓ + OBG + OΓB = 180^\circ \Leftrightarrow BOΓ + \frac{B}{2} + \frac{Γ}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow BOΓ + \frac{B+Γ}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow BOΓ + \frac{220^\circ}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$BOΓ + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow BOΓ = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

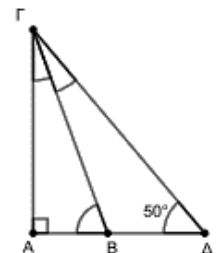
13654. Στο ακόλουθο σχήμα είναι $A = 90^\circ$, $ABΓ - AΓB = 50^\circ$ και $AΔΓ = 50^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $ABΓ$ και $AΓB$ του ορθογωνίου τριγώνου $ABΓ$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η $ΓB$ είναι διχοτόμος της γωνίας $AΓΔ$.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Είναι $ABΓ - AΓB = 50^\circ \Leftrightarrow ABΓ = AΓB + 50^\circ$ (1). Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $ABΓ$ έχουμε:

$$A + ABΓ + AΓB = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + AΓB + 50^\circ + AΓB = 180^\circ \Leftrightarrow 2AΓB = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ \Leftrightarrow AΓB = 20^\circ$$

Από τη σχέση (1) έχουμε: $ABΓ = AΓB + 50^\circ = 20^\circ + 50^\circ = 70^\circ$

β) Η γωνία $AB\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$, οπότε
 $AB\Gamma = B\Gamma\Delta + \Delta \Leftrightarrow 70^\circ = B\Gamma\Delta + 50^\circ \Leftrightarrow B\Gamma\Delta = 70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$
 Επειδή $B\Gamma\Delta = A\Gamma B$, η ΓB είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Gamma\Delta$.

13687. Σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $AOB = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες OA και OB κατά τμήματα AG και BD αντίστοιχα, έτσι ώστε $AG = OA$ και $BD = OB$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $OAB = OBA = 70^\circ$.

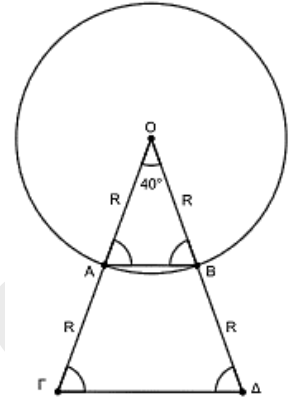
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $O\Gamma\Delta$ και $O\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές, αφού οι πλευρές OA και OB είναι ίσες με την ακτίνα R . Επομένως, οι γωνίες OAB και OBA θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση AB . Στο τρίγωνο OAB ισχύει:
 $O + OAB + OBA = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2OAB = 180^\circ \Leftrightarrow 2OAB = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \Leftrightarrow OAB = 70^\circ = OBA$

β) Τα τμήματα OG και OD είναι ίσα ως αθροίσματα ίσων τμημάτων, αφού $OG = OA + AG = 2R$ και $OD = OB + BD = 2R$. Επομένως, το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $\Gamma\Delta$. Στο τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ ισχύει:
 $O + O\Gamma\Delta + O\Delta\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2O\Gamma\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 2O\Gamma\Delta = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \Leftrightarrow O\Gamma\Delta = 70^\circ = O\Delta\Gamma$.

γ) Οι AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται από την $A\Gamma$ και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους OAB και $O\Gamma\Delta$ ίσες. Επομένως, $AB \parallel \Gamma\Delta$.

13741. Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ϵ και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha} = 76^\circ$ και $\hat{\gamma} = 120^\circ$, να υπολογίσετε :

α) Τη γωνία $\hat{\beta}$.

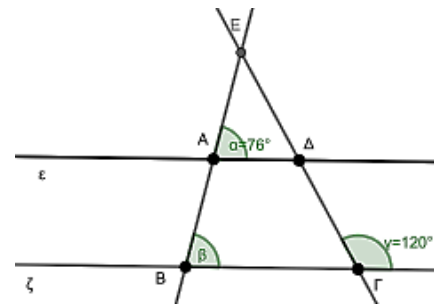
(Μονάδες 5)

β) Τις γωνίες του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)

γ) Τη γωνία E του τριγώνου $E\Delta\Delta$.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι εκτός εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ϵ και ζ που τέμνονται από την ευθεία AB . Οπότε $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 76^\circ$.

β) Η γωνία Γ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\gamma} = 120^\circ$, έτσι

$$\Gamma = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Οι γωνίες Γ και Δ του τετράπλευρου είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ευθειών ϵ και ζ που τέμνονται από τη $\Gamma\Delta$. Άρα είναι παραπληρωματικές, οπότε $\Gamma + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Η γωνία A του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\alpha} = 76^\circ$.

$$\text{Έτσι } A + \hat{\alpha} = 180^\circ \Leftrightarrow A + 76^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$$

γ) Στο τρίγωνο ΕΑΔ έχουμε ήδη γνωστή τη γωνία $\hat{\alpha} = 76^\circ$. Επιπλέον η γωνία ΑΔΕ του τριγώνου είναι η παραπληρωματική της γωνίας Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ οπότε

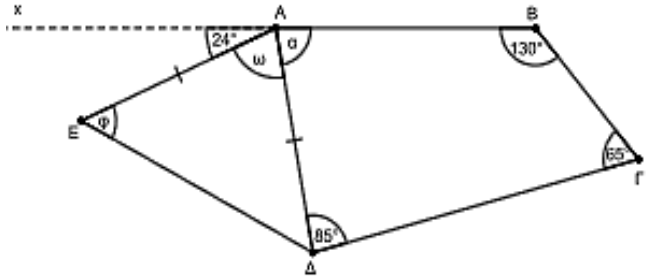
$$\text{ΑΔΕ} + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \text{ΑΔΕ} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ είναι 180° , οπότε

$$\text{ΑΔΕ} + \hat{\alpha} + \text{Ε} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 76^\circ + \text{Ε} = 180^\circ \Leftrightarrow \text{Ε} = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$$

13749. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αx είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α. Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- α) Τη γωνία $\hat{\alpha}$. (Μονάδες 08)
 β) Τη γωνία $\hat{\omega}$. (Μονάδες 08)
 γ) Τη γωνία $\hat{\phi}$. (Μονάδες 09)



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:

$$\hat{\alpha} + 85^\circ + 65^\circ + 130^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 360^\circ - 280^\circ = 80^\circ$$

β) Είναι $\hat{\alpha} + \hat{\omega} + 24^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + \hat{\omega} + 24^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$.

γ) Η διαγώνιος ΑΔ του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ, άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΔ. Η γωνία $\hat{\phi}$ είναι ίση με τη γωνία ΑΔΕ, ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ, του οποίου η γωνία της κορυφής είναι η $\hat{\omega} = 76^\circ$ από το β) ερώτημα.

$$\text{Επομένως } \hat{\phi} = \frac{180^\circ - \hat{\omega}}{2} = \frac{180^\circ - 76^\circ}{2} = \frac{104^\circ}{2} = 52^\circ.$$

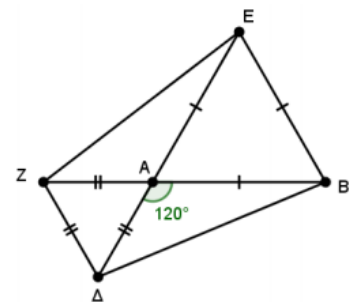
14884. Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\text{Α} = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο στο ΒΕ.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα ΖΑΔ και ΑΒΕ είναι ισόπλευρα, είναι

$$\text{ΖΑΔ} = \text{ΑΖΔ} = \text{ΖΔΑ} = \text{ΒΑΕ} = \text{ΑΒΕ} = \text{ΒΕΑ} = 60^\circ.$$

Επειδή $\Delta \text{ΑΒ} + \text{ΒΑΕ} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά. Επειδή

$$\Delta \text{ΑΒ} + \Delta \text{ΑΖ} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ \text{ τα σημεία Ζ, Α, Β είναι συνευθειακά.}$$

Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ έχουν:

- ΑΖ = ΑΒ πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΖ
- ΑΕ = ΑΒ πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΕ
- ΖΑΕ = ΔΑΒ ως κατακορυφήν

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΖΑΕ είναι ίσα.

β) Είναι $\text{ΑΖΔ} = \text{ΑΒΕ} = 60^\circ$, όμως οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ των ΔΖ, ΒΕ που τέμνονται από την ΖΒ, οπότε οι ευθείες ΖΔ και ΒΕ είναι παράλληλες.

4^ο Θέμα

1708. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με $B = 50^\circ$, το ύψος του AA και σημείο E στην AG ώστε $AE = BD$. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

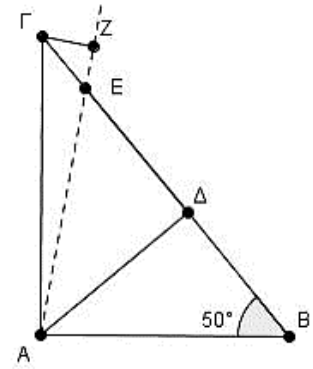
(Μονάδες 6)

ii. $\Gamma AE = 10^\circ$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $Z\Gamma E$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) i. Στο τρίγωνο ABE το AD είναι ύψος και διάμεσος,

οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει $\angle AEB = \angle B = 50^\circ$.

ii. Στο τρίγωνο ABE ισχύει ότι:

$$\angle EAB + \angle AEB + \angle B = 180^\circ \Leftrightarrow \angle EAB + 2 \cdot 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle EAB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ.$$

$$\text{Είναι } \angle EAB + \angle \Gamma AE = 90^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + \angle \Gamma AE = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \Gamma AE = 10^\circ.$$

β) Είναι $\angle \Gamma ZE = \angle AEB = 50^\circ$ ως κατακορυφήν.

Επειδή $\angle \Gamma ZE = 90^\circ$, στο τρίγωνο ΓZE ισχύει ότι: $\angle \Gamma ZE + \angle \Gamma EZ = 90^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \angle \Gamma EZ = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \Gamma EZ = 40^\circ$

1792. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$. Φέρουμε τη διχοτόμο του AK και σε τυχαίο σημείο της E φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο AK , η οποία τέμνει τις AB και AG στα σημεία Z και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓB στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:

α) $\angle Z\Delta\Gamma = 90^\circ + \frac{A}{2}$

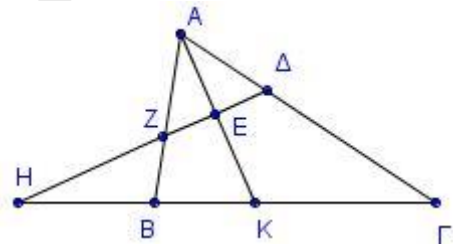
(Μονάδες 7)

β) $ZK = K\Delta$

(Μονάδες 8)

γ) $\angle ZH\Gamma = \frac{B - \Gamma}{2}$

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Στο τρίγωνο $AZ\Delta$ η AE είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε $\angle AZE = \angle A\Delta E$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta Z$ έχουμε: $\angle A + \angle AZE + \angle A\Delta E = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle A\Delta E = 180^\circ - \angle A \Leftrightarrow$

$$\angle A\Delta E = 90^\circ - \frac{A}{2}. \text{ Είναι } \angle Z\Delta\Gamma = 180^\circ - \angle A\Delta E = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

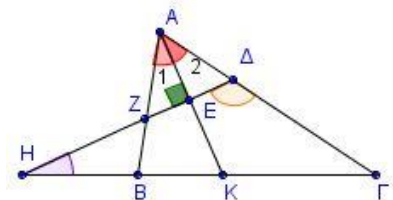
β) Η AE είναι μεσοκάθετος του $Z\Delta$ και το K είναι σημείο της, άρα ισαπέχει από τα Z και Δ , δηλαδή $ZK = K\Delta$.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $H\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$\angle ZH\Gamma + \angle Z\Delta\Gamma + \angle \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \angle ZH\Gamma + 90^\circ + \frac{A}{2} + \angle \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \angle ZH\Gamma = 90^\circ - \frac{A}{2} - \angle \Gamma = \frac{180^\circ - A - 2\Gamma}{2} \quad (1).$$

Όμως στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ, \text{ οπότε η σχέση (1) γίνεται: } \angle ZH\Gamma = \frac{A + B + \Gamma - A - 2\Gamma}{2} = \frac{B - \Gamma}{2}$$



1819. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της GB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $GE = B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην $E\Delta$ στο σημείο E , η οποία τέμνει την προέκταση της ΔA στο Z .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $\Gamma A E$ και $B\Delta A$.

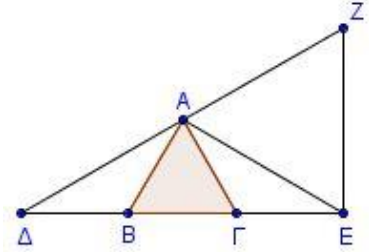
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓZ είναι μεσοκάθετος του AE .

(Μονάδες 12)

γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma Z$.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο οι γωνίες του είναι ίσες με 60° . Είναι

$$\angle B\Delta A = \angle A\Gamma E = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Επειδή $AB = A\Delta = A\Gamma = GE$, τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα και ισοσκελή. Έστω ω κάθε μια από τις γωνίες που αντιστοιχούν στις βάσεις τους.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Delta$ έχουμε:

$$\angle B\Delta A + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega = 60^\circ \Leftrightarrow \omega = 30^\circ$$

β) Επειδή $A\Gamma = GE$, το Γ ισαπέχει από τα A και E , οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του AE .

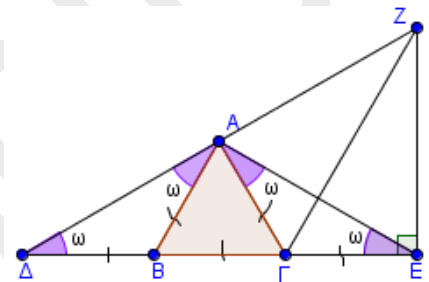
Είναι $\angle A\Gamma Z = \omega + \angle A = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ = \angle A\Gamma E$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma Z$ και $\Gamma E Z$ έχουν:

- 1) τη πλευρά ΓZ κοινή και
- 2) $A\Gamma = GE$,

Δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα και έχουν $ZA = ZE$.

Δηλαδή το Z ανήκει στη μεσοκάθετο του AE . Επειδή το Γ και το Z ανήκουν στη μεσοκάθετο του AE , η ΓZ είναι η μεσοκάθετος του AE .



γ) Στο τρίγωνο $A\Gamma E$ το ΓZ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος, δηλαδή

$$\angle A\Gamma Z = \angle Z\Gamma E = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Οι γωνίες $AB\Gamma$ και $Z\Gamma E$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των AB , ΓZ που τέμνονται από την $B\Gamma$ και είναι ίσες, άρα οι ευθείες AB και ΓZ είναι παράλληλες.

1828. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του ΓE . Στην προέκταση της ΓB προς το B , θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$. Αν η ευθεία ΔE τέμνει

την $A\Gamma$ στο Z και $Z\Theta \parallel B\Gamma$:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Theta E Z$.

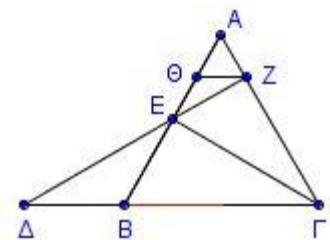
(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\Theta Z$.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι $3AB = 4\Theta B$.

(Μονάδες 5)



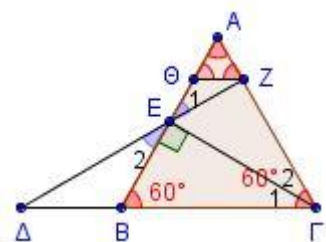
Λύση

α) Έστω a η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου.

Το ΓE είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, άρα είναι διάμεσος και διχοτόμος

του. Είναι $BE = \frac{BA}{2} = \frac{a}{2} = B\Delta$, άρα το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του A , $AB\Gamma$ και $A\Gamma B$ είναι ίσες με 60° .



Είναι $\angle \Theta Z = \angle \Lambda \Gamma = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘZ , $\Lambda \Gamma$ που τέμνονται από την AB . Ακόμη είναι $\angle Z \Theta = \angle \Gamma \Lambda = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘZ , $\Lambda \Gamma$ που τέμνονται από την AG . Στο τρίγωνο $\Lambda \Theta Z$ και οι τρεις γωνίες του είναι ίσες με 60° , οπότε είναι ισόπλευρο.

β) Η γωνία $\Lambda \Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $BE\Delta$, άρα $\angle \Lambda \Gamma = \Delta + E_2 \Leftrightarrow 60^\circ = 2E_2 \Leftrightarrow E_2 = 30^\circ$. Είναι $E_1 = E_2 = 30^\circ$ ως κατακορυφήν.

Είναι $\angle \Theta Z = 180^\circ - \angle \Lambda \Theta Z = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ και από το άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο ΘEZ , έχουμε:

$$\angle \Theta Z + E_1 + \angle \Theta ZE = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 30^\circ + \angle \Theta ZE = 180^\circ \Leftrightarrow \angle \Theta ZE = 30^\circ$$

γ) Επειδή $E_1 = \angle \Theta ZE = 30^\circ$, το τρίγωνο ΘZE είναι ισοσκελές με βάση την EZ , άρα $\Theta E = \Theta Z$.

Όμως $\Theta Z = \Theta \Lambda$ γιατί είναι πλευρές του ισόπλευρου, άρα $\Theta E = \Theta Z = \Theta \Lambda$ και $AE = 2\Theta Z$.

$$\delta) \text{ Είναι } \Theta B = \Theta E + EB = \frac{1}{2}AE + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AB + \frac{1}{2}AB = \frac{3}{4}AB \Leftrightarrow 3AB = 4\Theta B.$$

1849. Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $x'Ax$ θεωρούμε σημεία B και Γ ώστε $AB = A\Gamma$. Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ . Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $x'Ax$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις $B\Delta$ και $\Lambda \Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $E\Lambda Z$ είναι ισοσκελές.

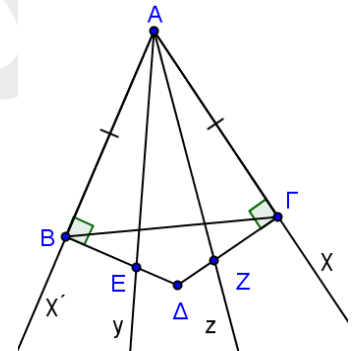
(Μονάδες 8)

β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'Ax$.

(Μονάδες 8)

γ) Οι γωνίες $\Gamma B\Delta$ και $\Gamma \Lambda \Delta$ είναι ίσες.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και $A\Gamma Z$ έχουν:

1) $AB = A\Gamma$ και 2) $\angle A_1 = \angle A_3$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα

οπότε έχουν και $AE = AZ$. Το τρίγωνο AEZ έχει δύο πλευρές ίσες και είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν:

1) τη πλευρά $A\Delta$ κοινή και 2) $AB = A\Gamma$,

δηλαδή έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, οπότε είναι ίσα. Επομένως έχουν και $\angle B\Lambda\Delta = \angle \Gamma\Lambda\Delta$, δηλαδή η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $x'Ax$.

γ) Έστω K το σημείο τομής των $A\Delta$ και $B\Gamma$. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ η AK είναι διχοτόμος άρα και ύψος. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $AK\Gamma$

$$\text{βρίσκουμε: } \angle A\Gamma + \angle A\Gamma K = 90^\circ \Leftrightarrow \angle A\Gamma = 90^\circ - \angle A\Gamma K$$

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, οπότε $\angle A\Gamma K = \angle AB\Gamma$.

$$\text{Είναι } \angle A\Gamma = 90^\circ - \angle AB\Gamma = \angle \Gamma B\Delta$$

1851. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η προέκταση της διχοτόμου της γωνίας Γ και της εξωτερικής γωνίας του B ,

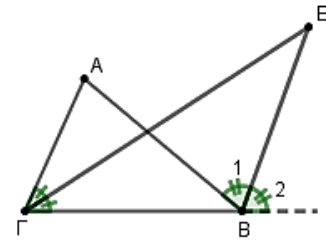
τέμνονται στο E . Δίνεται ότι $\angle ABE = 70^\circ = 2\angle EGB$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Επειδή BE είναι διχοτόμος της γωνίας B εξωτερικής, ισχύει ότι $B_1 = B_2 = 70^\circ$.

Είναι $2\angle EGB = 70^\circ \Leftrightarrow \angle EGB = 35^\circ$.

Η γωνία B_2 είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΓBE οπότε $B_2 = \angle EGB + \angle E\Gamma B \Leftrightarrow 70^\circ = 35^\circ + \angle E\Gamma B \Leftrightarrow \angle E\Gamma B = 35^\circ$.

Επειδή $\angle E\Gamma B = \angle EGB$ το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές. Είναι $B_2 + \angle BGE = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BGE = 110^\circ$

β) Επειδή GE διχοτόμος της γωνίας Γ και $\angle E\Gamma B = 35^\circ$, είναι $\angle A\Gamma B = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$

Είναι $B_1 + \angle AB\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 140^\circ + \angle AB\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AB\Gamma = 40^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$

ισχύει ότι: $A + \angle AB\Gamma + \angle A\Gamma B = 180^\circ \Leftrightarrow A + 40^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 70^\circ$

1888. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρνουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (A, Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$).

Να αποδείξετε ότι:

α) $AM \parallel \Gamma\Delta$

(Μονάδες 6)

β) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.

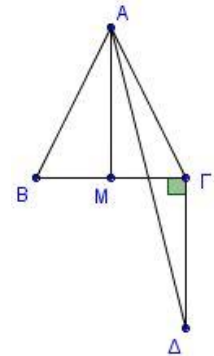
(Μονάδες 7)

γ) $\angle A\Gamma = 45^\circ - \frac{B}{2}$

(Μονάδες 7)

δ) $A\Delta < 2AB$

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Επειδή AM διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στη βάση του, θα είναι και ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Επειδή $AM \perp B\Gamma$ και $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$, είναι $AM \parallel \Gamma\Delta$.

β) Επειδή $AB = A\Gamma$ και $\Gamma\Delta = AB$ είναι και $A\Gamma = \Gamma\Delta$, άρα το τρίγωνο

$A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Delta$, άρα $A_1 = A_2$.

Όμως $A_1 = \Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AM, \Gamma\Delta$ που

τέμνονται από την $A\Delta$, άρα και $A_1 = A_2$, δηλαδή η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.

γ) Είναι $\angle A\Gamma = \frac{MA\Gamma}{2} = \frac{\frac{BA\Gamma}{2}}{2} = \frac{BA\Gamma}{4}$.

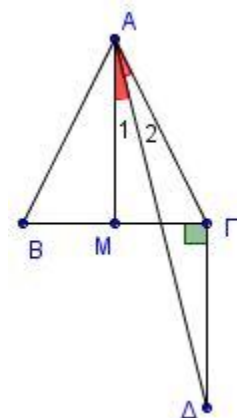
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$BA\Gamma + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow BA\Gamma + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow BA\Gamma = 180^\circ - 2B$.

Τότε $\angle A\Gamma = \frac{BA\Gamma}{4} = \frac{180^\circ - 2B}{4} = 45^\circ - \frac{B}{2}$

δ) Από τη τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$, έχουμε:

$A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta < AB + AB \Leftrightarrow A\Delta < 2AB$

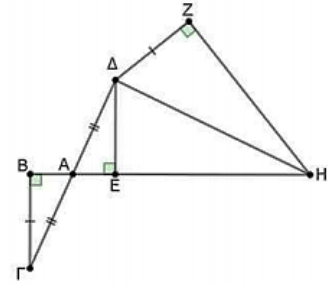


11882. Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ και ΔZH είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες $AB\Gamma$, $A\Delta E$ και ΔZH , αντίστοιχα. Επίσης $A\Gamma = A\Delta$ και $B\Gamma = \Delta Z$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Gamma$ και ΔE είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Η ΔH είναι διχοτόμος της γωνίας $\epsilon H Z$. (Μονάδες 6)

γ) Αν, επιπλέον, οι $A\Delta$ και ΔH είναι κάθετες, τότε $A\Delta E = \frac{\epsilon H Z}{2}$. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν: $A\Gamma = A\Delta$ (υπόθεση) και $\angle B A \Gamma = \angle \Delta A E$ ως κατακορυφήν. Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτεινόμενες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου ισούται με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα. Επομένως έχουν και $B\Gamma = \Delta E$.

β) Είναι $\Delta E = B\Gamma = \Delta Z$, οπότε το Δ ισαπέχει από τις HA και HZ , άρα ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\epsilon H Z$. Δηλαδή η ΔH είναι διχοτόμος της γωνίας $\epsilon H Z$.

γ) Επειδή η ΔH είναι διχοτόμος της γωνίας $\epsilon H Z$, ισχύει ότι $\Delta H E = \frac{\epsilon H Z}{2}$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta H$ είναι $\Delta A E + \Delta H E = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta H E = 90^\circ - \Delta A E$ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ είναι $A\Delta E + \Delta A E = 90^\circ \Leftrightarrow A\Delta E = 90^\circ - \Delta A E$ (3).

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι $A\Delta E = \frac{\epsilon H Z}{2}$.

13537. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $A\Delta = B\Delta = B\Gamma$ και σημείο E της πλευράς AB , ώστε $A E = \Gamma \Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

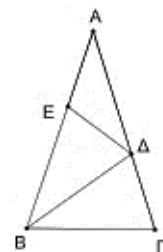
i. $\Gamma = 2A$ (Μονάδες 6)

ii. $A = 36^\circ$ (Μονάδες 6)

iii. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Στην προέκταση της ΔE προς το E θεωρούμε σημείο Z , ώστε $\Delta Z = A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.



(Μονάδες 7)

Λύση

α) Έστω $A = \omega$ (1).

i. Γνωρίζουμε ότι $A\Delta = B\Delta$, άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση AB , οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $B_1 = \omega$ (2)

Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta B$, οπότε $\Delta_1 = B_1 + A = 2\omega$ (3).

Είναι $B\Gamma = B\Delta$ (από τα δεδομένα), άρα το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $\Gamma\Delta$,

οπότε οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\Gamma = \Delta_1 = 2\omega$ (4).

Από τις σχέσεις (1), (4) προκύπτει ότι $\Gamma = 2A$.

ii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ (από τα δεδομένα), οπότε και οι προσκείμενες στη βάση $B\Gamma$ γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $B = \Gamma = 2\omega$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \omega + 2\omega + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 5\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ, \text{ άρα } A = 36^\circ.$$

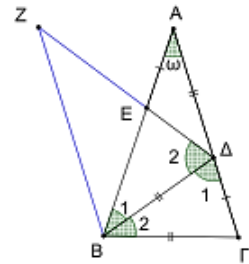


iii. Ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $\triangle ADE$ είναι ισοσκελές είναι να αποδείξουμε ότι $AE = DE$. Όμως από τα δεδομένα είναι $AE = \Delta\Gamma$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $DE = \Delta\Gamma$. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle B\Gamma\Delta$ και $\triangle BE\Delta$ τα οποία έχουν:

- BD κοινή πλευρά.
- $B\Gamma = BE$, γιατί $B\Gamma = A\Delta$ από τα δεδομένα και $BE = A\Delta$ ως διαφορές των ίσων τμημάτων $AB = A\Gamma$ και $AE = \Gamma\Delta$.

- $B_1 = B_2$ αφού $B_1 = \omega = 36^\circ$ ($\triangle ABD$ ισοσκελές τρίγωνο) και $B_2 = B - B_1 = 2\omega - \omega = \omega = 36^\circ$.

Τα τρίγωνα $\triangle B\Gamma\Delta$ και $\triangle BE\Delta$ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Άρα θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες B_1, B_2 , δηλαδή $DE = \Delta\Gamma$.



β) Στην ισότητα των τριγώνων $\triangle B\Gamma\Delta$ και $\triangle BE\Delta$ έχουμε αποδείξει ότι $B\Gamma = BE$,

οπότε και οι αντίστοιχες γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\Delta_1 = \Delta_2$. Από τη σχέση (3)

έχουμε ότι $\Delta_1 = 72^\circ$ άρα και $\Delta_2 = 72^\circ$.

Τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle ZB\Delta$ έχουν:

- $B\Gamma = B\Delta$, από τα δεδομένα.
- $A\Gamma = Z\Delta$, από το δεδομένο του ερωτήματος.
- $\Gamma = \Delta_2 = 72^\circ$.

Τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle ZB\Delta$ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Όμως το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε και το τρίγωνο $\triangle B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

13499. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με $AB < A\Gamma$ και AH το ύψος προς την

υποτείνουσα. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ και E τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Αν ΔZ και $E\Theta$ είναι οι αποστάσεις των Δ και E από τις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

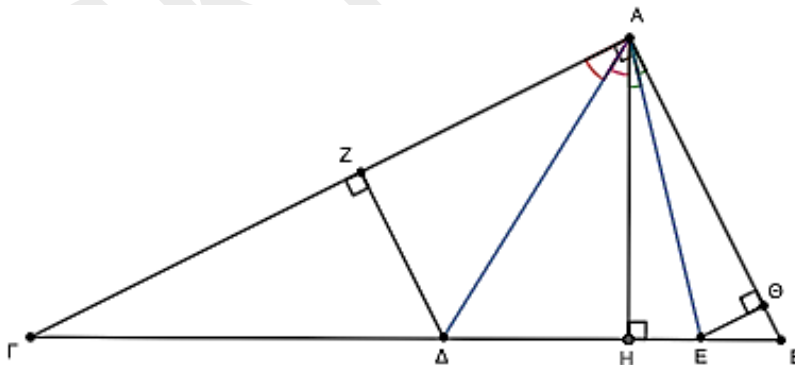
α) $\Gamma A\Delta = \Delta A\Gamma$ και $EAB = HAE$.

(Μονάδες 14)

β) $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$.

(Μονάδες 11)

Λύση



α) Από το σχήμα έχουμε ότι: $\Gamma A\Delta = \Gamma AB - \Delta AB = 90^\circ - \Delta AB$ (1). Οι γωνίες ΔAH και $A\Delta H$ του ορθογωνίου τριγώνου $\triangle A\Delta H$ είναι συμπληρωματικές, οπότε: $\Delta AH = 90^\circ - A\Delta H$ (2).

Αφού $BD = BA$, το τρίγωνο $\triangle B\Delta A$ θα είναι ισοσκελές με βάση ΔA , οπότε οι γωνίες ΔAB και $A\Delta H$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $\Delta AB = A\Delta H$ (3).

Άρα, από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\Gamma A\Delta = \Delta AH$ (4).

Έχουμε, επίσης, ότι: $EAB = \Gamma AB - \Gamma AE = 90^\circ - \Gamma AE$ (5).

Οι γωνίες HAE και AEH του ορθογωνίου τριγώνου $\triangle AEH$ είναι συμπληρωματικές, οπότε:

$HAE = 90^\circ - AEH$ (6).

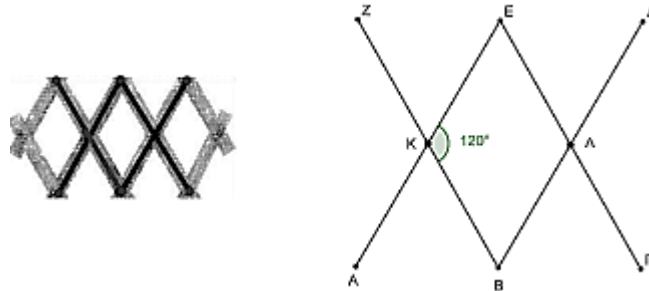
Αφού $ΓΕ = ΓΑ$, το τρίγωνο $ΓΕΑ$ θα είναι ισοσκελές με βάση $ΕΑ$, οπότε οι γωνίες $ΓΑΕ$ και $ΑΕΗ$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $ΓΑΕ = ΑΕΗ$ (7).

Άρα, από τις σχέσεις (5), (6) και (7) προκύπτει ότι $ΕΑΒ = ΗΑΕ$ (8).

β) Από (α) ερώτημα ισχύει ότι $ΕΑΒ = ΗΑΕ$, οπότε η $ΑΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΗΑΒ$ του τριγώνου $ΑΗΒ$. Άρα, το σημείο $Ε$ ισαπέχει από τις πλευρές $ΑΗ$ και $ΑΒ$ κι επομένως είναι $ΕΗ = ΕΘ$.

Από (α) ερώτημα ισχύει, επίσης, ότι $ΓΑΔ = ΔΑΗ$, οπότε η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΗΑΓ$ του τριγώνου $ΑΗΓ$. Άρα, το σημείο $Δ$ ισαπέχει από τις πλευρές $ΑΗ$ και $ΑΓ$ κι επομένως είναι $ΔΗ = ΔΖ$. Συνεπώς, $ΔΕ = ΔΗ + ΕΗ = ΔΖ + ΕΘ$.

13697. Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα $ΑΕ$, $ΒΖ$, $ΒΔ$ και $ΓΕ$ αναπαριστούν τέσσερις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου.



Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή $ΑΕ // ΒΔ$ και $ΒΖ // ΓΕ$, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή $Κ$ κοινό μέσο των $ΑΕ$, $ΒΖ$ και $Λ$ κοινό μέσο των $ΒΔ$, $ΓΕ$. Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι $ΑΕ$ και $ΒΖ$ με κορυφή το κοινό τους μέσο $Κ$, η γωνία $ΒΚΕ$, είναι ίση με 120° .

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΚΒ = ΚΒΛ = ΒΛΓ = 60^\circ$.

(Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα $ΑΚΒ$ και $ΒΛΓ$ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Α$, $Β$ και $Γ$ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Οι γωνίες $ΑΚΒ$ και $ΒΚΕ$ είναι παραπληρωματικές, οπότε ισχύει

$$ΑΚΒ + ΒΚΕ = 180^\circ \Leftrightarrow ΑΚΒ + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow ΑΚΒ = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \quad (1)$$

Είναι $ΑΚΒ = ΚΒΛ$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΑΕ$ και $ΒΔ$ με τέμνουσα την $ΒΖ$.

Όμως $ΑΚΒ = 60^\circ$ από τη σχέση (1) οπότε $ΚΒΛ = 60^\circ$ (2).

Είναι $ΚΒΛ = ΒΛΓ$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΒΖ$ και $ΓΕ$ με τέμνουσα την $ΒΔ$.

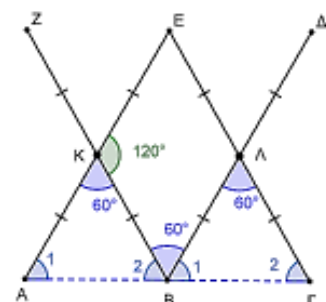
Όμως $ΚΒΛ = 60^\circ$ από σχέση (2), οπότε $ΒΛΓ = 60^\circ$ (3)

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $ΑΚΒ = ΚΒΛ = ΒΛΓ = 60^\circ$ (4)

β) Τα τρίγωνα $ΑΚΒ$ και $ΒΛΓ$ έχουν:

- $ΑΚ = ΒΛ = 20$ cm, ως μισά των ίσων τμημάτων $ΑΕ$ και $ΒΔ$ μήκους 40 cm όπου $Κ$ και $Λ$ τα μέσα τους.
- $ΚΒ = ΛΓ = 20$ cm, ως μισά των ίσων τμημάτων $ΒΖ$ και $ΓΕ$ μήκους 40 cm όπου $Κ$ και $Λ$ τα μέσα τους.
- $ΑΚΒ = ΒΛΓ = 60^\circ$, από σχέση (4)

Επομένως τα τρίγωνα θα είναι ίσα, γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Οπότε θα είναι $Α_1 = Β_1$ και $Β_2 = Γ_2$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $ΚΒ$, $ΛΓ$ και $ΚΑ$, $ΛΒ$ αντίστοιχα.



Επειδή είναι $AK = KB = 20 \text{ cm}$, το τρίγωνο AKB θα είναι ισοσκελές με βάση AB , οπότε θα έχει τις προσκείμενες στη βάση του γωνίες ίσες, δηλαδή $A_1 = B_2$ (5).

Για τις γωνίες του τριγώνου AKB ισχύει ότι $A_1 + AKB + B_2 = 180^\circ \Leftrightarrow 2A_1 + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2A_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Leftrightarrow A_1 = 60^\circ$ (6).

Από σχέσεις (4), (5) και (6) προκύπτει ότι $AKB = A_1 = B_2 = 60^\circ$. Συνεπώς, το τρίγωνο AKB θα είναι ισόπλευρο γιατί έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, οπότε και το ίσο του τρίγωνο $ΒΛΓ$ θα είναι και αυτό ισόπλευρο, οπότε κάθε γωνία του θα είναι ίση με 60° , δηλαδή $ΒΛΓ = \Gamma_2 = B_1 = 60^\circ$.

γ) Για να είναι τα A , B και Γ σημεία της ίδιας ευθείας, αρκεί ναδειχθεί ότι η γωνία $AB\Gamma$ είναι ευθεία γωνία. Είναι $AB\Gamma = B_2 + KBA + B_1 = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, αφού είναι $B_2 = B_1 = 60^\circ$ ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων AKB και $ΒΛΓ$. Επομένως, τα σημεία A , B και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

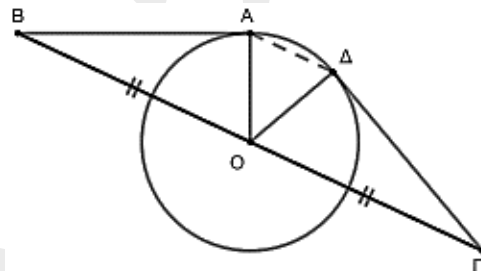
13750. Από σημείο B εξωτερικό ενός κύκλου (O, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα BA . Ενώνουμε το σημείο B με το κέντρο O του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα $ΟΓ = BO$. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $\Gamma\Delta$, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $AB = \Delta\Gamma$ (Μονάδες 08)
- ii. $A\Delta \parallel B\Gamma$ (Μονάδες 10)

β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος BA είναι ίσο με την ακτίνα R , τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο $ΑΟΔ$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

Λύση



α) i. $OA \perp AB$ και $OD \perp \Delta\Gamma$ διότι OA και OD είναι ακτίνες στα σημεία επαφής A και Δ αντίστοιχα. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAB και $O\Delta\Gamma$, τα οποία έχουν:

- $OA = OD$, ακτίνες του κύκλου
- $OB = OG$, από την υπόθεσή
- $\angle OAB = \angle O\Delta\Gamma = 90^\circ$, αφού $OA \perp AB$ και $OD \perp \Delta\Gamma$

Τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Άρα θα έχουν ίσες και τις άλλες κάθετες πλευρές τους, δηλαδή $AB = \Delta\Gamma$.

ii. Από την ισότητα των ορθογώνιων τριγώνων του α) i. ερωτήματος προκύπτει ότι $\angle OBA = \angle O\Delta\Gamma = \omega$, γιατί είναι οξείες γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές OA και OD αντίστοιχα. Επίσης είναι

$\angle AOB = \angle DO\Gamma = \phi$ ως οξείες γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, με $\omega + \phi = 90^\circ$ (1), ως άθροισμα οξείων γωνιών ορθογώνιων τριγώνων.

Για τη γωνία $\angle AOD$ έχουμε:

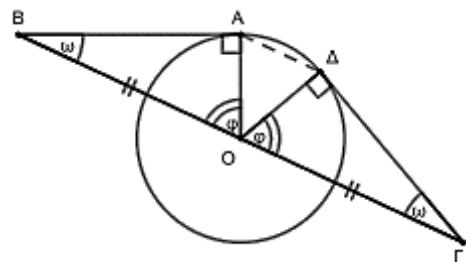
$$\angle AOD = 180^\circ - 2\phi = 2(90^\circ - \phi) = 2\omega \text{ λόγω της (1).}$$

Το τρίγωνο $\triangle AOD$ είναι ισοσκελές, αφού $OA = OD = R$.

Για τις ίσες του γωνίες $\angle OAD$ και $\angle ODA$ έχουμε:

$$\angle OAD = \angle ODA = \frac{180^\circ - \angle AOD}{2} = \frac{180^\circ - 2\omega}{2} = \frac{2(90^\circ - \omega)}{2} = 90^\circ - \omega = \phi \text{ λόγω της (1).}$$

Άρα $\angle OAD = \angle OBA = \phi$ και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των AD και $B\Gamma$ που τέμνονται από την OA , οπότε $AD \parallel B\Gamma$.



β) Αν το μήκος του BA είναι ίσο με R , τότε από το α) ερώτημα τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα OAB και $O\Delta\Gamma$ θα είναι και ισοσκελή, αφού $OA = AB = OD = \Delta\Gamma = R$. Επομένως οι γωνίες ω και ϕ θα είναι ίσες και η καθεμία θα ισούται με 45° . Τότε $\angle AOD = 180^\circ - 2\phi = 90^\circ$, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AOD$ έχει τη γωνία της κορυφής του ορθή, άρα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

3^ο Θέμα

12200. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $A = 36^\circ$. Έστω $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας B και E σημείο της πλευράς AB ώστε $AE = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = B\Delta$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)

γ) Η παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της ΔE (προς το E) στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B = \Gamma$ και

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 36^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 144^\circ \Leftrightarrow B = 72^\circ.$$

Επειδή η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της B , ισχύει ότι $B_1 = B_2 = \frac{1}{2}B = 36^\circ$.

Επειδή $B_1 = A$, το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές με βάση την AB , οπότε $A\Delta = B\Delta$.

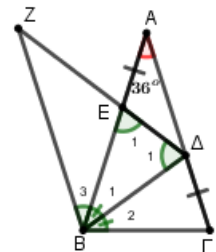
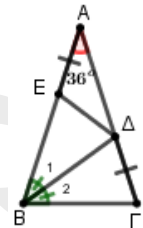
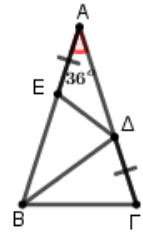
β) Είναι $AB = A\Gamma$ και $AE = \Delta\Gamma$, οπότε με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι:
 $AB - AE = A\Gamma - \Delta\Gamma \Leftrightarrow BE = A\Delta$. Όμως $A\Delta = B\Delta$, οπότε $BE = B\Delta$ και το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $B_3 = A = 36^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma$, BZ που τέμνονται από την AB .

Επειδή το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την DE , είναι $\Delta_1 = E_1$.

Στο τρίγωνο $B\Delta E$ είναι $B_1 + \Delta_1 + E_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 36^\circ + 2\Delta_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 72^\circ$.

Όμως $ZB\Delta = B_1 + B_3 = 72^\circ$, άρα $ZB\Delta = \Delta_1$, οπότε το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.



ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

2^ο Θέμα

1531. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$ και φέρουμε την BE που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο H . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) η AH είναι διάμεσος του τριγώνου BAE . (Μονάδες 9)

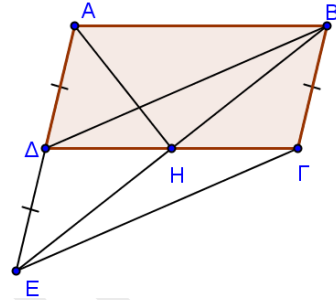
Λύση

α) Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, δηλαδή $A\Delta = B\Gamma$.

Είναι $AE = A\Delta + \Delta E = 2A\Delta = 2B\Gamma = AB$, άρα το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές.

β) Επειδή τα σημεία A, Δ, E είναι συνευθειακά και $B\Gamma \parallel A\Delta$, είναι και $B\Gamma \parallel \Delta E$. Όμως $B\Gamma = \Delta E$, άρα το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Επειδή το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιές του $\Gamma\Delta$, BE διχοτομούνται στο H . Δηλαδή το H είναι μέσο του BE , οπότε η AH είναι διάμεσος του τριγώνου BAE .



1533. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και ΓN . Προεκτείνουμε την BM (προς το M) κατά τμήμα $M\Delta = BM$ και την ΓN (προς το N) κατά τμήμα $NE = \Gamma N$.

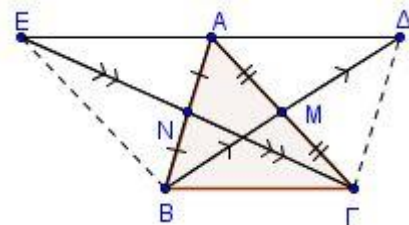
α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $AE \parallel B\Gamma$. (Μονάδες 13)

β) Είναι τα σημεία E, A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Επειδή $AM = M\Gamma$ και $M\Delta = BM$, οι διαγώνιες του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Οι $A\Delta$, $B\Gamma$ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα είναι παράλληλες. Επειδή $AN = NB$ και $NE = \Gamma N$, οι διαγώνιες του τετράπλευρου $EB\Gamma A$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Οι AE , $B\Gamma$ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα είναι παράλληλες.

β) Οι AE και $A\Delta$ είναι παράλληλες στη $B\Gamma$, επομένως είναι και μεταξύ τους παράλληλες. Όμως έχουν κοινό σημείο το A , άρα ανήκουν στον ίδιο φορέα, δηλαδή τα σημεία E, A και Δ είναι συνευθειακά.



1534. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνιός του $B\Delta$. Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε τις κάθετες AE και ΓZ στη $B\Delta$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και ΓBZ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

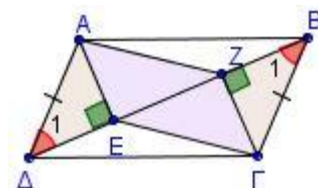
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta E$ και ΓBZ έχουν:

1) $A\Delta = B\Gamma$ απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και

2) $\Delta_1 = B_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Delta$, $B\Gamma$ που τέμνονται από την $B\Delta$

Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτεινουσας τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία

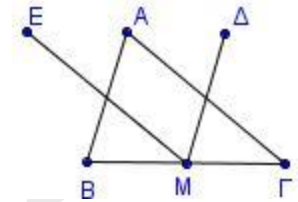


γωνία του άλλου, είναι ίσα.

- β) Είναι $AE \perp BD$ και $GZ \perp BD$, άρα $AE \parallel GZ$. Όμως $AE = GZ$ γιατί τα τρίγωνα ADE και GBZ είναι ίσα, άρα το τετράπλευρο $AEGZ$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

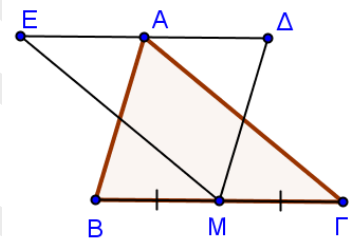
1535. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα MA ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά GA . Να αποδείξετε ότι:

- α) $DA = AE$ (Μονάδες 8)
 β) Τα σημεία Δ , A και E είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)
 γ) $DE = B\Gamma$. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Επειδή τα τμήματα MA και BA είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο $ABMA$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και τα τμήματα AD και BM είναι ίσα και παράλληλα. Επειδή τα τμήματα ME και GA είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο $AEM\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και οι πλευρές AE και $M\Gamma$ είναι ίσες και παράλληλες. Επειδή $AD = BM$ και $AE = M\Gamma = BM$ (M μέσο $B\Gamma$), είναι και $AE = AD$.



β) Επειδή $AD \parallel BM$ και $AE \parallel BM$, είναι και $AE \parallel AD$. Όμως τα τμήματα AE και AD έχουν κοινό σημείο το A , άρα τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο φορέα, οπότε τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά.

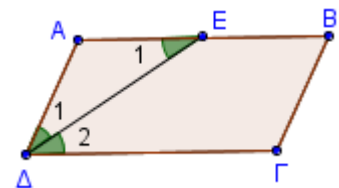
γ) Είναι $DE = DA + AE = BM + M\Gamma = B\Gamma$

1538. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2AD$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
 β) Είναι το σημείο E μέσο της πλευράς AB ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $\Delta_2 = E_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την DE και $\Delta_2 = \Delta_1$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Δ , άρα $\Delta_1 = E_1$. Το τρίγωνο ADE έχει δύο γωνίες ίσες και είναι ισοσκελές.



β) Επειδή το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές με βάση την DE είναι $AE = AD$, όμως $AB = 2AD \Leftrightarrow AE + EB = 2AE \Leftrightarrow EB = AE$, οπότε το E είναι μέσο της AB .

1539. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος OG , ώστε $OE = OZ$.

Να αποδείξετε ότι:

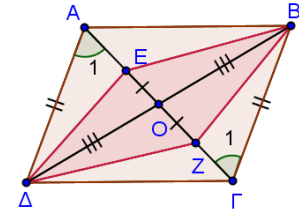
- α) $DE = BZ$ (Μονάδες 12)
 β) Το $DEBZ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Τα τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle BZG$ έχουν:

- 1) $AD = BG$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου
- 2) $AE = ZG$ γιατί $OA = OG$ αφού οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου διχοτομούνται και $OE = OZ$
- 3) $\angle A_1 = \angle G_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AD, BG που τέμνονται από την AG .

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $DE = BZ$.



β) Επειδή $OE = OZ$ και $OB = OD$ οι διαγώνιες του τετραπλεύρου διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

1557. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς AB . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

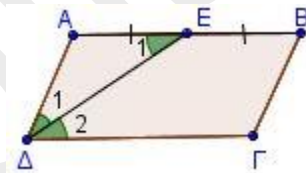
β) Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ . (Μονάδες 15)

Λύση

α) Επειδή το E είναι μέσο της πλευράς AB , είναι:

$$AE = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = AD, \text{ άρα το τρίγωνο } \triangle ADE \text{ έχει}$$

δύο πλευρές του ίσες και είναι ισοσκελές.



β) Επειδή το τρίγωνο $\triangle ADE$ είναι ισοσκελές με βάση την DE ,

είναι $\angle D_1 = \angle E_1$. Όμως $\angle D_2 = \angle E_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την DE , άρα $\angle D_1 = \angle D_2$, δηλαδή η DE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

1559. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

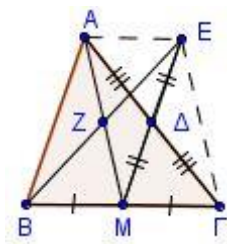
α) Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) Η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM . (Μονάδες 13)

Λύση

α) Επειδή $M\Delta = \Delta E$ και $AM = \Delta\Gamma$, οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AM\Gamma E$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή το $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο οι πλευρές AE και $M\Gamma$ είναι ίσες και παράλληλες. Όμως $BM = M\Gamma$ και τα σημεία B, M, Γ είναι συνευθειακά, άρα και τα τμήματα AE και MB είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο $ABME$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Οι AE, BM είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $ABME$, άρα διχοτομούνται, δηλαδή το Z είναι το κοινό τους μέσο. Επομένως η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM .



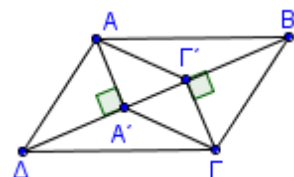
1600. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και A', Γ' οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α) $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$ (Μονάδες 8)

β) $AA' = \Gamma\Gamma'$ (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

Λύση



α) Είναι $AA' \perp BD$ και $\Gamma\Gamma' \perp BD$, άρα $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$.

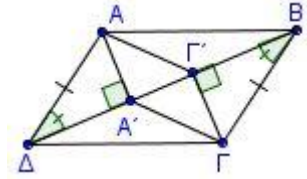
β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AA'\Delta$ και $\Gamma\Gamma'B$ έχουν:

- 1) $A\Delta = B\Gamma$ γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
- 2) $\angle A\Delta A' = \angle B\Gamma\Gamma'$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων

$A\Delta, B\Gamma$ που τέμνονται από την BD

Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτεινόμενες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, είναι ίσα, οπότε έχουν και $AA' = \Gamma\Gamma'$.

γ) Επειδή $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$ και $AA' = \Gamma\Gamma'$, το τετράπλευρο $AG'\Gamma A'$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



1609. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών του Δ και B τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

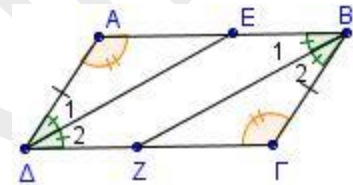
(Μονάδες 13)

Λύση

α) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ έχουν:

- 1) $A\Delta = B\Gamma$ απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- 2) $\angle A = \angle \Gamma$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- 3) $\angle 1 = \angle 2$ γιατί είναι μισά των γωνιών B και Δ που είναι ίσες γιατί είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα είναι ίσα έχουν $\Delta E = BZ$ (1) και $AE = \Gamma Z$.

Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ και $AE = \Gamma Z$, είναι και $AB - AE = \Gamma\Delta - \Gamma Z \Leftrightarrow BE = \Delta Z$ (2)

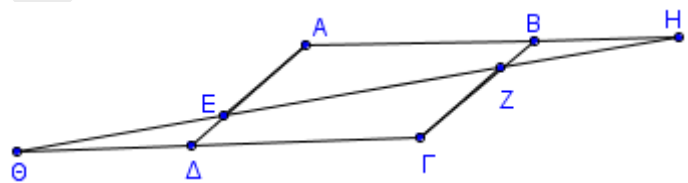
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

1610. Στις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια, ώστε $AE = \Gamma Z$. Αν η ευθεία ZE τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία H και Θ , να αποδείξετε ότι:

α) $HBZ = E\Delta\Theta$ (Μονάδες 8)

β) $BZH = \Delta E\Theta$ (Μονάδες 8)

γ) $BH = \Theta\Delta$ (Μονάδες 9)



Λύση

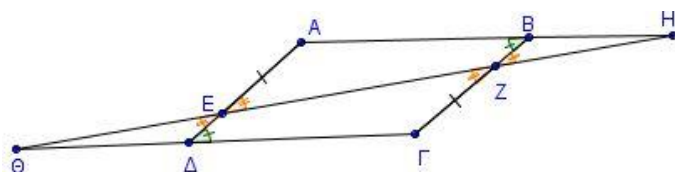
α) Είναι $\angle B = \angle \Delta$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου, $\angle HBZ = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - \angle \Delta = \angle E\Delta\Theta$

β) Είναι $\angle BZH = \angle \Gamma ZE$ (1) ως κατακορυφήν

και (2) $\angle \Delta E\Theta = \angle AEZ$ ως κατακορυφήν.

Όμως $\angle \Gamma ZE = \angle AEZ$ (3) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Delta, B\Gamma$ που τέμνονται

από την EZ οπότε από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι $\angle BZH = \angle \Delta E\Theta$.



γ) Τα τρίγωνα ΔΕΘ και ΒΖΗ έχουν:

1) $ΕΔ = ΒΖ$, γιατί $ΑΔ = ΒΓ$ και $ΑΕ = ΓΖ$

2) $ΗΒΖ = ΕΔΘ$ και

3) $ΒΖΗ = ΔΕΘ$

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΒΗ = ΘΔ$.

1618. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και το σημείο

Ο είναι το μέσο της ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:

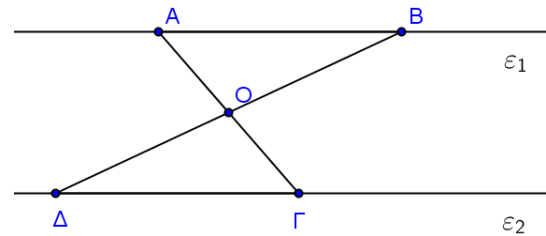
α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα

και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ έχουν:

1) $ΒΟ = ΟΔ$ γιατί το Ο είναι μέσο του ΒΔ

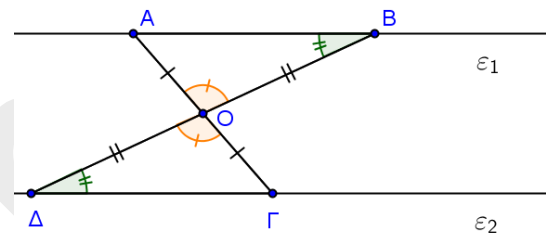
2) $ΑΟΒ = ΓΟΔ$ ως κατακορυφήν και

3) $ΑΒΟ = ΓΔΟ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που τέμνονται από την ΒΔ.

Με βάση το κριτήριο Γ-Π-Γ τα

τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΟ = ΟΓ$,

$ΑΒ = ΓΔ$ και $ΟΑΒ = ΟΓΔ$.



β) Επειδή $ΑΟ = ΟΓ$ και $ΒΟ = ΟΔ$, οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

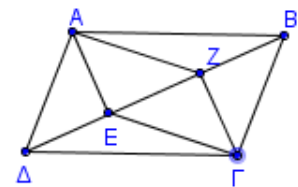
1628. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ > ΒΓ$. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη διαγώνιο ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΕ = ΓΖ$

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



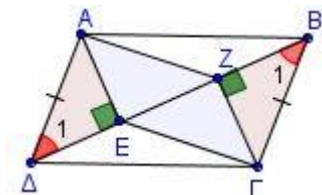
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ έχουν:

1) $ΑΔ = ΒΓ$ απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και

2) $\Delta_1 = \Delta_2$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ

Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΕ = ΓΖ$.

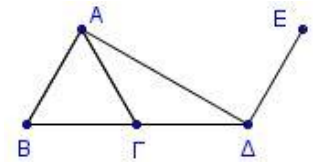


β) Είναι $ΑΕ \perp ΒΔ$ και $ΓΖ \perp ΒΔ$, άρα $ΑΕ \parallel ΓΖ$. Όμως $ΑΕ = ΓΖ$ από α) ερώτημα, άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

1637. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην AD στο σημείο της Δ , τέτοιο, ώστε $\Delta E = B\Gamma$. (Α και Ε στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τη $B\Delta$).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι

$\angle B\Gamma\Delta = \angle \Gamma = \angle B = 60^\circ$. Τότε $\angle \Gamma_{\text{εξ}} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Επειδή $\Gamma\Delta = B\Gamma = A\Gamma$, το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι

ισοσκελές με βάση την AD , άρα $\angle A_1 = \angle \Delta_1$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Gamma\Delta$ έχουμε:

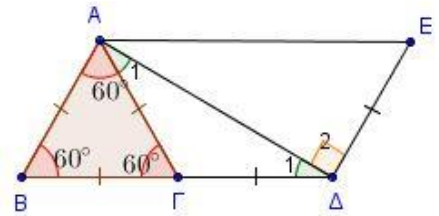
$$\angle A_1 + \angle \Delta_1 + \angle \Gamma_{\text{εξ}} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle \Delta_1 + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$2\angle \Delta_1 = 60^\circ \Leftrightarrow \angle \Delta_1 = 30^\circ, \text{ άρα και } \angle A_1 = 30^\circ. \text{ Άρα: } \angle B\Delta\Delta = \angle B\Delta\Gamma + \angle A_1 = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ.$$

Επομένως οι γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$ είναι: $\angle B\Delta\Delta = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ και $\angle \Delta_1 = 30^\circ$

β) Είναι $\angle B\Delta\Delta = 90^\circ$, άρα $BA \perp AD$. Όμως και $\Delta E \perp AD$, άρα $AB \parallel \Delta E$.

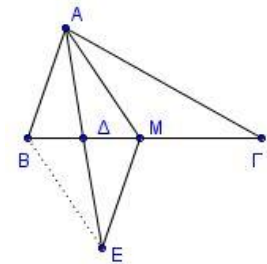
Είναι ακόμη $\Delta E = B\Gamma = AB$, οπότε το τετράπλευρο $AB\Delta E$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.



1642. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η AD είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκταση της AD ώστε $AD = DE$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) $ME = M\Gamma$. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Επειδή $AD = DE$ και $BD = DM$ (αφού η AD είναι διάμεσος στο τρίγωνο ABM) οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $ABEM$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

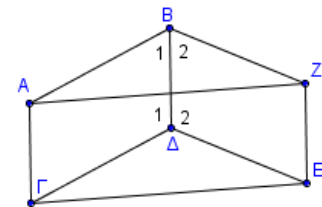
β) Είναι $ME = AB$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και

$$B\Gamma = 2AB \Leftrightarrow AB = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma, \text{ άρα } ME = M\Gamma.$$

1654. Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$. Να αποδείξετε ότι:

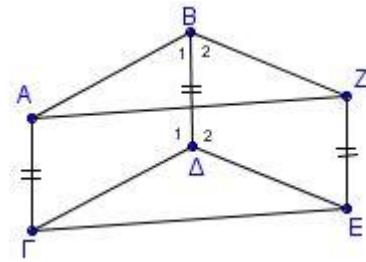
α) Το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) $ABZ = \Gamma\Delta E$ (Μονάδες 12)



Λύση

α) Επειδή το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι ίσες και παράλληλες. Επειδή το $B\Delta EZ$ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του $B\Delta$ και ZE είναι ίσες και παράλληλες. Άρα οι $A\Gamma$ και ZE είναι ίσες και παράλληλες, οπότε και το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.



β) Οι γωνίες B_1, Δ_1 είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των

παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$, άρα $B_1 + \Delta_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 180^\circ - B_1$

Οι γωνίες B_2, Δ_2 είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $BZ, \Delta E$ που τέμνονται από την $B\Delta$, άρα $B_2 + \Delta_2 = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta_2 = 180^\circ - B_2$.

Είναι $\Gamma\Delta E = 360^\circ - \Delta_1 - \Delta_2 = 360^\circ - (180^\circ - B_1) - (180^\circ - B_2) = B_1 + B_2 = \angle ABZ$

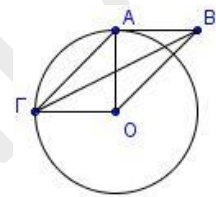
1678. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες OA, OG και εφαπτόμενο στο κύκλο τμήμα AB με $AB = OG$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και $B\Gamma$ διχοτομούνται.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ABOG$.

(Μονάδες 15)

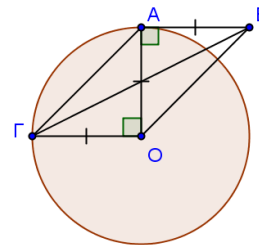


Λύση

α) Επειδή η OA είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής με την εφαπτομένη AB , είναι $OA \perp AB$. Όμως $OA \perp OG$, άρα $AB \parallel OG$. Επειδή $AB = OG$ και $AB \parallel OG$, στο τετράπλευρο $ABOG$ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Οι AO και $B\Gamma$ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου, οπότε διχοτομούνται.

β) Επειδή $AB = OA = \rho$, το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $B = BOA = 45^\circ$. Είναι $\angle AGO = B = 45^\circ$ γιατί είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου.

Είναι $\angle BOG = \angle BOA + \angle AOG = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ και $\angle GAB = \angle BOG = 135^\circ$ γιατί είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου.



1687. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA (προς το A) και την πλευρά $\Delta\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΔAE και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

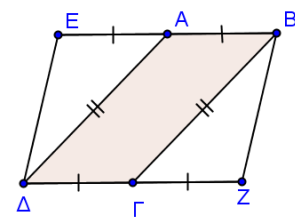
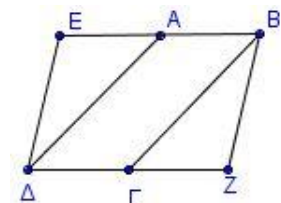
β) Το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΔAE και $B\Gamma Z$ έχουν:

- 1) $AE = AB = \Gamma\Delta = \Gamma Z$ (τα $AB, \Gamma\Delta$ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου)
- 2) $\angle A\Delta E = \angle B\Gamma Z$ γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
- 3) $\angle B\Gamma Z = \angle E\Delta A$ γιατί είναι παραπληρωματικές των γωνιών A, Γ που είναι ίσες γιατί είναι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή $BZ = ED$ και $EB = 2AB = 2\Gamma\Delta = \Delta Z$, το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και είναι παραλληλόγραμμα.

1701. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $MD = MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 12)

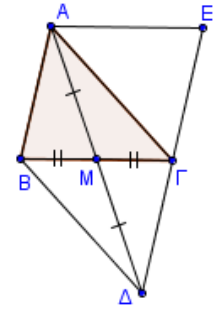
β) $BM = \frac{AE}{2}$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Επειδή $BM = M\Gamma$ και $MD = MA$, οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AB\Delta\Gamma$ διχοτομούνται, επομένως είναι παραλληλόγραμμα.

β) Επειδή το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα, οι απέναντι πλευρές του AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Άρα και οι AB και ΓE είναι παράλληλες. Επειδή και οι AE , $B\Gamma$ είναι παράλληλες, το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμα. Επειδή $AE = B\Gamma$, γιατί είναι απέναντι πλευρές

παραλληλογράμμου, ισχύει ότι: $BM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{AE}{2}$.



13755. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη $B\Gamma$. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τις παράλληλες προς την AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) τα τετράπλευρα $ZA\Gamma\Delta$ και $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη $B\Gamma$, προκύπτει $ZA \parallel \Delta\Gamma$.

Από την υπόθεση έχουμε $Z\Delta \parallel A\Gamma$. Άρα το τετράπλευρο $ZA\Gamma\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμα.

Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη $B\Gamma$, προκύπτει $AE \parallel B\Delta$.

Από την υπόθεση έχουμε $\Delta E \parallel BA$. Άρα το τετράπλευρο $AB\Delta E$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμα.

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν:

- $AB = \Delta E$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Delta E$
- $A\Gamma = \Delta Z$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ZA\Gamma\Delta$
- $B\Gamma = ZE$, διότι $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma$ και $ZE = ZA + AE$ και $B\Delta = AE$, $\Delta\Gamma = ZA$ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων $ZA\Gamma\Delta$, $AB\Delta E$ αντίστοιχα.

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.

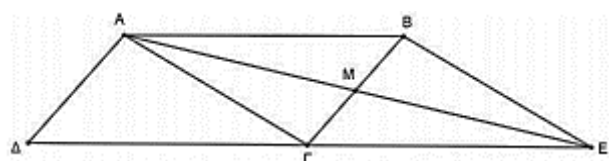
13816. Δίνεται παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $A\Delta < AB$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

Προεκτείνουμε την AM προς το M κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 10)

β) τα σημεία Δ , Γ και E είναι συνευθειακά. (Μονάδες 15)

Λύση



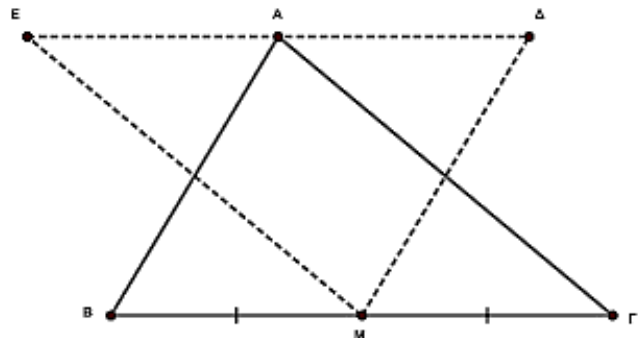
α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι το σημείο M είναι το μέσο του $BΓ$ και του $ΑΕ$, οπότε στο τετράπλευρο $ΑΒΕΓ$ οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Άρα είναι παραλληλόγραμμο.

β) Από το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ έχουμε $ΔΓ // ΑΒ$ ως απέναντι πλευρές του. Όμοια από το παραλληλόγραμμο $ΑΒΕΓ$ έχουμε $ΑΒ // ΓΕ$ ως απέναντι πλευρές του. Άρα τα ευθύγραμμο τμήματα $ΔΓ$ και $ΓΕ$ είναι παράλληλα στην $ΑΒ$ και επειδή έχουν κοινό σημείο το $Γ$, τα σημεία $Δ$, $Γ$ και $Ε$ είναι συνευθειακά.

13825. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Από το μέσο M της $BΓ$ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα $MΔ$ ίσο και παράλληλο προς την $ΒΑ$ και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα $ΜΕ$ ίσο και παράλληλο προς την $ΓΑ$ (τα σημεία $Δ$ και $Ε$ βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $BΓ$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι: α) Τα τετράπλευρα $ΑΔΜΒ$ και $ΑΓΜΕ$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 12)
β) $ΔΑ=ΑΕ$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Το τετράπλευρο $ΑΔΜΒ$ έχει $ΑΒ = ΔΜ$ (από υπόθεση) και $ΑΒ // ΔΜ$ (από υπόθεση) άρα είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει 2 απέναντι πλευρές του, τις $ΑΒ$ και $ΜΔ$ παράλληλες και ίσες. Το τετράπλευρο $ΑΓΜΕ$ έχει $ΑΓ = ΕΜ$ (από υπόθεση) και $ΑΓ // ΕΜ$ (από υπόθεση) άρα είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει 2 απέναντι πλευρές του, τις $ΑΓ$ και $ΕΔ$ παράλληλες και ίσες.



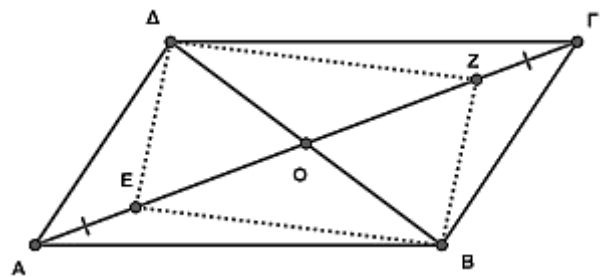
β) $ΔΑ=ΒΜ$ (1) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ΑΔΜΒ$ (που δείξαμε στο ερώτημα α)), επίσης $ΑΕ=ΓΜ$ (2) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ΑΓΜΕ$ (που δείξαμε στο ερώτημα α)). Το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $BΓ$ επομένως $ΒΜ=ΓΜ$ (3). Από τις σχέσεις (1),(2),(3) έχουμε $ΔΑ=ΑΕ$.

13829. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία E και Z των τμημάτων $ΑΟ$ και $ΓΟ$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΑΕ=ΓΖ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΕΔ$ και $ΓΖΒ$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΕΔ$ και $ΓΖΒ$ που έχουν:
- $ΑΕ=ΓΖ$ (από υπόθεση)
- $ΑΔ=ΒΓ$ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου)
- $ΕΑΔ = ΖΓΒ$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΑΔ$ και $ΒΓ$ που τέμνονται από την $ΑΓ$)
Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.



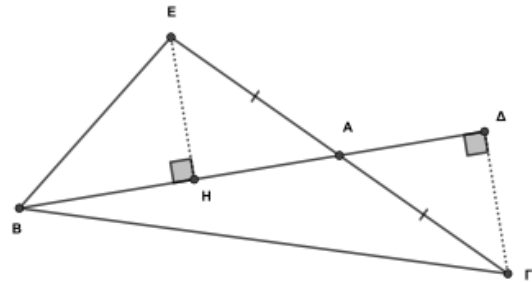
β) $ΟΕ=ΟΑ-ΑΕ$ και $ΟΖ=ΟΓ-ΓΖ$. Όμως $ΟΑ=ΟΓ$ αφού το σημείο O είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ και $ΑΕ=ΓΖ$ από υπόθεση. Άρα $ΟΕ=ΟΖ$ ως διαφορές ίσων τμημάτων. Επιπλέον $ΒΟ=ΟΔ$ αφού το σημείο O είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$, επομένως οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $ΔΕΒΖ$ διχοτομούνται και το τετράπλευρο $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

13833. Στο διπλανό σχήμα το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, το $E\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου ABE και η BA είναι διάμεσος του τριγώνου $BE\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $A\epsilon\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = A\epsilon$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Gamma\Delta E\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $A\epsilon\Delta$ έχουν:

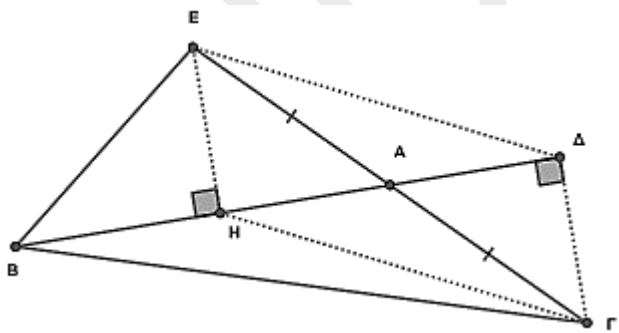
- $A\Gamma = A\epsilon$ (γιατί BA διάμεσος από υπόθεση)

- $\Delta A\Gamma = \Delta A\epsilon$ (ως κατακορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων $A\Gamma\Delta$ και $A\epsilon\Delta$ του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει ότι $A\epsilon\Delta = A\Gamma\Delta$ άρα και $A\Delta = A\epsilon$ ως πλευρές ίσων τριγώνων απέναντι από ίσες γωνίες.

γ) Από υπόθεση έχουμε ότι BA διάμεσος του τριγώνου $EB\Gamma$ άρα $EA = A\Gamma$ και από το β) ερώτημα αποδείξαμε ότι $A\Delta = A\epsilon$, άρα το τετράπλευρο $\Gamma\Delta E\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι του $E\Gamma$ και $\Delta\Delta$ διχοτομούνται.



13834. Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμέσό του AM . Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ = B\Gamma$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma H = B\Gamma$, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $ME = AM$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AMZ και EMH είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AMZ και EMH που έχουν:

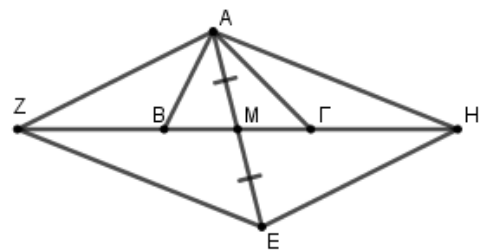
- $AM = ME$ (υπόθεση)

- $MZ = MH$ (άθροισμα ίσων τμημάτων $MB + BZ$ και $M\Gamma + \Gamma H$)

- $\angle AMZ = \angle EMH$ (ως κατακορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

β) Από υπόθεση έχουμε $AM = ME$ (1) και όπως χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη σύγκριση έχουμε $MZ = MH$ (2). Επομένως στο τετράπλευρο $AHEZ$ οι διαγώνιοι AE και ZH διχοτομούνται στο σημείο M , άρα το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο.



4^ο Θέμα

1709. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο η εξωτερική του γωνία Γ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας A . Από την κορυφή A διέρχεται ημιευθεία $Ax // B\Gamma$ στο ημιεπίπεδο (AB, Γ) . Στην ημιευθεία Ax θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

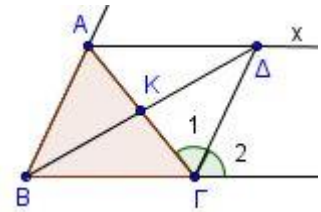
α) Η $B\Delta$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 7)

β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της $\Gamma\epsilon$. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Επειδή τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΑΓ, ΒΔ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου και διχοτομούνται, δηλαδή η ΒΔ διέρχεται από το μέσο Κ της ΑΓ.



β) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι ΑΒ, ΓΔ είναι παράλληλες.

Είναι $\Gamma_1 = \text{ΒΑΓ}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται

από την ΑΓ. Όμως $\Gamma_{\varepsilon\zeta} = 2A \Leftrightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2 = 2A \Leftrightarrow A + \Gamma_2 = 2A \Leftrightarrow \Gamma_2 = A$, δηλαδή $\Gamma_1 = \Gamma_2$, οπότε η ΒΔ είναι διχοτόμος της $\Gamma_{\varepsilon\zeta}$.

γ) Γνωρίζουμε ότι κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο μέσα και απέναντι γωνιών του, άρα $\Gamma_{\varepsilon\zeta} = A + B$. Όμως $\Gamma_{\varepsilon\zeta} = 2A$, άρα $2A = A + B \Leftrightarrow A = B$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

1730. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει $AB > AD$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $AE\Delta = BZ\Gamma$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ και Β.

α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.

(Μονάδες 16)

β) Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) **Ισχυρισμός 1**

Είναι $\Delta Z = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = EB$ και $\Delta Z \parallel EB$ αφού $\Delta\Gamma \parallel AB$, οπότε το

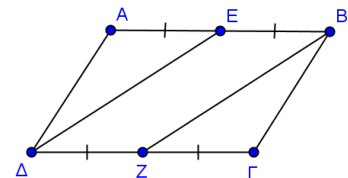
τετράπλευρο ΔΕΒΖ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2

Επειδή το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι

$$\Delta EB = BZ\Delta \Leftrightarrow 180^\circ - \widehat{AE\Delta} = 180^\circ - \widehat{BZ\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{AE\Delta} = \widehat{BZ\Gamma}.$$

2ος τρόπος: $\widehat{AE\Delta} = \widehat{BZ\Gamma}$ γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες



β) **Ισχυρισμός 3**

Έστω ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. Τότε $\widehat{ADE} = \widehat{EDZ}$.

Όμως $\widehat{AE\Delta} = \widehat{EDZ}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΔ, άρα

$\widehat{ADE} = \widehat{EDZ}$ και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, δηλαδή $AE = AD$.

Είναι $AD = AE = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2AD$, δηλαδή τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ισοσκελή στη περίπτωση που η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης.

1731. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύουν $AB > \Gamma\Delta$ και η γωνία Α είναι αμβλεία,, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.

α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.

(Μονάδες 16)

β) Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) **Ισχυρισμός 1**

Είναι $\Delta Z = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = EB$ και $\Delta Z \parallel EB$ αφού $\Delta\Gamma \parallel AB$, οπότε

το τετράπλευρο ΔΕΒΖ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ έχουν:

1) $AD = BG$ γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου

2) $AE = \frac{AB}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{2} = ZG$

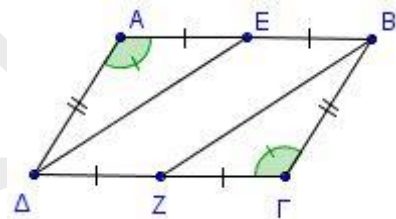
3) $\angle A = \angle G$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) **Ισχυρισμός 3**

Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ισοσκελή. Τότε $AD = AE = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2AD$

Δηλαδή τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ισοσκελή στη περίπτωση που η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης.



1746. Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύουν τα εξής: $\alpha = \beta$, $\hat{\gamma} = \delta$ και $\hat{\epsilon} = \zeta$.

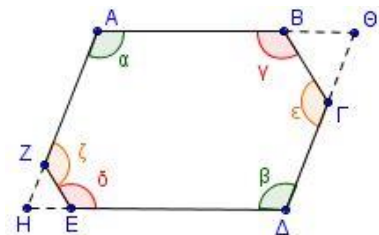
α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$. (Μονάδες 8)

β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 10)

ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 7)



Λύση

$\alpha = \beta$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\epsilon} = \zeta$. (*)

α) Για τις γωνίες του εξαγώνου ισχύει ότι:

$$\alpha + \beta + \hat{\gamma} + \hat{\delta} + \hat{\epsilon} + \zeta = (6 - 2)180^\circ = 720^\circ \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} 2\alpha + 2\hat{\gamma} + 2\hat{\epsilon} = 720^\circ \Leftrightarrow \alpha + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon} = 360^\circ \quad (1)$$

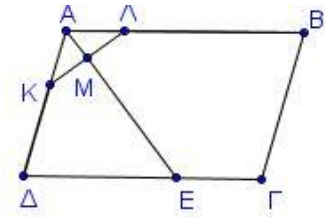
β) i. Είναι $\alpha + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon} = 360^\circ \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \alpha + \hat{\delta} + \zeta = 360^\circ \quad (2)$

Οι γωνίες ΗΖΕ, ζ, και ΗΕΖ, δ, είναι εφεξής και παραπληρωματικές.

Άρα $\angle HZE + \zeta = 180^\circ$ και $\angle HEZ + \delta = 180^\circ \quad (3)$

Στο τρίγωνο HZE ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} H + HZE + HEZ &= 180^\circ \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} H + 180^\circ - \hat{\zeta} + 180^\circ - \hat{\delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \\ H &= \hat{\delta} + \hat{\zeta} - 180^\circ \stackrel{(2)}{=} 360^\circ - \alpha - 180^\circ = 180^\circ - \alpha \Leftrightarrow H + A = 180^\circ \Leftrightarrow \\ H + \alpha &= 180^\circ \Leftrightarrow H + A = 180^\circ \end{aligned}$$



ii. Επειδή οι γωνίες H και A είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΑΘ, ΗΔ που τέμνονται από την ΑΗ και επίσης είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες ΑΘ, ΗΔ είναι παράλληλες.

Οι γωνίες ΘΒΓ, γ και ΘΓΒ, ε είναι εφεξής και παραπληρωματικές. Άρα $\Theta B\Gamma + \hat{\gamma} = 180^\circ$ και

$\Theta \Gamma B + \hat{\epsilon} = 180^\circ$ (4). Στο τρίγωνο ΘΒΓ είναι:

$$\Theta + \Theta B\Gamma + \Theta \Gamma B = 180^\circ \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \Theta + 180^\circ - \hat{\gamma} + 180^\circ - \hat{\epsilon} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Theta = \hat{\gamma} + \hat{\epsilon} - 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \Theta = 360^\circ - \alpha - 180^\circ \Leftrightarrow \Theta = 180^\circ - A \Leftrightarrow \Theta + A = 180^\circ$$

Επειδή οι γωνίες A, Θ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΑΗ, ΘΔ που τέμνονται από την ΑΘ και είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες ΑΗ και ΘΔ είναι παράλληλες.

Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

1785. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > AD$. Θεωρούμε σημεία Κ, Λ των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε $AK = AL$. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

- α) $AD = DE$. (Μονάδες 8)
- β) $B\Gamma + \Gamma E = AB$. (Μονάδες 10)
- γ) $B = 2 \cdot A\Lambda K$ (Μονάδες 7)

Λύση

α) Επειδή $AK = AL$, το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισοσκελές και η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ΚΛ, άρα η ΑΜ είναι και διχοτόμος της γωνίας Α, δηλαδή $\angle KAM = \angle MAL$.

Όμως $\angle MAL = \angle AED$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ, άρα $\angle KAM = \angle AED$, οπότε το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ, άρα $AD = DE$.

β) Είναι $DE = AD = B\Gamma$, οπότε $B\Gamma + \Gamma E = DE + \Gamma E = D\Gamma = AB$

γ) Από το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΚΛ έχουμε:

$$A + \angle AKL + \angle ALK = 180^\circ \Leftrightarrow A + 2 \cdot \angle ALK = 180^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot \angle ALK = 180^\circ - A \quad (1).$$

Οι γωνίες Α και Β είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ, οπότε είναι παραπληρωματικές. Δηλαδή $A + B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 180^\circ - A$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $B = 2 \cdot \angle ALK$.

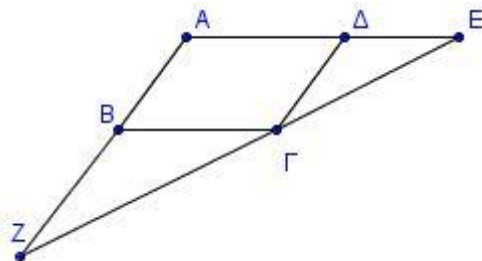
1805. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $DE = D\Gamma$ ενώ στη προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $BZ = B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $B\Gamma Z = \angle D\Gamma E$ (Μονάδες 10)
- ii. Τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. «Έχουμε:

$B\Gamma = \Gamma E$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται



από τη ΖΕ) και $\text{B}\Gamma\text{Z} = \text{D}\text{E}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΔΓ). Όμως $\text{D}\Gamma\text{E} + \Gamma\Delta\text{E} + \text{D}\text{E}\Gamma = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα : $\text{D}\Gamma\text{E} + \text{B}\Gamma\Delta + \text{B}\Gamma\text{Z} = 180^\circ$. Οπότε τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.>>

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό. (Μονάδες 5)

Λύση

α) i. Επειδή $\text{BZ} = \text{B}\Gamma$, το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές οπότε $\text{B}\Gamma\text{Z} = \text{BZE}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΓΖ έχουμε:

$$\text{B}\widehat{\text{Z}} + \text{B}\Gamma\text{Z} + \text{BZE} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$180^\circ - \widehat{\text{B}} + 2\widehat{\text{B}\Gamma\text{Z}} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\text{B}\Gamma\text{Z}} = \frac{\widehat{\text{B}}}{2} \quad (1).$$

Επειδή $\Delta\text{E} = \Delta\Gamma$, το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι: $\Delta\Gamma\text{E} = \Delta\text{E}\Gamma$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΓΔΕ, έχουμε:

$$\Delta\Gamma\text{E} + \Delta\widehat{\text{E}} + \Delta\text{E}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta\Gamma\text{E} + 180^\circ - \widehat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\Gamma\text{E} = \frac{\widehat{\Delta}}{2} \quad (2).$$

Όμως $\text{B} = \Delta$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου, άρα από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $\text{B}\Gamma\text{Z} = \Delta\Gamma\text{E}$.

ii. Σκέψη: Για να αποδείξουμε ότι τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά θα δείξουμε ότι η γωνία που σχηματίζουν $(\text{Z}\Gamma\text{E})$ είναι ευθεία γωνία.

Επειδή οι γωνίες Γ και Δ του παραλληλογράμμου είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ,ΒΓ που τέμνονται από την ΓΔ, είναι παραπληρωματικές.

$$\text{Είναι } \text{B}\Gamma\text{Z} + \Gamma + \Delta\Gamma\text{E} = \frac{\text{B}}{2} + \Gamma + \frac{\Delta}{2} = \frac{\text{B}}{2} + \Gamma + \frac{\text{B}}{2} = \Gamma + \text{B} = 180^\circ, \text{ άρα τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά}$$

β) Ο μαθητής χρησιμοποίησε ως δεδομένο ότι τα Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά και το χρησιμοποίησε για να δείξει ότι οι γωνίες ΒΓΖ και ΔΕΓ είναι ίσες.

1810. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ του ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο με το ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο με το ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από το ΒΓ και το σημείο Α. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

β) Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

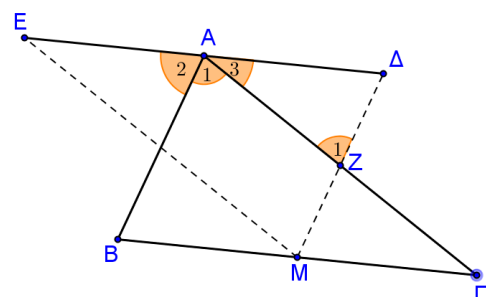
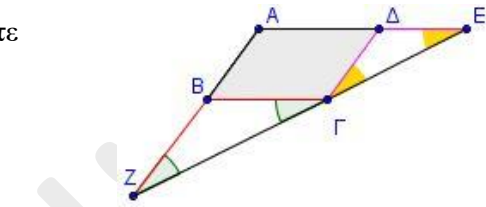
γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής :

$$\text{Z}_1 = \text{A}_1 \text{ (εντός εναλλάξ των } \text{AB} // \text{M}\Delta \text{ που τέμνονται από } \text{AZ})$$

$$\text{A}\Delta\text{Z} = \text{A}_2 \text{ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των } \text{AB} // \text{M}\Delta \text{ που τέμνονται από } \Delta\text{E})$$

Όμως $\text{Z}_1 + \text{A}_3 + \text{A}\Delta\text{Z} = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ).

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:



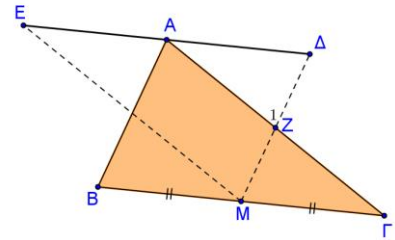
$A_1 + A_2 + A_3 = 180^\circ$. Οπότε Δ, A, E συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είτε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

(Μονάδες 6)

Λύση

α) $MD // BA$ οπότε το τετράπλευρο $BA\Delta M$ είναι παραλληλόγραμμο και $A\Delta // BM$.
 Όμοια $ME // GA$ οπότε το τετράπλευρο $AGME$ είναι παραλληλόγραμμο και $AE // MG$.
 Από το A έχουμε $AE // BG$ και $A\Delta // BG$
 άρα τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά.



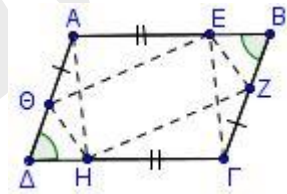
β) Αν Π η περίμετρος του τριγώνου $ME\Delta$ και Π_1 η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ τότε

$$\Pi = ME + MD + DE = AG + AB + EA + A\Delta = AG + AB + MG + BM = AG + AB + BG = \Pi_1$$

γ) Το λάθος υπάρχει στον συλλογισμό $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{Z} = \hat{A}_2$ γιατί χρησιμοποιεί την ΔAE σαν ευθεία χωρίς να γνωρίζει αν τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά.

1839. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E, Z, H, Θ στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$. Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)
- Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)
- Τα τμήματα $A\Gamma, B\Delta, EH$ και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.



(Μονάδες 9)

Λύση

α) Επειδή $AB // \Gamma\Delta$ είναι και $AE // \Gamma H$. Όμως είναι και $AE = \Gamma H$, άρα το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

β) Τα τρίγωνα BEZ και $\Delta H\Theta$ έχουν:

- $BZ = \Delta\Theta$
 - $\Delta H = BE$ γιατί $(\Delta H = \Delta\Gamma - H\Gamma = AB - AE = BE)$ και
 - $\Delta = B$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα άρα και $\Theta H = EZ$ (1).

Τα τρίγωνα $A\Theta E$ και ΓHZ έχουν:

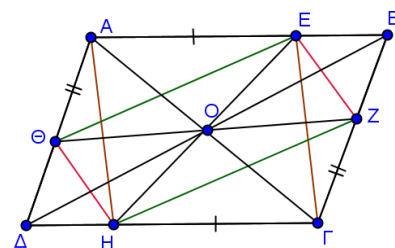
- $AE = \Gamma H$
- $A\Theta = \Gamma Z$ ($A\Theta = A\Delta - \Theta\Delta = B\Gamma - BZ = \Gamma Z$) και

3) $A = \Gamma$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Theta E = HZ$ (2).

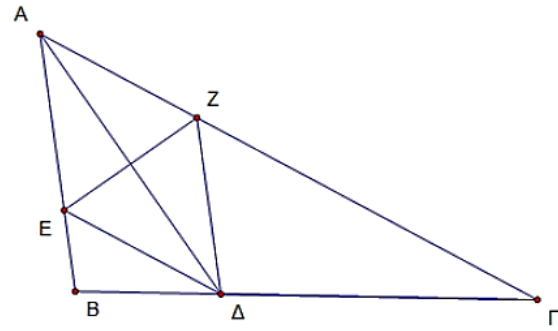
Από τις (1),(2) το τετράπλευρο $EZH\Theta$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Τα $EH, Z\Theta$ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $EZH\Theta$, οπότε διχοτομούνται σε σημείο O . Τα $A\Gamma, EH$ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $A\epsilon\Gamma H$, οπότε διχοτομούνται. Όμως το μέσο της EH είναι το O , άρα το O είναι μέσο και της $A\Gamma$. Οι $A\Gamma, B\Delta$ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, άρα διχοτομούνται. Όμως η $A\Gamma$ έχει μέσο το O , άρα και η $B\Delta$ έχει μέσο το O . Τελικά τα τμήματα $A\Gamma, B\Delta, EH$ και $Z\Theta$ έχουν κοινό μέσο το O .



1844. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και AD η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει ότι $AD = \Delta\Gamma$. Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$ και η DZ παράλληλη στην AB . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα ED και AF είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)
 β) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
 γ) Τα τμήματα AD και EZ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)



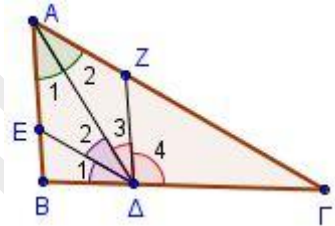
Λύση

α) Επειδή $AD = \Delta\Gamma$, το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την AG , άρα $A_2 = \Gamma = \omega$.

Η γωνία $B\Delta A$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, άρα $B\Delta A = A_2 + \Gamma = 2\omega$. Είναι

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{B\Delta A}{2} = \frac{2\omega}{2} = \omega.$$

Οι γωνίες $E\Delta A$ και A_2 είναι εντός εναλλάξ των DE , AG που τέμνονται από την AD και είναι ίσες με ω , άρα τα τμήματα DE και AG είναι παράλληλα.

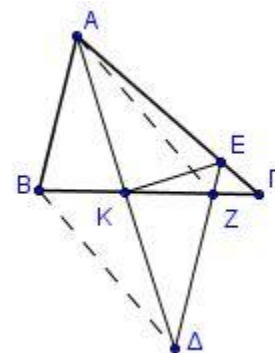


β) Είναι $A_1 = \Delta_2 = \omega$, οπότε το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές με βάση την AD .

γ) Επειδή $DZ \parallel AB$ και $DE \parallel AZ$, στο τετράπλευρο $AEDZ$ οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Τα AD και EZ είναι διαγώνιες παραλληλογράμμου, οπότε διχοτομούνται.

1857. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με AK διχοτόμο της γωνίας A . Στην προέκταση της AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει τις AG και $B\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
 β) Η EK είναι μεσοκάθετος του $A\Delta$. (Μονάδες 6)
 γ) Τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
 δ) Το τετράπλευρο $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



Λύση

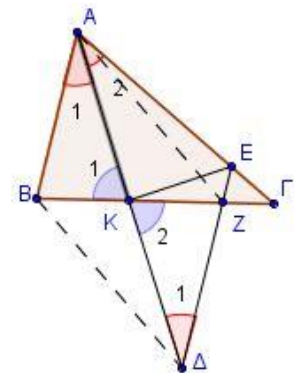
α) Είναι $A_1 = \Delta_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB , DE που τέμνονται από την AD και $A_1 = A_2$ λόγω της διχοτόμησης, άρα είναι και $A_2 = \Delta_1$ οπότε το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.

β) Η EK είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου AED , άρα είναι και ύψος του, δηλαδή η EK είναι μεσοκάθετος του $A\Delta$.

γ) Τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ έχουν:

- 1) $AK = K\Delta$
- 2) $K_1 = K_2$ ως κατακορυφήν
- 3) $A_1 = \Delta_1$

Με βάση το κριτήριο $\Gamma\Pi\Gamma$ τα τρίγωνα είναι ίσα.



δ) Επειδή τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα, έχουν και $BK = KZ$, όμως είναι και $AK = K\Delta$, δηλαδή στο τετράπλευρο $AZ\Delta B$ οι διαγώνιές του διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

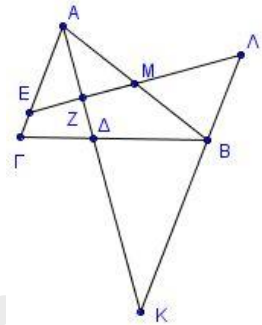
1882. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, AD η διχοτόμος της γωνίας A και M το μέσον της AB . Η κάθετη από το M στην AD τέμνει το $A\Gamma$ στο E . Η παράλληλη από το B στο $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της AD στο K και την προέκταση της EM στο Λ . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEM , $MB\Lambda$ και ABK είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $A\Lambda BE$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Έστω Z το σημείο τομής των AD , ME . Η AZ είναι ύψος και διχοτόμος στο τρίγωνο AEM , άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ισχύει ότι $AE = ME$.

Είναι $AE = MB$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma$, ΛK που τέμνονται από την EL και $AME = BML$ ως κατακορυφήν, άρα $BML = MB\Lambda$, οπότε το τρίγωνο BML είναι ισοσκελές.

Είναι $\Gamma AD = K$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma$, $K\Lambda$ που τέμνονται από την AK και $\Gamma AD = \Delta AB$ γιατί η AD είναι διχοτόμος της γωνίας A , άρα $\Delta AB = K$, οπότε το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.

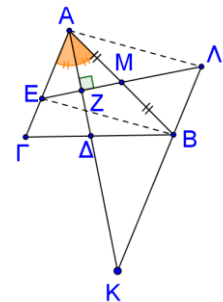
β) Τα τρίγωνα AEM και $MB\Lambda$ έχουν:

1) $AM = MB$

2) $AME = BML$ ως κατακορυφήν και

3) $AE = MB$

άρα από το κριτήριο ΓΠΓ, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ME = ML$. Στο τετράπλευρο $A\Lambda BE$ τα EL , AB είναι διαγώνιές του που διχοτομούνται στο M , οπότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.



13742. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε $BK \perp B\Gamma$ έτσι ώστε $BK = A\Gamma$ (το σημείο K είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A).

α) Να αποδείξετε ότι $AM \parallel BK$ και $AB = BK$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAM .

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $BKA = 45^\circ - \frac{\Gamma}{2}$.

(Μονάδες 6)

δ) Μπορεί το τετράπλευρο $ABKM$ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

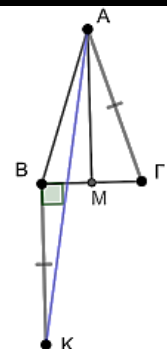
(Μονάδες 6)

Λύση

α) Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, το τμήμα AM είναι η διάμεσος προς τη βάση του $B\Gamma$, οπότε το AM είναι και ύψος και διχοτόμος της γωνίας A . Δηλαδή $AM \perp B\Gamma$ και επιπλέον οι γωνίες BAM και ΓAM είναι ίσες. Από την κατασκευή $KB \perp B\Gamma$ και επειδή $AM \perp B\Gamma$, τότε $AM \parallel KB$, ως κάθετες στη $B\Gamma$ σε διαφορετικά σημεία της. Επιπλέον δίνεται ότι

$BK = A\Gamma$ και ξέρουμε ότι οι πλευρές AB και $A\Gamma$ είναι ίσες, οπότε $AB = BK$.

β) Δείξαμε στο ερώτημα α) ότι $AB = BK$, άρα το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $BAK = BKA$.



Επιπλέον έχουμε ότι $AM \parallel BK$, οπότε οι γωνίες KAM και BKA θα είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των $AM \parallel BK$ που τέμνονται από την AK .

Άρα ισχύει ότι $BAK = BKA = KAM$ (1) οπότε η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAM .

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ABK οι τρεις γωνίες του έχουν άθροισμα 180° , δηλαδή $BAK + KBA + BKA = 180^\circ$. Επιπλέον $KBA = AB\Gamma + 90^\circ$, οπότε λόγω της (1) έχουμε:

$$2BKA + B + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2BKA + B = 90^\circ.$$

Όμως οι γωνίες B και Γ είναι ίσες ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, οπότε

$$2BKA = 90^\circ - \Gamma \Leftrightarrow BKA = 45^\circ - \frac{\Gamma}{2}.$$

δ) Το τετράπλευρο $ABKM$ έχει τις δυο απέναντι πλευρές του AM και BK παράλληλες. Αν ήταν παραλληλόγραμμο οι AM και BK θα ήταν και ίσες. Αν $AM = BK$ τότε θα ισχύει ότι $AM = AB$. Όμως τα τμήματα AM και AB είναι κάθετο και πλάγιο τμήμα αντίστοιχα προς τη $B\Gamma$, οπότε ισχύει ότι $AM < AB$. Συνεπώς έχουμε ότι $AM < KB$ και το τετράπλευρο $ABKM$ δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο.

3845. Οι κύκλοι (K, R) , (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το A και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία B και Γ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ϵ) και (δ) στα σημεία B και Γ . Να αποδείξετε ότι:

α) $KBA = \Lambda GA$.

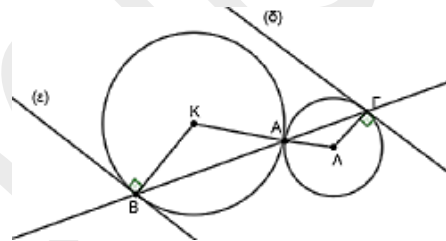
(Μονάδες 8)

β) $(\epsilon) \parallel (\delta)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο $K\Gamma\Lambda B$ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Το τρίγωνο AKB είναι ισοσκελές με $KB = KA$, ως ακτίνες του κύκλου (K, R) . Άρα $KBA = KAB$ (1).

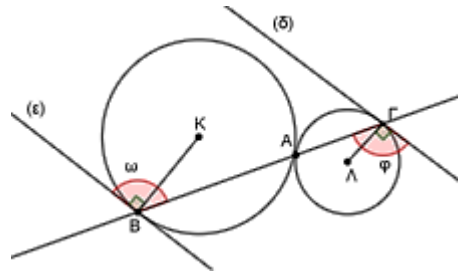
Το τρίγωνο ALA είναι ισοσκελές με $LA = LG$, ως ακτίνες του κύκλου (Λ, ρ) . Άρα $LAG = LGA$ (2).

Οι γωνίες KAB και LAG είναι κατακορυφήν, οπότε είναι ίσες. Άρα από τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει $KBA = LGA$.

β) Έστω ω και ϕ οι γωνίες όπως φαίνονται στο σχήμα.

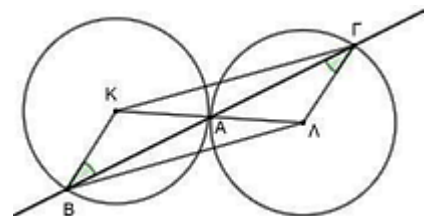
Για τις γωνίες ω , ϕ έχουμε $\hat{\omega} = 90^\circ + KBA$ και $\hat{\phi} = 90^\circ + LGA$.

Από το ερώτημα (α) οι γωνίες KBA και LGA είναι ίσες, οπότε και οι γωνίες ω , ϕ είναι ίσες. Οι ίσες γωνίες ω και ϕ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών (ϵ) και (δ) που τέμνονται από τη $B\Gamma$, συνεπώς $(\epsilon) \parallel (\delta)$.



γ) Για να είναι το τετράπλευρο $K\Gamma\Lambda B$ παραλληλόγραμμο, θα πρέπει οι απέναντι πλευρές του KB και $\Gamma\Lambda$ να είναι ίσες και παράλληλες. Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες KBA και LGA των KB και $\Gamma\Lambda$ που τέμνονται από τη $B\Gamma$ είναι ίσες. Άρα προκύπτει ότι $KB \parallel \Gamma\Lambda$.

Τα ευθύγραμμα τμήματα KB και $\Gamma\Lambda$ είναι ακτίνες των δύο κύκλων, οπότε για να είναι ίσα θα πρέπει οι κύκλοι να είναι ίσοι μεταξύ τους. Άρα για να είναι το τετράπλευρο $K\Gamma\Lambda B$ παραλληλόγραμμο θα πρέπει $R = \rho$.



3^ο Θέμα

11897. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του AM . Στην προέκταση της $A\Gamma$ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $\Gamma\Delta = A\Gamma$. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την AM που τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $M\Gamma = GE$.

(Μονάδες 9)

β) Το τετράπλευρο $AM\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 7)

γ) $B + B\Delta M = \Gamma\Delta E$

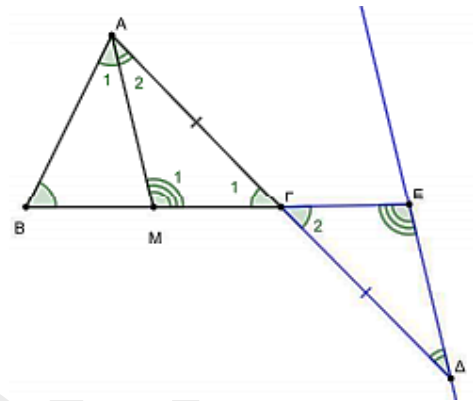
(Μονάδες 9)

Λύση

α) Τα τρίγωνα $AM\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ έχουν:

- $A\Gamma = \Gamma\Delta$ (υπόθεση)
- $\Gamma_1 = \Gamma_2$ ως κατακορυφήν
- $A_2 = \Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AM , ΔE που τέμνονται από την $A\Delta$.

Σύμφωνα με το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα $AM\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα, οπότε έχουν και $M\Gamma = GE$.



β) Επειδή $M\Gamma = GE$ και $A\Gamma = \Gamma\Delta$ οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AM\Delta E$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Στο τρίγωνο BAM η γωνία M_1 είναι εξωτερική, οπότε $M_1 = B + B\Delta M$. Όμως $M_1 = \Gamma\Delta E$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AM , $E\Delta$ που τέμνονται από την ME , άρα $B + B\Delta M = \Gamma\Delta E$.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

2^ο Θέμα

1599. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν M και N είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $M\Delta = M\Gamma$

(Μονάδες 12)

β) Η ευθεία MN είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 13)

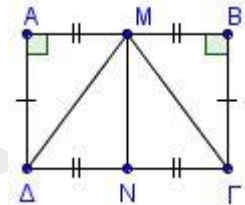
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AM\Delta$ και $MB\Gamma$ έχουν:

- 1) $A\Delta = B\Gamma$ απέναντι πλευρές ορθογωνίου και
- 2) $AM = MB$ γιατί το M είναι μέσο του AB .

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $M\Delta = M\Gamma$.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο $M\Gamma\Delta$ το MN είναι διάμεσος, άρα είναι και ύψος, δηλαδή το MN είναι μεσοκάθετος του $\Gamma\Delta$.



1653. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο A είναι μέσο του BE .

(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

γ) $B\Gamma A = A\Delta E$

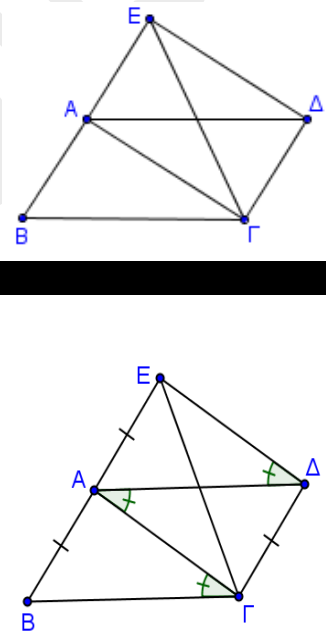
(Μονάδες 8)

Λύση

α) Είναι $AB = \Gamma\Delta$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ και $AE = \Gamma\Delta$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $A\Gamma\Delta E$, άρα είναι και $AB = AE$, δηλαδή το A είναι μέσο του BE .

β) Είναι $B\Gamma = A\Delta$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Όμως $A\Delta = \Gamma E$ γιατί οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες, άρα $B\Gamma = \Gamma E$, οπότε το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $B\Gamma A = \Gamma A \Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Delta$, $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$ και $A\Delta E = \Gamma A \Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma$, ΔE που τέμνονται από την $A\Delta$, άρα είναι και $B\Gamma A = A\Delta E$.



1668. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στα σημεία B και Γ φέρουμε κάθετες στη $B\Gamma$ προς το ίδιο μέρος και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $M\Delta = ME$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.

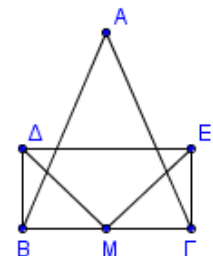
(Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)

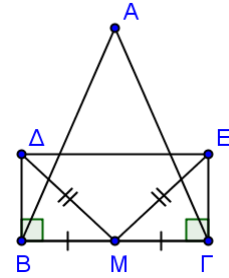
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και $M\Gamma E$ έχουν:



- 1) $MB = MG$ επειδή το M είναι μέσο του BG και
 2) $MD = ME$, άρα τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά ίσες μία προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα.
 Επομένως $BD = GE$

β) Επειδή $BD \perp BG$ και $GE \perp BG$ είναι $BD \parallel GE$. Επιπλέον $BD = GE$ γιατί τα τρίγωνα BDM και MGE είναι ίσα, οπότε στο τετράπλευρο $BDEG$ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\angle BGD = 90^\circ$, το τετράπλευρο $BDEG$ είναι ορθογώνιο.



1683. Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε δύο διαμέτρους AB και $\Gamma\Delta$.

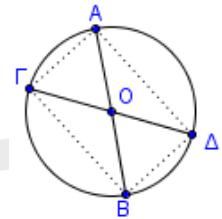
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές $A\Gamma$ και $B\Delta$ του κύκλου είναι ίσες.

(Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα τρίγωνα OAG και OBD έχουν:

- 1) $OA = OB = r$
- 2) $OG = OD = r$ όπου r η ακτίνα του κύκλου και
- 3) $\angle AOG = \angle BOD$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AG = BD$.

β) Επειδή $OA = OB = OG = OD = r$, οι διαγώνιες $AB, \Gamma\Delta$ του τετραπλεύρου $A\Gamma B\Delta$ διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

1692. Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = \Gamma K$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $\Gamma K\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AN\Delta$ και $\Gamma K\Delta$ έχουν:

- $AN = \Gamma K$ (υπόθεση)
- $\angle A = \angle \Gamma$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου

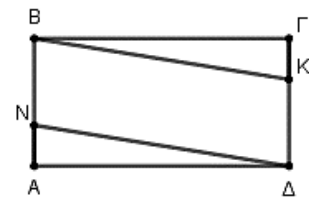
Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα.

β) Είναι $AB = \Gamma\Delta$ και $AN = \Gamma K$, οπότε και

$$AB - AN = \Gamma\Delta - \Gamma K \Leftrightarrow BN = K\Delta$$

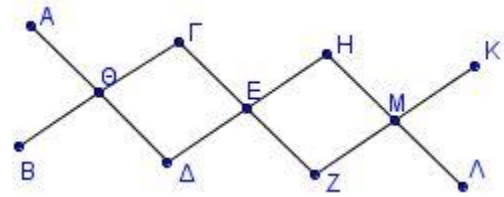
Ακόμη επειδή τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $\Gamma K\Delta$ είναι ίσα, έχουν και $\angle AN\Delta = \angle \Gamma K\Delta$.

Το τετράπλευρο $NBK\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και είναι παραλληλόγραμμο.



4^ο Θέμα

1714. Στην διπλανή εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 6)

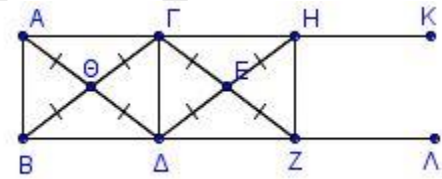
Λύση

α) Επειδή $ΕΓ = ΕΔ = ΕΗ = ΕΖ$, στο τετράπλευρο ΓΗΖΔ οι διαγώνιες του διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο.

β) Επειδή $ΘΑ = ΘΒ = ΘΓ = ΘΔ$, στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι διαγώνιες του διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο, οπότε $ΒΔΓ = 90^\circ$.

Επειδή το ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο, είναι $ΓΔΖ = 90^\circ$.

Είναι $ΒΔΖ = ΒΔΓ + ΓΔΖ = 180^\circ$, οπότε τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.



γ) Το τετράπλευρο ΘΓΔΕ έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Άρα είναι ρόμβος και $ΓΘΔ = ΓΕΔ$. Τα τρίγωνα ΒΘΔ και ΕΔΖ έχουν

- $ΒΘΔ = ΔΕΖ$ σαν εφεξής και παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $ΓΘΔ, ΓΕΔ$
- $ΒΘ = ΔΕ$
- $ΘΔ = ΕΖ$

Επομένως τα τρίγωνα ΒΘΔ και ΕΔΖ είναι ίσα και $ΒΔ = ΔΖ$.

Επειδή το ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι ίσα και παράλληλα.

Όμως τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά. Άρα τα τμήματα ΑΓ και ΔΖ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

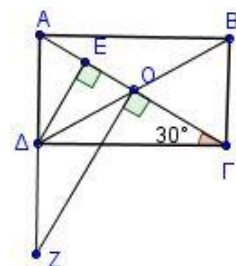
1729. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $ΔΓΑ = 30^\circ$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε $ΔΕ \perp ΑΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΑΔΓ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες.

(Μονάδες 13)

β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου ΑΔΓ έχουμε:

$$\Delta ΑΓ + \Delta ΓΑ = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta ΑΓ + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta ΑΓ = 60^\circ.$$

Οι ΑΓ, ΒΔ είναι διαγώνιες του ορθογώνιου και είναι ίσες, άρα και $ΟΑ = ΟΔ$ ως μισά των ίσων διαγωνίων. Το τρίγωνο ΟΑΔ έχει $ΟΑ = ΟΔ$ και $\Delta ΑΓ = 60^\circ$, οπότε είναι ισόπλευρο.

Το ΔΕ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, άρα είναι και διχοτόμος του, δηλαδή $\Delta ΑΕ = \Delta ΕΟ = 30^\circ$.

Είναι $\angle \Delta \Gamma = 90^\circ - \angle \Delta \Theta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Επειδή $\angle \Delta \Theta = \angle \Delta \Theta = \angle \Delta \Gamma = 30^\circ$, η γωνία $\Delta \Gamma$ χωρίζεται από τη $\Delta \Theta$ και τη διαγώνιο $\Delta \Theta$ σε τρεις ίσες γωνίες.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta \Theta$ και $\Delta \Gamma$ έχουν:

- 1) $\Delta \Theta = \Delta \Gamma$ γιατί $\Delta \Theta = \Delta \Gamma$ από το ισόπλευρο $\Delta \Theta$ και $\Delta \Gamma = \Delta \Gamma$ απέναντι πλευρές στο ορθογώνιο
- 2) $\angle \Gamma \Theta = 90^\circ - \angle \Gamma \Delta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ = \angle \Delta \Gamma$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

1733. Έστω ϵ_1, ϵ_2 δύο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο O και τυχαίο σημείο M του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του M ως προς την ϵ_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ϵ_2 , να αποδείξετε ότι:

- i. $OM = OM_1$. (Μονάδες 6)
- ii. Τα σημεία M, O και M_2 είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)
- iii. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό του M_2 ως προς την ϵ_1 , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

Λύση

α) i. Επειδή το M_1 είναι το συμμετρικό του M ως προς την ϵ_1 , η ϵ_1 είναι μεσοκάθετος του MM_1 . Το O ανήκει στη μεσοκάθετο του MM_1 , οπότε ισαπέχει από τα M και M_1 , δηλαδή $OM = OM_1$.

ii. Επειδή το τρίγωνο OMM_1 είναι ισοσκελές με βάση τη MM_1 είναι $OMM_1 = OM_1M = \omega$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου OMM_1 , έχουμε:

$$\angle MOM_1 + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \angle MOM_1 = 180^\circ - 2\omega \quad (1)$$

Επειδή το M_2 είναι το συμμετρικό του M_1 ως προς την ϵ_2 , η ϵ_2 είναι μεσοκάθετος του M_1M_2 . Το τρίγωνο OM_1M_2 είναι ισοσκελές με βάση τη M_1M_2 , άρα $\angle OM_1M_2 = \angle OM_2M_1 = \varphi$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου OM_1M_2 , έχουμε:

$$\angle M_2OM_1 + 2\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \angle M_2OM_1 = 180^\circ - 2\varphi \quad (2)$$

Επειδή $MM_1 \perp \epsilon_1$, $M_1M_2 \perp \epsilon_2$ και $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$, είναι και $M_1M_2 \perp MM_1$, άρα $\angle MM_1M_2 = \omega + \varphi = 90^\circ$

$$\angle MOM_2 = \angle MOM_1 + \angle M_2OM_1 = 180^\circ - 2\omega + 180^\circ - 2\varphi = 360^\circ - 2(\omega + \varphi) = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$$

άρα τα σημεία M, O και M_2 είναι συνευθειακά.

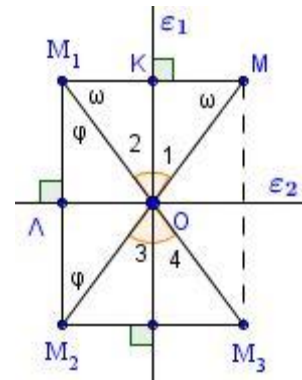
iii. Είναι $\angle MM_1M_2 = \omega + \varphi = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.

β) Είναι $M_2M_3 \perp \epsilon_1$, άρα $M_2M_3 \parallel MM_1$.

M_1O, M_3 συνευθειακά (απόδειξη όμοια με α)ii)

Τα τρίγωνα OMM_1 και OM_2M_3 έχουν $OM = OM_1 = OM_2 = OM_3$ και

$$\angle MOM_1 = \angle O_1 + \angle O_2 = \angle O_3 + \angle O_4 = \angle M_3OM_2, \text{ άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και } M_2M_3 = MM_1.$$



Το τετράπλευρο $MM_1M_2M_3$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον $MM_1M_2 = 90^\circ$, οπότε το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

1735. Θεωρούμε ευθεία (ε) και δύο σημεία A και B εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των A και B αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι $AA' \parallel BB'$.

(Μονάδες 6)

β) Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη σχέση των ευθειών AB και (ε) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Επειδή $AA' \perp \varepsilon$ και $BB' \perp \varepsilon$, είναι $AA' \parallel BB'$.

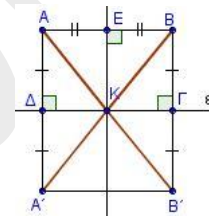
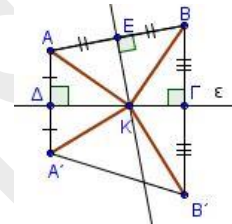
β) Επειδή το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετο του AB ισαπέχει από τα A και B , δηλαδή $KA = KB$ (1).

Επειδή το A' είναι το συμμετρικό του A ως προς την (ε), η $K\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AA' , άρα $KA = KA'$ (2).

Επειδή το B' είναι το συμμετρικό του B ως προς την (ε), η $K\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του BB' , άρα $KB = KB'$ (3).

Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι $KA' = KB'$, δηλαδή το K ισαπέχει από τα A' και B' , άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του $A'B'$.

γ) Όταν το $ABB'A'$ είναι ορθογώνιο, τότε το $A\Delta K\epsilon$ είναι ορθογώνιο, οπότε $AB \perp AA'$, $\varepsilon \perp AA'$, άρα $AB \parallel \varepsilon$.



1800. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$ και το ύψος του BH . Από το M φέρουμε κάθετες $M\Delta$, ME και $M\Theta$ στις AB , $A\Gamma$ και BH αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

β) $B\Theta = \Delta M$.

(Μονάδες 9)

γ) $M\Delta + ME = BH$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.

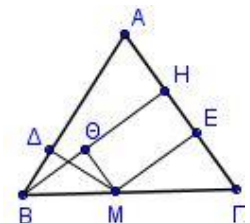
β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και $B\Theta M$ έχουν:

1) $\Delta BM = \Theta MB$, γιατί $\Delta BM = \Gamma$ (στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$) και $\Theta MB = \Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $M\Theta$, ΓA που τέμνονται από την $B\Gamma$.

2) τη πλευρά MB κοινή.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Theta = \Delta M$,

γ) $M\Delta + ME \stackrel{B\Theta = \Delta M}{=} B\Theta + \Theta H = BH \quad ME = \Theta H$ (Απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $MEH\Theta$)



1816. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ΔK κάθετη στην AB και ΔE κάθετη στην προέκταση της $A\Gamma$. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓH κάθετη στην AB και ΓZ κάθετη στην $K\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $Z\Gamma\Delta$ είναι ίση με τη B .

(Μονάδες 4)

β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\Gamma E$.

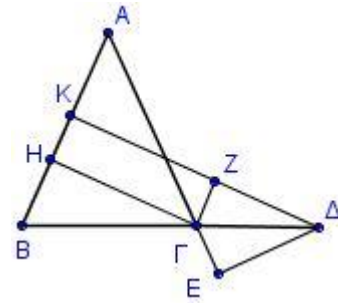
(Μονάδες 4)

γ) Το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

δ) $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Επειδή $\Gamma Z \perp \Delta K$ και $BA \perp \Delta K$, οι ευθείες ΓZ και AB είναι παράλληλες.

Οι γωνίες $Z\Gamma\Delta$ και B είναι ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma Z$ που τέμνονται από την $B\Delta$.

β) Είναι $\Delta\Gamma E = A\Gamma B$ ως κατακορυφήν, $A\Gamma B = B$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου και $B = Z\Gamma\Delta$, άρα και $\Delta\Gamma E = Z\Gamma\Delta$, οπότε η $\Gamma\Delta$ διχοτομεί τη γωνία $Z\Gamma E$.

γ) Τα ορθογώνια τρίγωνα $Z\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ έχουν:

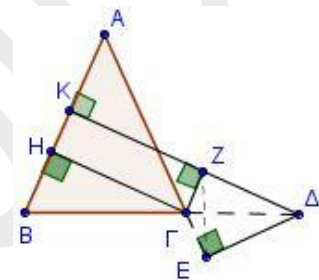
1) τη πλευρά $\Delta\Gamma$ κοινή και

2) $\Delta\Gamma E = Z\Gamma\Delta$,

δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία

γωνία του ενός τριγώνου ισούται με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα και έχουν $\Delta Z = \Delta E$. Άρα το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές.

δ) Το τετράπλευρο $KH\Gamma Z$ έχει 3 ορθές οπότε είναι ορθογώνιο. Οι $KZ, H\Gamma$ είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου και είναι ίσες. Είναι $\Delta K - \Delta E = \Delta Z + ZK - \Delta Z = ZK = H\Gamma$



1833. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσό του AM την οποία προεκτείνουμε, προς το μέρος του M , κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔK κάθετη στη $B\Gamma$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας B στο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

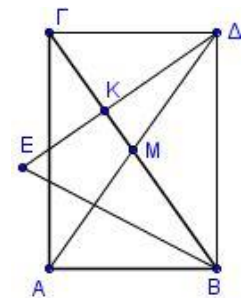
(Μονάδες 8)

β) $\angle KEB = 90^\circ - \frac{B}{2}$

(Μονάδες 8)

γ) $\Delta E = B\Delta$.

(Μονάδες 9)



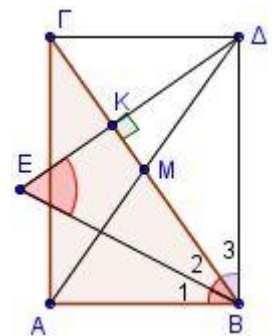
Λύση

α) Επειδή $AM = M\Delta$ και $BM = M\Gamma$, οι διαγώνιες του τετράπλευρου $AB\Delta\Gamma$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον έχει $A = 90^\circ$, άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου EKB έχουμε:

$$\angle KEB + B_2 = 90^\circ \Leftrightarrow \angle KEB + \frac{B}{2} = 90^\circ \Leftrightarrow \angle KEB = 90^\circ - \frac{B}{2}$$

γ) Είναι $\angle BE\Delta = 90^\circ - B_1 = 90^\circ - \frac{B}{2} = \angle KEB$, δηλαδή το τρίγωνο ΔBE έχει δύο γωνίες του ίσες, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την BE και έχει $\Delta E = B\Delta$

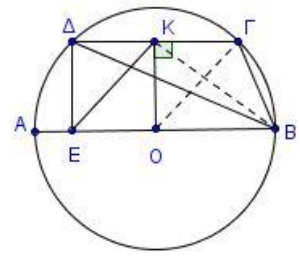


1879. Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB . Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ και K το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔE κάθετο στη $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $KGOE$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) $\Delta EK = \frac{\Delta O\Gamma}{2}$ (Μονάδες 12)

γ) $KE < KB$ (Μονάδες 5)



Λύση

α) Επειδή $\Delta E \perp \Delta\Gamma$ και $\Gamma\Delta \parallel AB$ είναι και $\Delta E \perp AB$.

Επειδή το OK είναι απόστημα της χορδής AB , είναι $OK \perp \Gamma\Delta$. Το τετράπλευρο ΔEOK έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο, άρα $\Delta K = EO$. Όμως $\Delta K = KG$, άρα $KG = EO$, οπότε το $KGOE$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔEK και ΔOK έχουν:

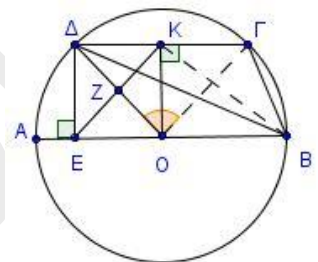
1) τη πλευρά ΔK κοινή και

2) $\Delta E = OK$,

άρα τα δύο τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες και είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta EK = \Delta OK$.

Στο τρίγωνο ΔOG η OK είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και η OK είναι και διχοτόμος. Άρα $\Delta OG = 2\Delta OK = 2\Delta EK \Leftrightarrow$

$$\Delta EK = \frac{\Delta OG}{2}$$



γ) Είναι $KE = OD$ (διαγώνιοι ορθογωνίου $KEOD$), $OD = OB$ (Ακτίνες)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει: $OB < BK$, άρα $KE < KB$.

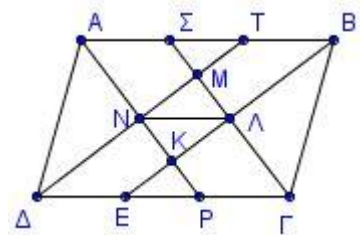
1891. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > AD$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του AP , BE , $\Gamma\Sigma$ και ΔT (όπου P, E στην $\Delta\Gamma$ και Σ, T στην AB) τέμνονται στα σημεία K, Λ, M και N όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

γ) $\Lambda N \parallel AB$ (Μονάδες 5)

δ) $\Lambda N = AB - AD$ (Μονάδες 5)



Λύση

α) Τα τρίγωνα $\Delta\Delta T$ και $B\Gamma E$ έχουν:

1) $B_1 = \Delta_1$ γιατί είναι μισά των απέναντι γωνιών B και Δ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$

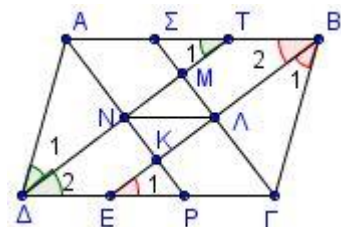
2) $AD = B\Gamma$ απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου κοινή και

3) $A = \Gamma$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου

Με βάση το κριτήριο $\Gamma\Pi\Gamma$ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta T = BE$ (1) και $AT = E\Gamma$.

Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ και $BT = \Delta E$, είναι και $BT = \Delta E$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.



β) Όμοια ΑΣΓΡ παραλληλόγραμμο οπότε $AP \parallel \Sigma\Gamma$ και $NK \parallel ML$ Επειδή το ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο, είναι $MN \parallel KL$, οπότε και το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $\Delta_2 = T_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ που τέμνονται από την ΔΤ και

$\Delta_2 = \Delta_1$ γιατί η ΔΤ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ, άρα είναι και $\Delta_1 = T_1$.

Το τρίγωνο ΑΔΤ έχει δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την ΔΤ. Η ΑΝ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΔΤ, οπότε είναι ύψος και διάμεσός του, δηλαδή $N = 90^\circ$. Επειδή το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μία ορθή, είναι ορθογώνιο.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΤ και ΒΕΓ είναι ίσα και $AD = AT$ αφού το τρίγωνο ΑΔΤ είναι ισοσκελές, είναι $AD = AT = GE = GB$. Η ΓΛ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΒΕ, οπότε είναι και διάμεσός του,

άρα $BL = \frac{BE}{2}$. Όμως $TN = \frac{TD}{2}$ και $TD = BE$ αφού το ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $BL = TN$.

Επειδή είναι και $BL \parallel TN$ αφού $TD \parallel BE$, το τετράπλευρο ΒΤΝΛ είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε $LN \parallel AB$.

δ) Είναι $LN = BT = AB - AT \stackrel{AT=AD}{=} AB - AD$
ΑΔΤ ισοσκελές

13523. Ο χαρταετός του σχήματος είναι ένα εξάγωνο με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

α) Να αποδείξετε ότι $AE = BD$.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι $AE \perp ED$.

(Μονάδες 08)

γ) i. Αν οι ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο Ο, τότε να αποδείξετε ότι $2BO = AD$. (Μονάδες 05)

ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι υπάρχει κύκλος με διάμετρο την ΑΔ που διέρχεται από το Β. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)



Λύση

α) Στο εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ οι πλευρές και οι γωνίες του είναι ίσες. Έστω λ το μήκος της πλευράς του εξαγώνου και φ η γωνία του.

Τα τρίγωνα ΑΖΕ και ΒΓΔ έχουν:

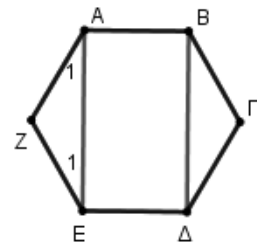
- $AZ = BG = \lambda$, από την υπόθεση,

- $ZE = GD = \lambda$, από την υπόθεση,

- $Z = \Gamma = \phi$

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΖΕ και ΒΓΔ είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.

Άρα, $AE = BD$, γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες Ζ και Γ.



β) Το άθροισμα των γωνιών του εξαγώνου είναι $(2n-4)$ ορθές, δηλαδή $(2 \cdot 6 - 4) \cdot 90^\circ = 720^\circ$. Επειδή όλες οι γωνίες ίσες, η κάθε μία θα είναι $720^\circ : 6 = 120^\circ$.

Το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΕ, οπότε $A_1 = E_1$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΕ έχουμε:

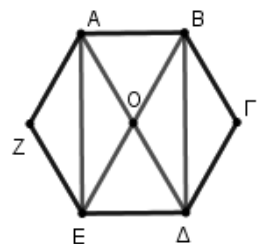
$$A_1 + E_1 + Z = 180^\circ \Leftrightarrow 2E_1 + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2E_1 = 60^\circ \Leftrightarrow E_1 = 30^\circ.$$

Τότε $AE\Delta = E - E_1 = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$, οπότε οι ΑΕ, ΕΔ είναι κάθετες.

γ) i. Επειδή $AB = ED$ και $AE = BD$, το ΑΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες. Επιπλέον όμως έχει και μια γωνία, την

ΑΕΔ, ορθή, οπότε είναι ορθογώνιο.

Οι διαγώνιες του ΑΔ και ΒΕ είναι ίσες και διχοτομούνται, επομένως



$$2BO = 2 \cdot \frac{BE}{2} = BE = A\Delta$$

ii. Επειδή $BO = AO = OD$, τα A, B, Δ ισαπέχουν από το O , οπότε βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το O και ακτίνα OB . Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

13699. Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A . Έστω ότι μια ευθεία (ϵ) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους B και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους A τέμνει την ευθεία (ϵ) σε σημείο M .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι ευθείες KB και ΛM τέμνονται σε σημείο, έστω Δ . (Μονάδες 10)

ii. το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

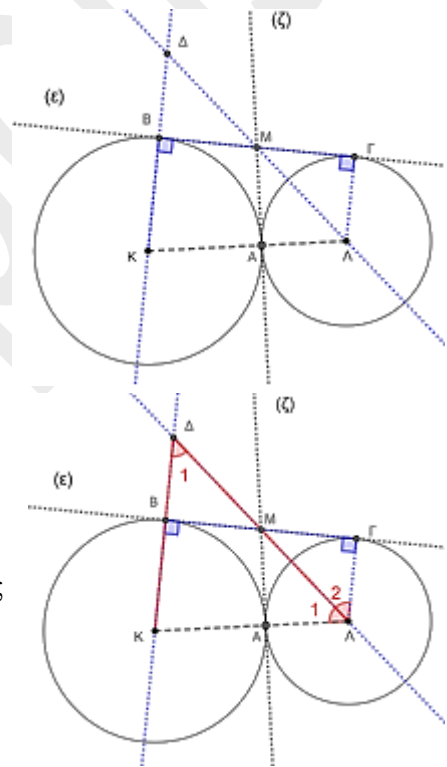
Λύση

α) Έστω KB και $\Lambda\Gamma$ οι ακτίνες των δυο κύκλων (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) στα σημεία επαφής B και Γ αντίστοιχα. Τότε τα KB και $\Lambda\Gamma$ θα είναι κάθετα στην (ϵ) , οπότε θα είναι $KB \parallel \Lambda\Gamma$ ως κάθετες στην ίδια ευθεία (ϵ) . Η ΛM δεν είναι κάθετη στην (ϵ) , γιατί αν η ΛM ήταν κάθετη στη (ϵ) τότε από το σημείο Λ θα άγονταν δυο κάθετες στην (ϵ) , η ΛM και η $\Lambda\Gamma$ ως ακτίνα στο σημείο επαφής Γ του κύκλου (Λ, ρ_2) με την ευθεία (ϵ) , που είναι άτοπο, και αφού η ΛM τέμνει την $\Lambda\Gamma$ στο Λ θα τέμνει και την παράλληλή της την KB έστω σε σημείο Δ .

β) Είναι $K\Delta \parallel \Lambda\Gamma$ και τις τέμνει η $\Lambda\Delta$, οπότε $\Delta_1 = \Delta_2$ (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ. Η $\Delta\Lambda$ είναι διακεντρική ευθεία του σημείου M στον κύκλο (Λ, ρ_2) , οπότε θα διχοτομεί τη γωνία $\Gamma\Lambda A$ των ακτίνων στα σημεία επαφής Γ και A , δηλαδή είναι $\Delta_2 = \Delta_1$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Delta_1 = \Delta_1$. Οπότε το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ έχει δυο γωνίες ίσες, άρα θα είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις $K\Lambda$ και $K\Delta$ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες Δ_1 και Δ_1 αντίστοιχα.

γ) Το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ με ίσες πλευρές τις $K\Lambda$, KB θα είναι ορθογώνιο όταν $\Delta K\Lambda = 90^\circ$.

Αν $\Delta K\Lambda = 90^\circ$ τότε η $K\Lambda$ είναι κάθετη στην $K\Delta$. Αν η $K\Lambda$ είναι κάθετη στην $K\Delta$, τότε η $K\Lambda$ θα είναι παράλληλη με την ευθεία (ϵ) ως κάθετες στην ίδια ευθεία $K\Delta$, οπότε και το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma B$ θα είναι ορθογώνιο γιατί θα είχε τρεις ορθές γωνίες, τις $\Delta K\Lambda$, $K\Lambda\Gamma$ και $\Lambda\Gamma B$. Αν το $K\Lambda\Gamma B$ είναι ορθογώνιο τότε θα ισχύει $KB = \Lambda\Gamma$ ή $\rho_1 = \rho_2$. Επομένως, αν οι κύκλοι είναι ίσοι, τότε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ θα είναι ορθογώνιο.



13746. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμέσός του $A\Delta$. Στην προέκταση της διαμέσου $A\Delta$ προς το Δ παίρνουμε σημείο E , έτσι ώστε $A\Delta = \Delta E$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 07)

ii. Η διάμεσος $A\Delta$ είναι μικρότερη από το ημίθροισμα των πλευρών AB και $A\Gamma$ που την περιέχουν. (Μονάδες 08)

β) Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το διπλάσιο της διαμέσου $A\Delta$ ισούται με την πλευρά $B\Gamma$, να χαρακτηρίσετε

το είδος του τετράπλευρου ΑΒΕΓ και το είδος του τριγώνου ΑΒΓ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)

Λύση

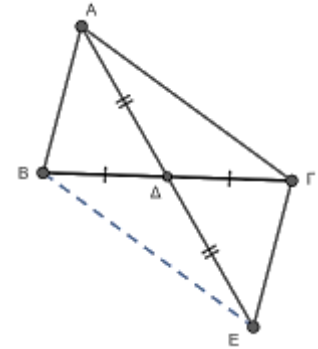
α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ έχουν:

- $AD = DE$, από υπόθεση
- $BD = DG$, διότι Δ μέσο της ΒΓ

• $\angle ADB = \angle EDG$ ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές, ίσες, οπότε από το κριτήριο ΠΓΠ είναι ίσα.

Επομένως θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες, δηλαδή $AB = GE$ (1).



ii. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε :

$AE < AG + AB$. Όμως $AE = 2AD$, οπότε έχουμε ότι

$$2AD < AB + AG \Leftrightarrow AD < \frac{AB + AG}{2}$$

Δηλαδή η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ που την περιέχουν.

β) Δίνεται ότι $2AD = BG$ ή $AE = BG$. Δηλαδή στο τετράπλευρο ΑΒΕΓ οι διαγωνίες του είναι ίσες.

Επιπλέον έχουμε ότι $AD = DE$ από την κατασκευή και $BD = DG$, αφού Δ μέσο της ΒΓ.

Δηλαδή οι διαγωνίες του τετράπλευρου ΑΒΕΓ διχοτομούνται, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επιπλέον είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Τότε στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\angle A = 90^\circ$, αφού το ΑΒΕΓ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, άρα το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

14887. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\angle A\hat{H} = 90^\circ$

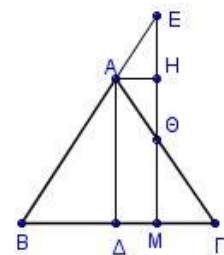
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) $M\Theta + ME = 2AD$.

(Μονάδες 9)



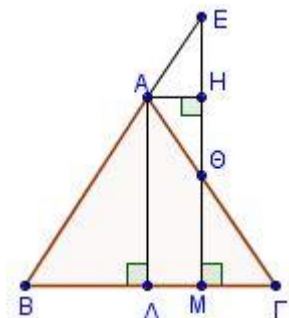
Λύση

α) Το τετράπλευρο ΔΜΗΑ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο. Άρα

$$\angle A\hat{H} = 90^\circ.$$

β) Το ΑΔ είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, άρα είναι διάμεσος και διχοτόμος του. Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, η ΑΗ είναι κάθετη στην ΑΔ, άρα η ΑΗ θα διχοτομεί την γωνία ΘΑΕ που είναι εφεξής και παραπληρωματική της Α.

Στο τρίγωνο ΑΘΗ το ΑΗ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



γ) Είναι $AD = MH$ γιατί είναι απέναντι πλευρές ορθογωνίου και $\Theta H = HE$ αφού η ΑΗ εκτός από ύψος και διχοτόμος είναι και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΘΗ.

$$\text{Είναι } M\Theta + ME = M\Theta + M\Theta + \Theta E = 2M\Theta + 2\Theta H = 2(M\Theta + \Theta H) = 2MH = 2AD$$

ΡΟΜΒΟΣ**2^ο Θέμα**

1570. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε το $A\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω K το συμμετρικό του B ως προς το Δ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

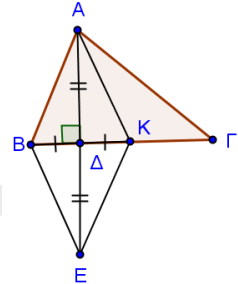
β) Το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Στο τρίγωνο ABK το $A\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Επειδή $\Delta E = A\Delta$, $B\Delta = \Delta K$ και $AE \perp BK$, στο τετράπλευρο $ABEK$ οι διαγώνιές του διχοτομούνται κάθετα, άρα είναι ρόμβος.



1575. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$.

(Μονάδες 12)

β) Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Έστω ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και AEB έχουν:

1) $A\Delta = AB$ πλευρές του ρόμβου και

2) $\Delta = B$ απέναντι γωνίες του ρόμβου.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AZ = AE$.

β) Έστω ότι στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AZ = AE$.

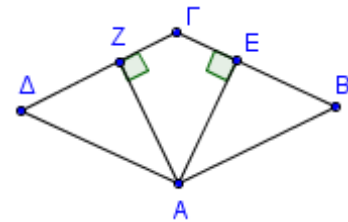
Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και AEB έχουν:

1) $AZ = AE$ και

2) $\Delta = B$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\Delta = AB$.

Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι ρόμβος.



1584. Σε κύκλο κέντρου O , έστω OA μια ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της OA που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο OBA είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι ρόμβος.

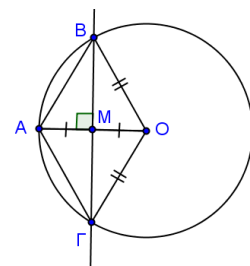
(Μονάδες 12)

Λύση

α) Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου. Τότε $OA = OB = O\Gamma = \rho$.

Στο τρίγωνο BAO η BM είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την OA , οπότε

$AB = OB = \rho$. Στο τρίγωνο BAO και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι ισόπλευρο.



β) Στο τρίγωνο ΓΑΟ η ΓΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την ΟΑ, οπότε $ΑΓ = ΟΓ = ρ$. Το τετράπλευρο ΟΒΑΓ έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι ρόμβος.

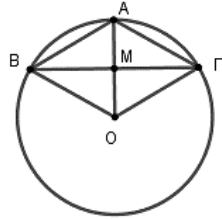
1679 (Ίδια με την 1584). Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου. Τότε $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ρ$.

Στο τρίγωνο ΒΑΟ η ΒΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την ΟΑ, οπότε $ΑΒ = ΟΒ = ρ$. Στο τρίγωνο ΑΓΟ η ΓΜ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την ΟΑ, δηλαδή $ΑΓ = ΟΓ$. Επειδή το τετράπλευρο ΑΓΟΒ έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες είναι ρόμβος.

β) Στο τρίγωνο ΒΑΟ και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι ισόπλευρο, οπότε $ΟΒΑ = 60^\circ$. Επειδή οι απέναντι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες, είναι και $ΟΓΑ = ΟΒΑ = 60^\circ$. Επειδή οι γωνίες ΟΒΑ και ΒΟΓ είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΟΓ που τέμνονται από την ΟΒ, είναι $ΟΒΑ + ΒΟΓ = 180^\circ \Leftrightarrow ΒΟΓ = 120^\circ$ και $ΒΑΓ = ΒΟΓ = 120^\circ$.

1630. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε από την κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι $ΔΑ = ΔΒ$ και $ΕΑ = ΕΒ$. (Μονάδες 6)

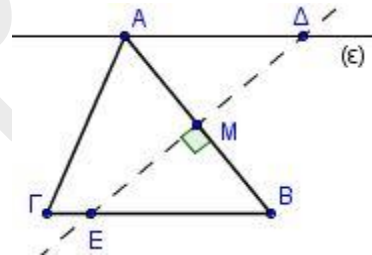
β) Αν Μ το μέσο του ΑΒ, να συγκρίνετε τα

τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή τα σημεία Ε, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ ισαπέχουν από τα σημεία Α και Β, δηλαδή $ΔΑ = ΔΒ$ και $ΕΑ = ΕΒ$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ έχουν:

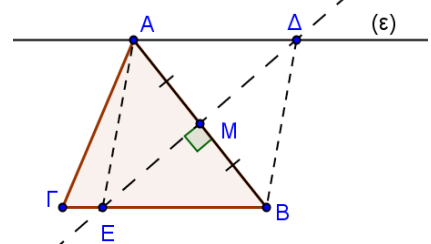
1) $ΑΜ = ΜΒ$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΑΒ και

2) $ΜΑΔ = ΜΒΕ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων (ε), ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ.

Τα τρίγωνα έχουν μια κάθετη τους πλευρά και μια οξεία γωνία τους ίσα, άρα είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΕΒ είναι ίσα, έχουν και $ΜΔ = ΜΕ$.

Στο τετράπλευρο ΑΔΒΕ οι διαγώνιές του διχοτομούνται κάθετα, οπότε είναι ρόμβος.



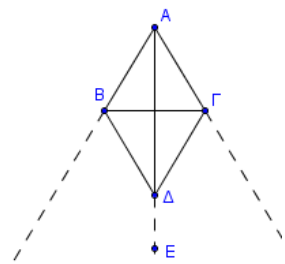
1681. Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Το Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα).

(Μονάδες 10)

β) Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ.

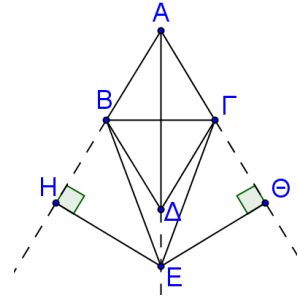
(Μονάδες 15)



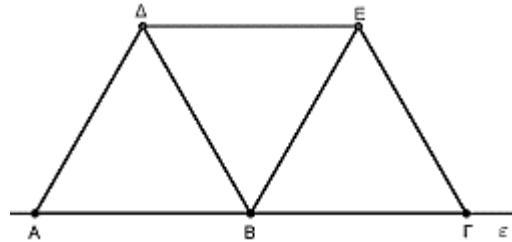
Λύση

α) Επειδή οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α. Επειδή το Ε είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας Α, ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, δηλαδή ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ. (HE = HΘ)

β) Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούνται κάθετα, άρα η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ. Επειδή το Ε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ, ισαπέχει από τα Β και Γ. (EB = ΕΓ)



13767. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ έτσι ώστε $AB = BG$. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΒΕ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Οι γωνίες των ισόπλευρων τριγώνων ΑΒΔ και ΒΓΕ είναι 60° καθεμιά. Η γωνία ΑΒΓ είναι ευθεία, οπότε:

$$AB\Delta + \Delta BE + EB\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \Delta BE + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta BE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

β) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΔ ισχύει: $AB = AD = BD$ (1)

Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΕ ισχύει: $B\Gamma = BE = GE$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $BD = BE$, αφού $AB = B\Gamma$ από υπόθεση.

Επομένως, το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ, οπότε οι γωνίες που είναι προσκείμενες στη βάση θα είναι ίσες. Συνεπώς, $B\Delta E = BE\Delta$ (3).

Στο τρίγωνο ΒΔΕ ισχύει:

$$B\Delta E + BE\Delta + \Delta BE = 180^\circ \Leftrightarrow B\Delta E + B\Delta E + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2B\Delta E = 120^\circ \Leftrightarrow B\Delta E = 60^\circ = BE\Delta.$$

Αφού οι γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ είναι ίσες με 60° καθεμιά, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.

ή

Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΔ ισχύει: $AB = AD = BD$ (1)

Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΕ ισχύει: $B\Gamma = BE = GE$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $BD = BE$, αφού $AB = B\Gamma$ από υπόθεση.

Επομένως, το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με τη γωνία του $\Delta BE = 60^\circ$ οπότε είναι ισόπλευρο.

γ) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΒΔΕ ισχύει: $DE = BE = BD$ (4)

Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, αφού $AD = AB = BE = DE$ από τις σχέσεις (1), (2) και (4), οπότε είναι ρόμβος.

4^ο Θέμα

1740. Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

(Μονάδες 20)

β) Στην περίπτωση που οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

Λύση

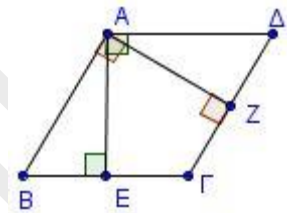
α) **Π1:** Έστω ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος και έστω AE η απόσταση των παραλλήλων AD, BG και AZ η απόσταση των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα AEB και $A\Delta Z$ έχουν:

1) $AB = A\Delta$ πλευρές του ρόμβου

2) $B = \Delta$ απέναντι γωνίες του ρόμβου.

Τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AE = AZ$.



Π2: Έστω ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και οι αποστάσεις AE, AZ είναι ίσες.

Τα ορθογώνια τρίγωνα AEB και $A\Delta Z$ έχουν:

1) $AE = AZ$

2) $B = \Delta$ απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου.

Τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AB = A\Delta$.

Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

β) Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν, οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

1840. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία K, Λ της διαγωνίου του BA , τέτοια, ώστε να ισχύει $BK = K\Lambda = \Lambda\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε και το $AK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

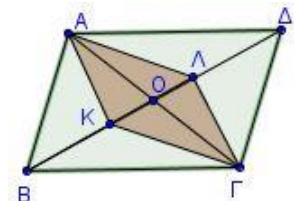
γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, ώστε το $AK\Gamma\Lambda$ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων $A\Gamma, B\Delta$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Επειδή οι διαγώνιες διχοτομούνται, είναι $BO = O\Delta$. Όμως $BK = \Lambda\Delta$, άρα και $BO - BK = O\Delta - \Lambda\Delta \Leftrightarrow KO = O\Lambda$.

Επειδή $AO = O\Gamma$ και $KO = O\Lambda$, το τετράπλευρο $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιές του διχοτομούνται.



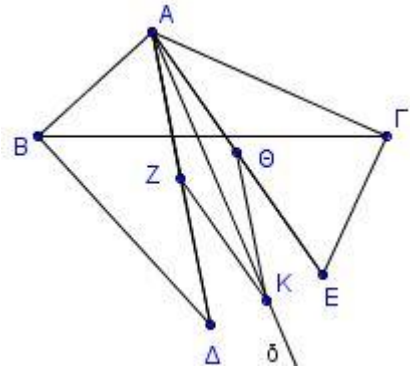
β) Αν το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος τότε οι διαγώνιες του $A\Gamma$ και $B\Delta$ θα είναι κάθετες. Τότε όμως και στο παραλληλόγραμμο $AK\Gamma\Lambda$ οι διαγώνιες του θα είναι κάθετες και θα είναι ρόμβος.

γ) Για να είναι το $AK\Gamma\Lambda$ ορθογώνιο πρέπει οι διαγώνιές του να είναι ίσες, δηλαδή $K\Lambda = A\Gamma$.

Όμως $K\Lambda = \frac{1}{3}B\Delta$, άρα $A\Gamma = \frac{1}{3}B\Delta \Leftrightarrow B\Delta = 3A\Gamma$.

1869. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και

$\angle A > 90^\circ$. Φέρνουμε τμήμα BD κάθετο στην AB και με $BD = A\Gamma$ και τμήμα GE κάθετο στην $A\Gamma$ με $GE = AB$. Θεωρούμε τα μέσα Z και Θ των AD και AE καθώς και τη διχοτόμο $A\delta$ της γωνίας $\angle A$.



- α) Να αποδείξετε ότι $AD = AE$. (Μονάδες 9)
 β) Αν K τυχαίο σημείο της διχοτόμου $A\delta$, να αποδείξετε ότι το K ισαπέχει από τα μέσα Z και Θ . (Μονάδες 9)
 γ) Αν το K είναι σημείο της διχοτόμου $A\delta$ τέτοιο, ώστε $KZ = AZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZK\Theta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABD και $A\Gamma E$ έχουν:

- 1) $GE = AB$ και
- 2) $BD = A\Gamma$,

δηλαδή έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, οπότε είναι ίσα και ισχύει ότι $AD = AE$.

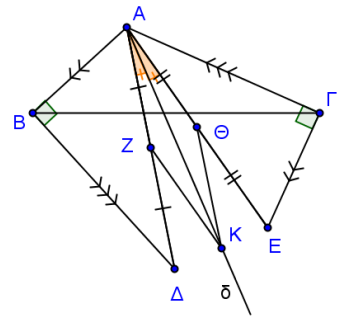
β) Αρκεί να δείξουμε ότι $KZ = K\Theta$.

Τα τρίγωνα AZK και $A\Theta K$ έχουν:

- 1) $AZ = A\Theta$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AD και AE
- 2) τη πλευρά AK κοινή και
- 3) $\angle ZAK = \angle K A \Theta$ λόγω της διχοτόμησης

Από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $KZ = K\Theta$.

γ) Αν $KZ = AZ$, τότε επειδή $KZ = K\Theta$ και $AZ = A\Theta$, το τετράπλευρο $AZK\Theta$ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

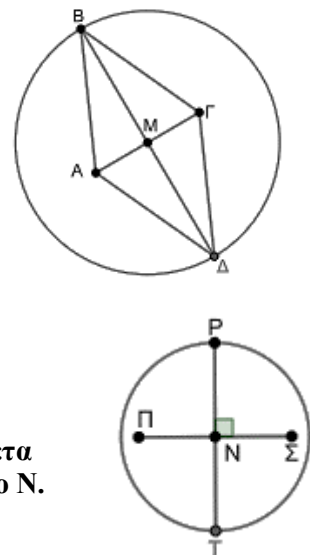


13857.α) Στο σχήμα η BD είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο M . Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή. Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος». Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση. (Μονάδες 10)

γ) Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα PT και $\Pi\Sigma$ τέμνονται κάθετα στο N και $\Pi N = N\Sigma$. Επίσης η PT είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το N . Να αποδείξετε ότι $PP = P\Sigma = \Sigma T = T\Pi$. (Μονάδες 7)



Λύση

α) Η BD είναι μεσοκάθετος της $A\Gamma$ από την υπόθεση, άρα ισχύει $AM = M\Gamma$.

Επιπλέον $BM = M\Delta$, γιατί από την υπόθεση το M είναι κέντρο του κύκλου με διάμετρο BD .

Επομένως, οι διαγώνιοι του $AB\Gamma\Delta$ διχοτομούνται, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

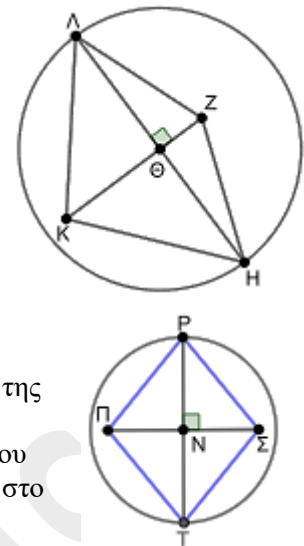
Ακόμα οι BD και $A\Gamma$ είναι κάθετες, γιατί η BD είναι μεσοκάθετος της $A\Gamma$ από την υπόθεση. Εφόσον οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι κάθετες το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

β) Η Πρόταση 1 έχει αποδειχθεί στο ερώτημα α), άρα είναι αληθής. Η Πρόταση 2 είναι ψευδής. Στο παρακάτω σχήμα η διαγώνιος ΛΗ του τετραπλεύρου ΚΛΖΗ είναι κάθετη στη διαγώνιό του ΖΚ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Θ, σημείο τομής των διαγωνίων. Δηλαδή το ΚΛΖΗ πληροί την υπόθεση της Πρότασης 2.

Ωστόσο το τετράπλευρο ΚΛΖΗ δεν είναι ρόμβος.

Πράγματι ισχύει $K\Theta > \Theta Z$, άρα οι διαγώνιοι του ΚΛΖΗ δεν έχουν κοινό μέσο (το Θ είναι μέσο της ΛΗ, αλλά όχι της ΖΚ). Άρα το ΚΛΖΗ δεν είναι παραλληλόγραμμο, γιατί αν ήταν θα έπρεπε $K\Theta = \Theta Z$ (καθώς οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται). Επομένως δεν είναι και ρόμβος.

γ) Σχεδιάζουμε το τετράπλευρο ΠΡΣΤ. Η διαγώνιος του ΡΤ είναι μεσοκάθετος της ΠΣ, εφόσον είναι κάθετες και $PN = N\Sigma$, από την υπόθεση. Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου που έχει ως κέντρο το Ν, σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου. Άρα από την Πρόταση 1 (του ερωτήματος β)) που αποδείχθηκε στο α) το ΠΡΣΤ είναι ρόμβος. Συνεπώς έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Δηλαδή $PR = PS = ST = TP$.



ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ**2^ο Θέμα**

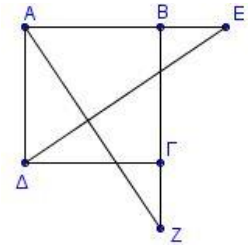
1643. Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και $B\Gamma$ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABZ και $AE\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Οι γωνίες $E\Delta\Gamma$ και AZB είναι ίσες.

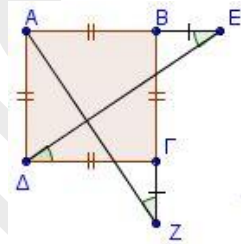
(Μονάδες 13)

**Λύση**

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABZ και $AE\Delta$ έχουν:

- 1) $A\Delta = AB$ πλευρές του τετραγώνου και
- 2) $AE = BZ$, γιατί $AB = B\Gamma$ και $BE = \Gamma Z$, άρα τα τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες και είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα $AE\Delta$ και AZB είναι ίσα έχουν και $\angle A\Delta E = \angle AZB$. Όμως $\angle A\Delta E = \angle E\Delta\Gamma$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την DE άρα και $\angle E\Delta\Gamma = \angle AZB$.



1651. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

i. $\angle ABE$

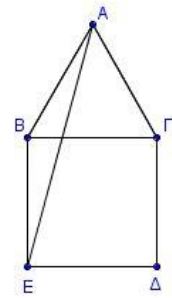
(Μονάδες 8)

ii. $\angle BEA$

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

**Λύση**

α) i. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του είναι ίσες με 60° , άρα $\angle A = \angle AB\Gamma = \angle A\Gamma B = 60^\circ$.

Επειδή το $B\Gamma\Delta E$ είναι τετράγωνο, οι γωνίες του είναι ορθές, άρα $\angle ABE = \angle AB\Gamma + \angle \Gamma BE = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

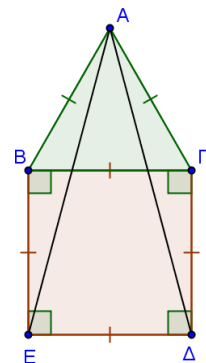
ii. Επειδή $AB = B\Gamma = BE$, το τρίγωνο BEA είναι ισοσκελές με βάση την AE , οπότε $\angle BEA = \angle BAE$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου BEA έχουμε:

$$\begin{aligned} \angle BEA + \angle BAE + \angle ABE &= 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle BEA + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \\ 2\angle BEA &= 30^\circ \Leftrightarrow \angle BEA = 15^\circ \end{aligned}$$

β) Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ έχουν:

- 1) $AB = A\Gamma$ πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου
- 2) $BE = \Gamma\Delta$ πλευρές του τετραγώνου
- 3) $\angle A\Gamma\Delta = \angle A\Gamma B + \angle B\Gamma\Delta = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ = \angle ABE$

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AE = A\Delta$, άρα το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.



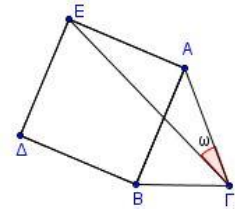
1652. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $AB\Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) $2\epsilon\Gamma A = 90^\circ - \beta A\Gamma$.

(Μονάδες 15)



Λύση

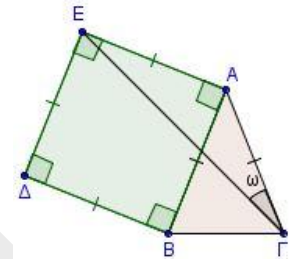
α) Είναι $AB = AE$ γιατί είναι πλευρές τετραγώνου και $AB = A\Gamma$, άρα $AE = A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $A\Gamma E$ έχει δύο πλευρές του ίσες και είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές ισχύει ότι $\angle A\Gamma E = \angle E\Gamma A$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Gamma E$ έχουμε:

$$\angle A\Gamma E + \angle E\Gamma A + \angle E\Gamma A = 180^\circ \Leftrightarrow 2\epsilon\Gamma A + 90^\circ + \beta A\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$2\epsilon\Gamma A = 90^\circ - \beta A\Gamma$$



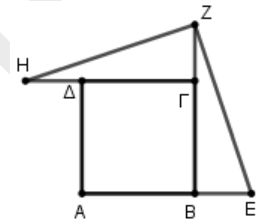
13536. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB προς το B , $B\Gamma$ προς το Γ και $\Gamma\Delta$ προς το Δ θεωρούμε σημεία E , Z και H αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z = \Delta H$.

α) Να αποδείξετε ότι $ZE = ZH$.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $\angle EZH = 90^\circ$.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $Z\Gamma H$ και BZE έχουν:

- $BE = \Gamma Z$ υπόθεση

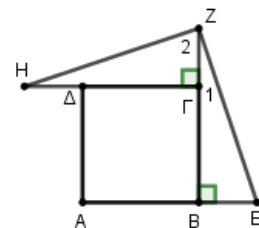
- $BZ = \Gamma H$ ως άθροισμα των ίσων τμημάτων $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ (πλευρές τετραγώνου) και ΓZ , ΔH (δεδομένο) αντίστοιχα.

Τα τρίγωνα BEZ και ΓZH είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Άρα θα είναι $ZE = ZH$, γιατί είναι οι πλευρές απέναντι από τις ορθές γωνίες.

β) Επειδή τα τρίγωνα $Z\Gamma H$ και BZE είναι ίσα έχουν και $\angle H = \angle Z_1$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $Z\Gamma$ και BE .

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $ZH\Gamma$ έχουμε:

$$\angle H + \angle Z_2 + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \overset{H=Z_1}{Z_1} + \angle Z_2 = 90^\circ \Leftrightarrow \angle EZH = 90^\circ$$



14883. Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε τις διαμέτρους του $A\Gamma$ και $B\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)

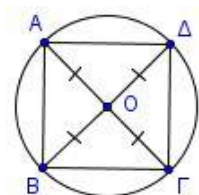
β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι $A\Gamma$ και $B\Delta$ ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Επειδή $OA = OB = OG = OD = \rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου, οι διαγώνιες $A\Gamma$ και $B\Delta$ διχοτομούνται και είναι ίσες ($A\Gamma = B\Delta = 2\rho$) άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

β) Γνωρίζουμε ότι ένα ορθογώνιο είναι τετράγωνο, όταν είναι και ρόμβος γι' αυτό πρέπει οι διάμετροι $A\Gamma$ και $B\Delta$ να είναι και κάθετες.



4^ο Θέμα

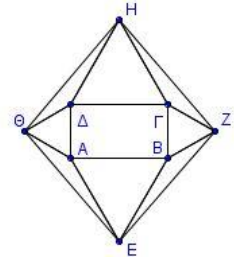
1734. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ABE , $B\Gamma Z$, $\Gamma\Delta H$, $\Delta\Theta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 15)

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε το $EZH\Theta$ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

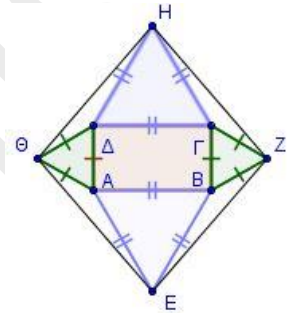


Λύση

α) Τα τρίγωνα $H\Delta\Theta$, $\Theta A E$, $E B Z$ και $H \Gamma Z$ έχουν:

- 1) $H\Delta = AE = BE = \Gamma H$ γιατί είναι ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων $H\Delta\Gamma$ και EAB
- 2) $\Theta\Delta = \Theta A = BZ = \Gamma Z$ γιατί είναι ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων $\Theta\Delta A$ και $B\Gamma Z$
- 3) $H\Delta\Theta = \Theta A E = E B Z = Z\Gamma H = 360^\circ - 90^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 150^\circ$

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $H\Theta = \Theta E = EZ = ZH$. Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ έχει όλες του τις πλευρές ίσες και είναι ρόμβος.



β) Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε τα τρίγωνα $H\Delta\Theta$, $\Theta A E$, $E B Z$ και $H \Gamma Z$ είναι ισοσκελή και ίσα. Τότε

$H\Theta\Delta = \Theta H\Delta = \Gamma H Z = H Z\Gamma = B Z E = Z E B = A E \Theta = E \Theta A = \Theta E A = \omega$ και από το άθροισμα γωνιών σε καθένα από τα τρίγωνα $H\Delta\Theta$, $\Theta A E$, $E B Z$ και $H \Gamma Z$, έχουμε:
 $150^\circ + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = 15^\circ$.

Τότε $H\Theta E = \Theta E Z = E Z H = Z H \Theta = 15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ$, δηλαδή το $EZH\Theta$ είναι ορθογώνιο και ρόμβος, άρα είναι τετράγωνο.

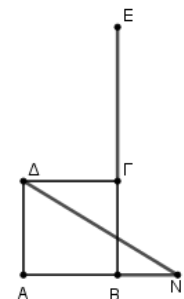
1750. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα BN και την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma M = AN$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta N = \Delta M$

(Μονάδες 12)

β) $\Delta N \perp \Delta M$

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta\Delta N$ και $\Delta\Gamma M$ έχουν:

- 1) $\Delta\Gamma = \Delta\Delta$ πλευρές του τετραγώνου και
- 2) $\Gamma M = AN$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta N = \Delta M$.

β) Επειδή τα τρίγωνα $\Delta\Delta N$ και $\Delta\Gamma M$ είναι ίσα, οι γωνίες $\Delta\Delta\Gamma$ και $\Delta\Delta N$ είναι ίσες.

Είναι $\Delta\Delta N = \Delta\Delta\Gamma + \Gamma\Delta N = \Delta\Delta\Gamma + \Gamma\Delta N = \Delta\Delta\Gamma = 90^\circ$, άρα $\Delta N \perp \Delta M$

1788. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\angle EAH = \angle AB\Gamma + \angle A\Gamma B$

(Μονάδες 8)

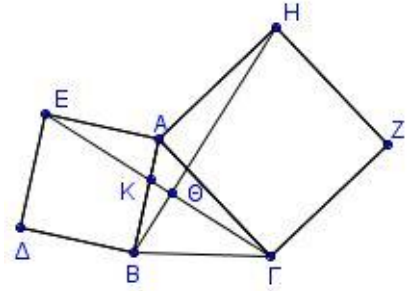
β) $EG = BH$

(Μονάδες 9)

γ) Η EG είναι κάθετη στη BH .

(Μονάδες 8)

Λύση



α) Επειδή $\angle EAB = \angle HAG = 90^\circ$ είναι και

$$\angle EAH + \angle BAG = 180^\circ \Leftrightarrow \angle EAH = 180^\circ - \angle BAG \quad (1)$$

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι: $\angle BAG + \angle AB\Gamma + \angle A\Gamma B = 180^\circ \Leftrightarrow$

$$\angle AB\Gamma + \angle A\Gamma B = 180^\circ - \angle BAG \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι: $\angle EAH = \angle AB\Gamma + \angle A\Gamma B$.

β) Τα τρίγωνα EAG και HAB έχουν:

1) $AH = AG$ πλευρές τετραγώνου,

2) $AE = AB$ πλευρές τετραγώνου και

$$3) \angle EAG = \angle HAB = 90^\circ + \angle BAG$$

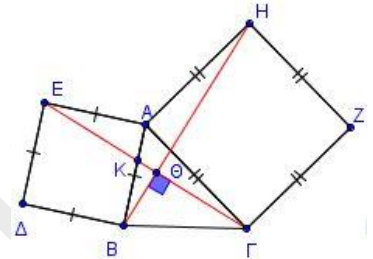
Από το κριτήριο ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $EG = BH$.

γ) Έστω Θ το σημείο τομής των EG, BH και K το σημείο τομής των EG, AB . Επειδή τα τρίγωνα EAG και HAB είναι ίσα, ισχύει ότι: $\angle ABH = \angle GEA$.

Στο τρίγωνο AEK είναι $\angle GEA + \angle EKA = 90^\circ$, όμως $\angle EKA = \angle BKG$ ως κατακορυφήν, οπότε

$$\angle ABH + \angle BKG = 90^\circ.$$

Στο τρίγωνο $BK\Theta$ είναι $\angle B\Theta K + \angle ABH + \angle BKG = 180^\circ \Leftrightarrow \angle B\Theta K + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle B\Theta K = 90^\circ$, άρα $EG \perp BH$.



1795. Εκτός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Αν M το μέσο του $B\Gamma$ και Λ σημείο στην προέκταση της AM τέτοιο, ώστε $AM = M\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\Lambda = AE$.

(Μονάδες 10)

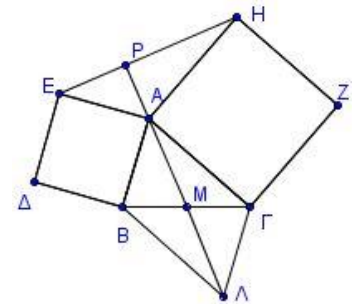
β) $\angle A\Gamma\Lambda = \angle EAH$.

(Μονάδες 10)

γ) Η προέκταση της MA (προς το A) τέμνει κάθετα την EH .

(Μονάδες 5)

Λύση



α) Στο τετράπλευρο $AB\Lambda\Gamma$ οι διαγώνιές του διχοτομούνται, άρα είναι παραλληλόγραμμο και $\Gamma\Lambda = AB$. Όμως $AE = AB$ γιατί είναι πλευρές τετραγώνου, άρα $\Gamma\Lambda = AE$.

β) Επειδή $\angle EAB = \angle HAG = 90^\circ$, ισχύει ότι

$$\angle EAH + \angle BAG = 180^\circ \Leftrightarrow \angle EAH = 180^\circ - \angle BAG \quad (1).$$

Επειδή το τετράπλευρο $AB\Lambda\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο και οι γωνίες $\angle BAG$ και $\angle A\Gamma\Lambda$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των

παραλλήλων $AB, \Gamma\Lambda$ που τέμνονται από την $A\Gamma$, οπότε είναι παραπληρωματικές. Είναι

$$\text{ΒΑΓ} + \text{ΑΓΛ} = 180^\circ \Leftrightarrow \text{ΑΓΛ} = 180^\circ - \text{ΒΑΓ} \quad (2).$$

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $\text{ΕΑΗ} = \text{ΑΓΛ}$.

γ) Τα τρίγωνα ΕΑΗ και ΑΓΛ έχουν:

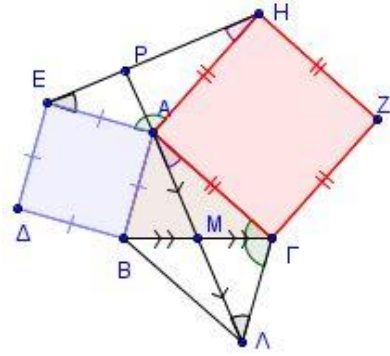
- 1) $\text{ΑΓ} = \text{ΑΗ}$ πλευρές του τετραγώνου ΑΓΖΗ
- 2) $\text{ΑΕ} = \text{ΓΛ}$ από α) ερώτημα
- 3) $\text{ΕΑΗ} = \text{ΑΓΛ}$ από β) ερώτημα

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\text{ΡΗΑ} = \text{ΛΑΓ}$

Στο τρίγωνο ΡΑΗ είναι

$$\text{ΡΗΑ} + \text{ΡΑΗ} = \text{ΜΑΓ} + \text{ΡΑΗ} = 180^\circ - \text{ΗΑΓ} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

οπότε από το άθροισμα των γωνιών του προκύπτει ότι και $\hat{\text{ΑΡΗ}} = 90^\circ$
Άρα η προέκταση της ΜΑ (προς το Α) τέμνει κάθετα την ΕΗ.



1814. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΓ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) $\angle \text{ΔΑΕ} = 15^\circ$.

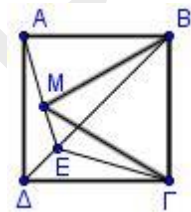
(Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

γ) Η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΜ.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $\angle \text{ΜΒΓ} = 60^\circ$.

Έστω α η πλευρά του τετραγώνου. Τότε $\text{ΒΓ} = \text{ΒΜ} = \text{ΜΓ} = \text{ΑΜ} = \alpha$, και το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές. Είναι $\angle \text{ΑΒΜ} + \angle \text{ΜΒΓ} = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \text{ΑΒΜ} = 30^\circ$. Στο τρίγωνο ΑΒΜ ισχύει ότι:

$$\angle \text{ΜΑΒ} + \angle \text{ΑΜΒ} + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle \text{ΜΑΒ} = 150^\circ \Leftrightarrow \angle \text{ΜΑΒ} = 75^\circ.$$

$$\text{Τότε } \angle \text{ΔΑΕ} = 90^\circ - \angle \text{ΜΑΒ} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$$

β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ έχουν:

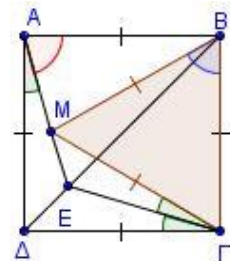
- 1) τη πλευρά ΔΕ κοινή
- 2) $\angle \text{ΑΔΕ} = \angle \text{ΓΔΕ} = \alpha$
- 3) $\angle \text{ΑΔΕ} = \angle \text{ΕΔΓ} = 45^\circ$ γιατί η διαγώνιος του τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του.

Λόγω του κριτηρίου ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ είναι ίσα ισχύει ότι $\angle \text{ΓΕΔ} = \angle \text{ΑΕΔ} = 15^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $\angle \text{ΒΓΜ} = 60^\circ$. Τότε

$$\angle \text{ΕΓΜ} = \angle \text{ΔΓΒ} - \angle \text{ΒΓΜ} - \angle \text{ΓΕΔ} = 90^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 15^\circ = \angle \text{ΓΕΔ}, \text{ άρα η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας } \angle \text{ΔΓΜ}.$$



1825. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και τυχαίο σημείο E στην πλευρά $\Delta\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο AZ της γωνίας EAB και τη ΔH κάθετη από το Δ προς την AZ , η οποία τέμνει την AE στο M και την AB στο N .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\Delta\Delta N$ και ΔBZ είναι ίσα.

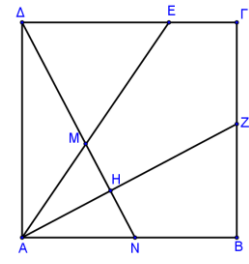
(Μονάδες 8)

β) $AM=AN$ και $\Delta E=EM$.

(Μονάδες 10)

γ) $\Delta E=\Delta E+BZ$

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta\Delta N$ και ΔBZ . Έχουν:

i) $\Delta\Delta = \Delta B$ (πλευρές τετραγώνου)

ii) $\Delta\Delta N = \Delta\Delta B$ (Οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες)

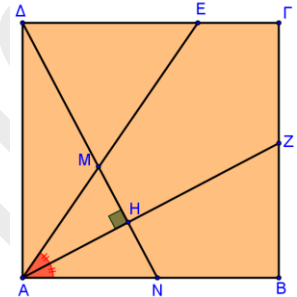
Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, επομένως είναι ίσα.

β) Στο τρίγωνο ΔMN η ΔH είναι διχοτόμος και ύψος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, άρα $AM=AN$ (1).

Στο τρίγωνο ΔEM είναι $\Delta\Delta M = \Delta\Delta N$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔB και $\Delta\Gamma$ που τέμνονται από τη ΔN και $\Delta\Delta E = \Delta\Delta N$ ως κατακορυφήν γωνίες.

Επειδή όμως $\Delta\Delta N = \Delta\Delta M$ (ισοσκελές τρίγωνο ΔMN) θα είναι ίσες και οι γωνίες $\Delta\Delta M, \Delta\Delta N$. Επομένως το τρίγωνο ΔMN είναι ισοσκελές και $\Delta E=EM$ (2)

γ) $\Delta E = AM + ME \stackrel{(1),(2)}{=} AN + EN \stackrel{\Delta\Delta N = \Delta\Delta B}{=} BZ + EN$



1894. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma$ ($\Delta = 90^\circ$) φέρουμε τη διχοτόμο του $\Delta\Delta$. Έστω K και

P οι προβολές του Δ στις ΔB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Η κάθετη της $B\Gamma$ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά $\Delta\Gamma$ στο E και την προέκταση της πλευράς ΔB (προς το Δ) στο σημείο Z .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B = \Delta E\Gamma$

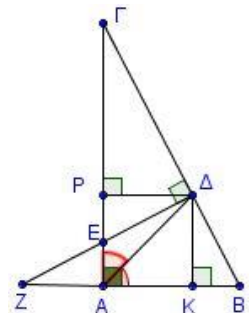
(Μονάδες 8)

ii. $\Delta E = \Delta B$

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\Gamma Z$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) i. Επειδή $\Delta B \perp \Delta\Gamma$ και $B\Gamma \perp \Delta E$, οι γωνίες B και $\Delta E\Gamma$ είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες και είναι ίσες.

ii. Το τετράπλευρο $\Delta K\Delta P$ έχει τρεις ορθές, άρα είναι ορθογώνιο. Επιπλέον η διαγώνιος του $\Delta\Delta$ διχοτομεί τη γωνία Δ , οπότε το $\Delta K\Delta P$ είναι τετράγωνο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta P\Delta$ και $\Delta K\Delta$ έχουν:

1) $\Delta P = \Delta K$ πλευρές του τετραγώνου και

2) $B = \Delta E\Gamma$,

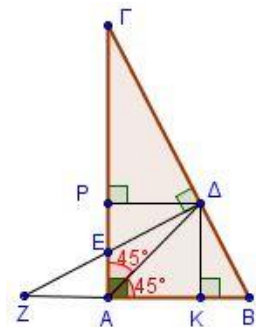
άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta E = \Delta B$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta P\Gamma$ και ΔKZ έχουν:

1) $\Delta P = \Delta K$ πλευρές του τετραγώνου και

2) $\Gamma = Z$ γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta\Gamma = \Delta Z$. Το τρίγωνο $\Delta\Gamma Z$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε οι οξείες γωνίες του είναι ίσες με 45° . Επομένως $\Delta\Gamma Z = 45^\circ$.



13744. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών του AB και $B\Gamma$ προς το B και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία E και Z τέτοια ώστε $BE = \Gamma Z$. Αν P είναι το σημείο τομής των AZ και ΔE , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

- Οι γωνίες $\Delta E\Delta$ και BZA είναι ίσες.
- Τα τμήματα AZ και ΔE είναι κάθετα.

(Μονάδες 18)

β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής P των AZ και ΔE είναι τέτοιο ώστε $PB = AB$, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου E στην προέκταση του τμήματος AB .

(Μονάδες 07)

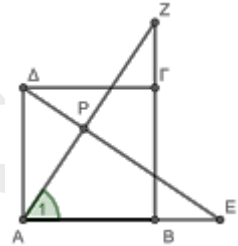
Λύση

α) i. $AB = B\Gamma$, ως πλευρές του τετραγώνου, $BE = \Gamma Z$, από την υπόθεση. Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες έχουμε $AE = BZ$ (1), ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta E\Delta$ και ABZ έχουν:

- $\Delta\Delta = AB$, ως πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$
- $AE = BZ$, από τη σχέση (1)

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta E\Delta$ και ABZ έχουν τις κάθετες πλευρές τους μια προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα. Οι γωνίες $\Delta E\Delta$ και BZA είναι ίσες γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές $\Delta\Delta$ και AB αντίστοιχα.



ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABZ το άθροισμα των δύο οξείων γωνιών του είναι 90° , δηλαδή:

$A_1 + BZA = 90^\circ$, αλλά $BZA = \Delta E\Delta$, από το α) i. ερώτημα, οπότε $A_1 + \Delta E\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow A_1 + \Delta EP = 90^\circ$ (όπου P το σημείο τομής των AZ και ΔE).

Στο τρίγωνο ΔEP το άθροισμα δύο γωνιών του είναι 90° , οπότε η τρίτη γωνία του θα είναι 90° . Δηλαδή $\Delta PE = 90^\circ$, έτσι τα τμήματα AZ και ΔE είναι κάθετα.

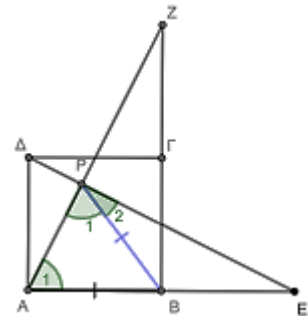
β) Από την υπόθεση $PB = AB$, άρα το τρίγωνο BAP είναι ισοσκελές, οπότε $A_1 = P_1$, ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του.

Από το προηγούμενο ερώτημα $A_1 + \Delta EP = 90^\circ$, ως άθροισμα των οξείων γωνιών ορθογωνίου τριγώνου, οπότε $P_1 + \Delta EP = 90^\circ$ (1).

Επιπλέον ισχύει $P_1 + P_2 = 90^\circ$ (2) επειδή $\Delta PE = 90^\circ$ από το α) ii.

Από τις (1) και (2) έχουμε $\Delta EP = P_2$, ή $BEP = P_2$, άρα το τρίγωνο BEP είναι ισοσκελές με $EB = PB$.

Όμως $PB = AB$, από υπόθεση, οπότε $BE = AB$ και η θέση του σημείου E προσδιορίζεται στην προέκταση του AB ώστε $BE = AB$.



13850. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος και η BZ διχοτόμος της γωνίας B .

Φέρουμε ΓO κάθετη στη BZ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την AB στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $OZ\Gamma$ και OBE είναι ίσα.

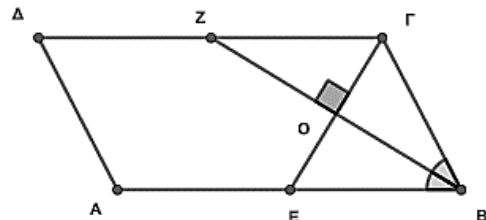
(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ είναι ρόμβος

(Μονάδες 6)

δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας B ώστε το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ να είναι τετράγωνο;

(Μονάδες 4)



Λύση

α) Έχουμε BZ διχοτόμος της γωνίας B και $BO \perp \Gamma E$ από υπόθεση. Συνεπώς το τμήμα BO στο τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ύψος και διχοτόμος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΓE .

β) Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ τα οποία έχουν:

- $ΟΓ=ΟΕ$ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ)

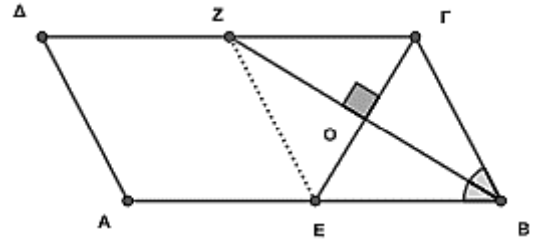
- $ΖΓΟ = ΒΕΟ$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΕ, ΓΖ που τέμνονται από την ΓΕ)

Τα τρίγωνα ΟΖΓ, ΟΒΕ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

γ) Από τη σύγκριση στο ερώτημα β) έχουμε $ΟΖ=ΟΒ$ ως πλευρές των ίσων τριγώνων ΖΟΓ και ΒΟΕ απέναντι από

τις ίσες γωνίες ΖΓΟ και ΒΕΟ και $ΟΓ=ΟΕ$ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ).

Το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι ΓΕ και ΒΖ διχοτομούνται στο σημείο Ο και επειδή είναι κάθετες από υπόθεση ($ΒΖ \perp ΓΕ$) είναι ρόμβος.



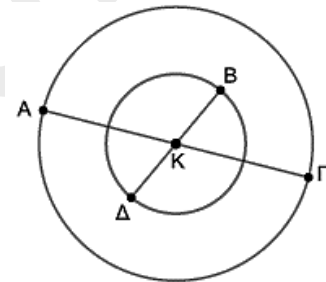
δ) Για να είναι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ τετράγωνο θα πρέπει να είναι εκτός από ρόμβος (ερώτημα γ)) και ορθογώνιο άρα θα πρέπει $B = 90^\circ$.

13848. Στο διπλανό σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διαμέτροί τους.

α) Αν ισχύει $ΑΓ > ΒΔ$:

i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)



β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής: «Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

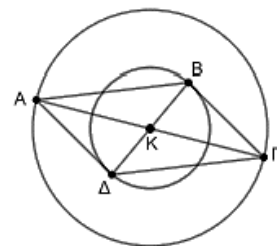
(Μονάδες 8)

Λύση

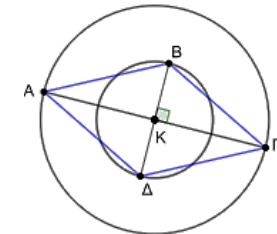
α) i. Ισχύει ότι $BK = ΚΔ$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου (Κ, ΚΒ).

Ομοίως $ΑΚ = ΚΓ$ στον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ΑΓ.

Άρα οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.



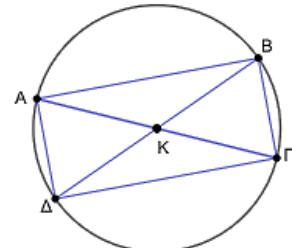
ii. Αν οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες τότε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κάθετες διαγώνιους. Συνεπώς είναι ρόμβος. Άρα η επιπλέον υπόθεση είναι ότι «οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες».



β) Αν οι κύκλοι ταυτίζονται, τότε $ΑΓ = ΒΔ$. Συνεπώς οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ίσες. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

Για να είναι τετράγωνο πρέπει επιπλέον οι ΑΓ και ΒΔ να είναι κάθετες, κάτι που δεν αναφέρεται στην υπόθεση του β).

Ο ισχυρισμός δεν είναι αληθής καθώς το ΑΒΓΔ δεν είναι αναγκαία τετράγωνο.



13841. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, BD η διχοτόμος της γωνίας B και M το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν η EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο Z τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BE=ED$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $BE\parallel Z\Delta$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι ρόμβος. (Μονάδες 5)

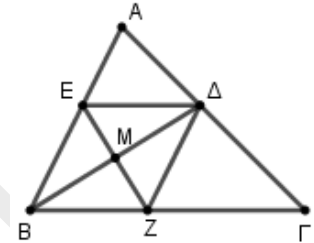
δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε το τετράπλευρο ΔEBZ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $DE\parallel B\Gamma$ άρα $\angle BZ = \angle EDB$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ED και BZ που τέμνονται από την BD .

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι η BD είναι διχοτόμος της γωνίας B , άρα

$\angle BZ = \angle EDB$. Συνεπώς $\angle EDB = \angle BE$ ως ίσες με την $\angle BZ$, άρα το τρίγωνο BED είναι ισοσκελές με $BE=ED$.



β) Συγκρίνω τα τρίγωνα BMZ και ΔME τα οποία έχουν:

- $BM=MD$ (υπόθεση)

- $\angle BZ = \angle EDB$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ED και BZ που τέμνονται από την BD)

- $\angle BMZ = \angle DME$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα BMZ , ΔME είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, άρα και $BZ=DE$ ως απέναντι πλευρές από τις ίσες γωνίες $\angle BMZ$ και $\angle DME$.

Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις πλευρές του BZ και DE παράλληλες και ίσες άρα και $BE\parallel Z\Delta$ (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου).

γ) Από το α) ερώτημα έχουμε $BE=ED$, άρα το παραλληλόγραμμο ΔEBZ είναι ρόμβος αφού έχει δυο διαδοχικές πλευρές του ίσες.

ή

Η διαγώνιος BD διχοτόμος της γωνίας B του παραλληλογράμμου ΔEBZ οπότε είναι ρόμβος.

δ) Για να είναι το τετράπλευρο ΔEBZ τετράγωνο, εφόσον είναι ρόμβος, πρέπει η γωνία B να είναι ορθή. Όταν η γωνία B είναι ορθή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο B .

ΤΜΗΜΑ ΠΟΥ ΕΝΩΝΕΙ ΜΕΣΑ ΠΛΕΥΡΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ**2^ο Θέμα**

1542. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A .

Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)

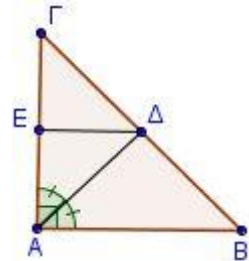
β) $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $A\Gamma \perp AB$ και $AB \parallel \Delta E$, άρα είναι και $A\Gamma \perp \Delta E$, οπότε το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε είναι ύψος και διάμεσός του. Επειδή το Δ είναι μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και η ΔE είναι παράλληλη στην AB , το E είναι μέσο της $A\Gamma$, οπότε $\Delta E = \frac{AB}{2}$. Όμως $AB = A\Gamma$, οπότε $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$.



1560. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM .

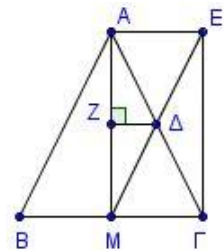
Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$. Αν το σημείο Z είναι η προβολή του Δ στην AM , να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 12)

β) $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$.

(Μονάδες 13)

**Λύση**

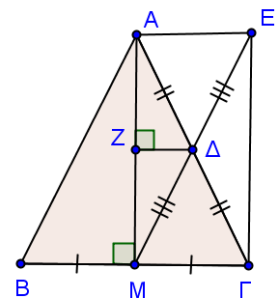
α) Επειδή $M\Delta = \Delta E$ και $A\Delta = \Delta\Gamma$, οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AM\Gamma E$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Η AM είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή $AM\Gamma = 90^\circ$.

Το παραλληλόγραμμο $AM\Gamma E$ έχει μια γωνία του ορθή, οπότε είναι ορθογώνιο.

β) Είναι $\Delta Z \perp AM$ και $\Gamma M \perp AM$, άρα $\Delta Z \parallel \Gamma M$. Στο τρίγωνο $AM\Gamma$, το Δ είναι μέσο της $A\Gamma$ και η ΔZ είναι παράλληλη στη ΓM , άρα το Z

είναι μέσο της AM και $\Delta Z = \frac{M\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.



1566. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

β) Η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE .

(Μονάδες 12)

Λύση

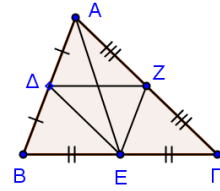
α) Τα Δ, Z είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $\Delta Z \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \Delta Z \parallel BE$ και $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{2} = BE$.

Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα

$$\Delta E \parallel A\Gamma \Leftrightarrow \Delta E \parallel A\Gamma \text{ και } \Delta E = \frac{A\Gamma}{2} = A\Gamma.$$

Το τετράπλευρο ΑΔΕΖ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΑΕ, ΔΖ είναι διαγωνίες του παραλληλογράμμου ΑΔΕΖ, οπότε διχοτομούνται.



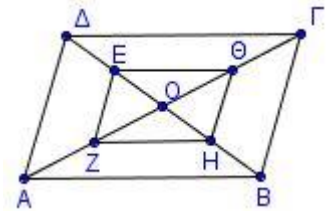
1583. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο είναι το κέντρο του. Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΟΔ, ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ

είναι 40, να βρείτε τη περίμετρο του ΕΖΗΘ. (Μονάδες 15)



Λύση

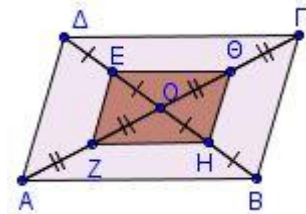
α) Τα Ε, Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΟΑΔ, άρα $EZ = \frac{A\Delta}{2}$.

Τα Ζ, Η είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΟΑΒ, άρα $ZH = \frac{A\Delta}{2}$.

Τα Η, Θ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΟΒΓ, άρα $\Theta H = \frac{B\Gamma}{2}$.

Τα Ε, Θ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΟΓΔ, άρα $E\Theta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$, είναι $EZ = H\Theta$ και $ZH = E\Theta$, δηλαδή στο τετράπλευρο ΕΖΗΘ οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



β) Επειδή η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 40, ισχύει ότι: $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 40$.

$$\text{Είναι } EZ + ZH + H\Theta + \Theta E = \frac{A\Delta}{2} + \frac{A\Delta}{2} + \frac{B\Gamma}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

1589. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B = 40^\circ$ και $\Gamma = 60^\circ$. Επιπλέον τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ.

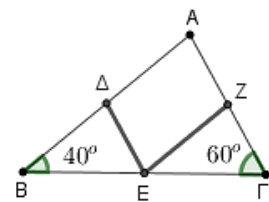
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel A\Gamma$ και $Z E \parallel A B$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A + 40^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 80^\circ$$

β) Επειδή τα σημεία Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι $\Delta E \parallel A\Gamma$.

Είναι $\angle B\Delta E = A = 80^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΓ που τέμνονται από την ΑΒ.

Επειδή τα Ε, Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι: $Z E \parallel A B$.

γ) $\angle EDB = A = 80^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ED, AG που τέμνονται από την AB .

$\angle EDB = \angle E = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων DE, AG που τέμνονται από την BG .

1608. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 40^\circ$ και $B = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των AB και AG με $DE = 9$ και $EG = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 18$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

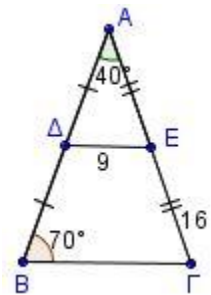
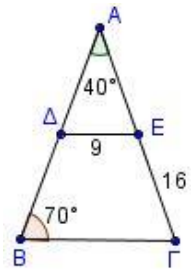
$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 70^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 70^\circ$, άρα $B = \Gamma$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, άρα ίσες πλευρές έχει τις AB και AG .

β) Επειδή τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, ισχύει

$$\text{ότι: } DE = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 18.$$

γ) Είναι $EG = 16 \Leftrightarrow \frac{AG}{2} = 16 \Leftrightarrow AG = 32$, οπότε και $AB = 32$.

$$\text{Είναι } 2\tau = AB + B\Gamma + AG = 32 + 18 + 32 = 82$$



1611. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AG αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $\angle DEG = 70^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $DE \parallel AB$.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε

i. τη γωνία x .

(Μονάδες 8)

ii. τις γωνίες A και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

Λύση

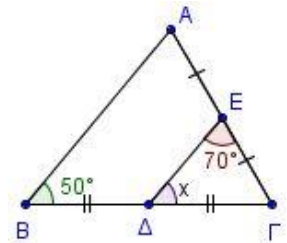
α) Επειδή τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, το τμήμα DE είναι παράλληλο στη τρίτη πλευρά του τριγώνου, την AB .

β) i. Είναι $x = B = 50^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AB, DE που τέμνονται από την BG .

ii. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $DE\Gamma$ έχουμε:

$$70^\circ + x + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 50^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 60^\circ$$

Είναι $A = E = 70^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AB, DE που τέμνονται από την AG .



1616. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $AB = BD = AG = GE = 5$,
 $BK \perp AD$ και $GL \perp AE$.

α) Να προσδιορίσετε ως προς τις πλευρές, το είδος των τριγώνων
 $AB\Delta$ και $AG\epsilon$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

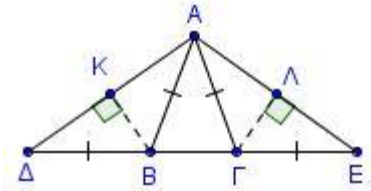
(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K και L είναι τα μέσα των
 τμημάτων AD και AE αντίστοιχα.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα KL .

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή $AB = BD$ και $AG = GE$ τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ είναι ισοσκελή.

β) Το BK είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Delta$ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και
 διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή το K είναι μέσο του AD .

Όμοια το GL είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $AG\epsilon$ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και
 διάμεσός του, δηλαδή το L είναι μέσο του AE .

γ) Είναι $AB + AG + BG = 12 \Leftrightarrow 5 + 5 + BG = 12 \Leftrightarrow BG = 2$.

Το τμήμα KL ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AD\epsilon$, άρα

$$KL = \frac{DE}{2} = \frac{DB + BG + GE}{2} = \frac{5 + 2 + 5}{2} = 6$$

1686. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$ και $B = 30^\circ$.

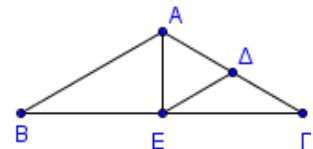
Θεωρούμε Δ και E τα μέσα των AG και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές

και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

(Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$

ισχύει ότι $DE \parallel AB$ και $DE = \frac{AB}{2}$.

Είναι $\Delta\Gamma = \frac{AG}{2} = \frac{AB}{2} = DE$, άρα το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, έχει $\Gamma = B = 30^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $E\Gamma$, ισχύει ότι $\Delta E\Gamma = \Gamma = 30^\circ$.

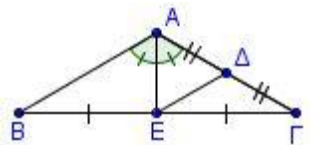
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\Delta E\Gamma$ έχουμε:

$$E\Delta\Gamma + \Delta E\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow E\Delta\Gamma + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow E\Delta\Gamma = 120^\circ$$

β) Αρχικά επειδή $A\Delta = \Delta\Gamma = DE$, το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Η AE είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στη βάση του $B\Gamma$, άρα είναι και
 διχοτόμος της γωνίας A , οπότε $E\Delta\Gamma = 60^\circ$.

Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές και έχει μια γωνία του 60° , άρα είναι ισόπλευρο.



12639. Από το μέσο M της διαμέσου AD τριγώνου $AB\Gamma$, φέρουμε παράλληλη στην AB που τέμνει
 την AG στο σημείο E . Αν η παράλληλη από το Δ στην AB τέμνει την AG στο Z , να αποδείξετε ότι:

α) το Z είναι μέσο της AG .

(Μονάδες 10)

β) το AE ισούται με το $1/4$ του AG .

(Μονάδες 15)

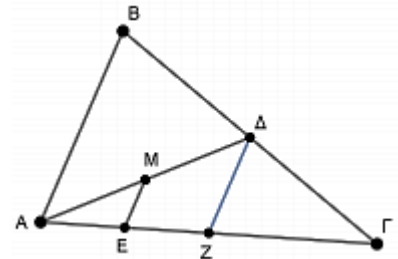
Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, εφόσον από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά AB , αυτή θα περάσει από το μέσο της τρίτης πλευράς. Επομένως το Z είναι το μέσον της πλευράς AG .

β) Λόγω του (α) ερωτήματος είναι $AZ = \frac{AG}{2}$.

Στο τρίγωνο $A\Delta Z$, το M είναι μέσο της πλευράς του $A\Delta$ και η $ME \parallel \Delta Z$ εφόσον και οι δύο είναι παράλληλες στην AB .

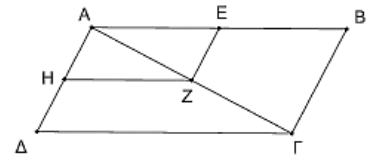
Επομένως το E είναι μέσο της AZ , άρα $AE = \frac{AZ}{2} = \frac{\frac{AG}{2}}{2} = \frac{AG}{4}$.



13532. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα E, Z και H των AB, AG και $A\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ZH = \frac{AB}{2}$. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $AEZH$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ το τμήμα ZH ενώνει τα μέσα των πλευρών AG και $A\Delta$, άρα είναι παράλληλο στη $\Gamma\Delta$ και ίσο με το μισό της, δηλαδή $ZH \parallel \Gamma\Delta$ (1) και $ZH = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Όμως $AB = \Gamma\Delta$, γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα $ZH = \frac{AB}{2}$.

β) Αφού το E είναι το μέσο της AB , θα είναι $AE = \frac{AB}{2}$. Όμως από το ερώτημα α) είναι $ZH = \frac{AB}{2}$ άρα $AE = ZH$. Επιπλέον, είναι $AE \parallel \Gamma\Delta$ (2), γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $AE \parallel ZH$. Το τετράπλευρο $AEZH$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του AE, ZH είναι ίσες και παράλληλες.

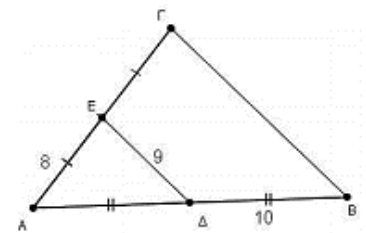
14877. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος τα σημεία Δ και τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, $AE = 8$, $ED = 9$ και $\Delta B = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι οι $B\Gamma$ και ΔE είναι παράλληλες.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου $AB\Gamma$ και του τετραπλεύρου $\Delta E\Gamma B$. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, η ΔE είναι παράλληλη στη $B\Gamma$ και ισούται με το μισό της.

β) Είναι $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2\Delta E = 18$

γ) Η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι: $AB + B\Gamma + A\Gamma = 20 + 18 + 16 = 54$ και η περίμετρος του τετραπλεύρου $\Delta E\Gamma B$: $\Delta E + E\Gamma + \Gamma B + B\Delta = 9 + 8 + 18 + 10 = 45$. Το τρίγωνο έχει μεγαλύτερη περίμετρο.

4^ο Θέμα

1723. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) και η διχοτόμος του $A\Delta$.

Φέρουμε από το B κάθετη στην $A\Delta$ που τέμνει την $A\Delta$ στο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο H . Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές.

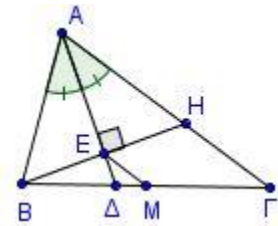
(Μονάδες 9)

β) $EM \parallel H\Gamma$

(Μονάδες 8)

γ) $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Στο τρίγωνο ABH το AE είναι ύψος και διχοτόμος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές και το AE είναι και διάμεσος του τριγώνου.

β) Στο τρίγωνο $BH\Gamma$ τα E, M είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $EM \parallel H\Gamma$ και $EM = \frac{H\Gamma}{2}$.

γ) Επειδή το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $AB = AH$.

$$\text{Είναι } EM = \frac{H\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AH}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}$$

1726. α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και Δ, E, Z τα μέσα των $AB, B\Gamma, A\Gamma$ αντίστοιχα.

1ος τρόπος: Τα τρίγωνα $BE\Delta$ και ΓZE έχουν:

1) $B\Delta = \Gamma Z$ μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$

2) $BE = \Gamma E$

3) $B = \Gamma$ στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου

Λόγω του κριτηρίου ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα άρα και $\Delta E = EZ$, οπότε το τρίγωνο ΔEZ είναι ισοσκελές.

2ος τρόπος: Τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$.

Τα E, Z είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $EZ = \frac{AB}{2}$.

Επειδή $AB = A\Gamma$, είναι και $\Delta E = EZ$, δηλαδή το τρίγωνο ΔEZ είναι ισοσκελές.

β) i. Επειδή τα Δ, Z είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου

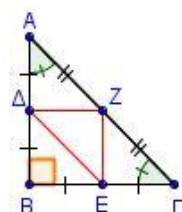
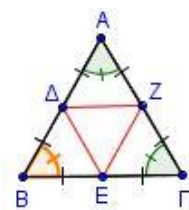
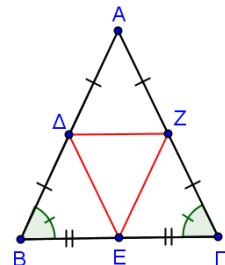
$AB\Gamma$, ισχύει ότι $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{2}$. Επειδή $AB = B\Gamma = A\Gamma$ είναι και $\Delta E = EZ = \Delta Z$, οπότε

το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.

ii. Έστω ότι $B = 90^\circ$, τότε επειδή $\Delta Z \parallel B\Gamma$, $ZE \parallel AB$ και $AB \perp B\Gamma$ θα είναι και $\Delta Z \perp ZE$, άρα το τρίγωνο ΔEZ είναι ορθογώνιο.

Επειδή $EZ = \frac{AB}{2}$, $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{2}$ και $AB = B\Gamma$ θα είναι και $\Delta Z = ZE$, οπότε το

τρίγωνο ΔEZ είναι και ισοσκελές.



1741. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο M στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$. (Μονάδες 15)

β) Στη περίπτωση που το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Στο τρίγωνο $M\Delta E$ τα K, Λ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $K\Lambda \parallel \Delta E$ (1)

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα K, Λ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $K\Lambda \parallel B\Gamma$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.

β) Τα K, M είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα

$$KM = \frac{A\Gamma}{2} \text{ και } KM \parallel A\Gamma. \text{ Όμως } KM = \frac{\Delta M}{2}, \text{ άρα } \Delta M = A\Gamma \text{ και}$$

$\Delta M \parallel A\Gamma$, οπότε το τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $\Delta A \parallel M\Gamma$ (3) ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

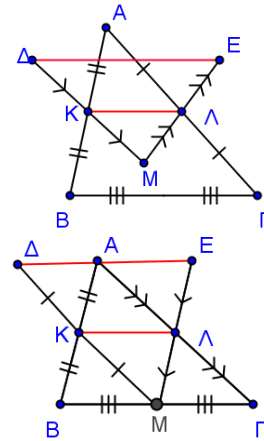
Τα M, Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $M\Lambda \parallel AB$ και

$$M\Lambda = \frac{AB}{2}. \text{ Όμως } M\Lambda = \frac{ME}{2}, \text{ άρα τα } ME, AB \text{ είναι ίσα και παράλληλα,}$$

οπότε το τετράπλευρο $ABME$ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $AE \parallel \Delta M$ (4) ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

Από τις σχέσεις (3), (4) προκύπτει ότι $\Delta A \parallel AE$ και επειδή τα δύο τμήματα έχουν κοινό σημείο το A , τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά.



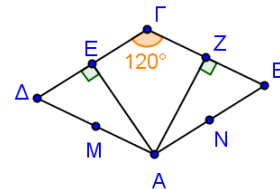
1743. Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $\Gamma = 120^\circ$. Έστω AE και AZ οι αποστάσεις του σημείου A από τις πλευρές $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

ii. $A\Gamma \perp EZ$ (Μονάδες 8)

β) Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EMNZ$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)



α) i. Επειδή οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του,

είναι $\angle E\Gamma A = \angle \Gamma Z A = 60^\circ$. Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι

ισοσκελή και έχουν μια γωνία 60° , άρα είναι ισόπλευρα.

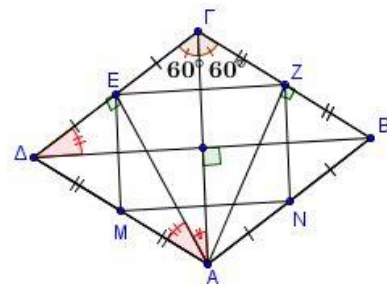
Τα AE, AZ είναι ύψη στα ισόπλευρα τρίγωνα, άρα είναι και διάμεσοί του, δηλαδή τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

ii. Επειδή τα E, Z είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $\Gamma\Delta B$, είναι

$$EZ \parallel B\Delta \text{ και } EZ = \frac{B\Delta}{2} \text{ (1).}$$

Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιες $A\Gamma, B\Delta$ του ρόμβου είναι κάθετες και αφού $EZ \parallel B\Delta$, θα είναι και $A\Gamma \perp EZ$.

β) Τα M, N είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Delta$, άρα $MN \parallel B\Delta$ και $MN = \frac{B\Delta}{2}$ (2).



Από (1),(2) συνεπάγεται ότι τα τμήματα EZ και MN είναι ίσα και παράλληλα δηλαδή το τετράπλευρο EMNZ είναι παραλληλόγραμμο. Τα E,M είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΓΔ, άρα $EM \parallel AG$. Επειδή $AG \perp BD$, $EM \parallel AG$ και $EZ \parallel BD$, είναι $EZ \perp MN$. Επειδή το παραλληλόγραμμο EMNZ έχει $\angle MEZ = 90^\circ$, είναι ορθογώνιο.

1745. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = BG$ και $A = \Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
 β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα. (Μονάδες 6)
 γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Επειδή $BA = BG$ το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, οπότε οι γωνίες $\angle A_1, \angle \Gamma_1$ που είναι στη βάση του είναι ίσες. Επειδή όμως $A = \Gamma$, είναι $\angle A_2 = \angle A - \angle A_1 = \angle \Gamma - \angle \Gamma_1 = \angle \Gamma_2$, οπότε το τρίγωνο ΔΑΓ έχει δύο γωνίες ίσες οπότε είναι ισοσκελές.

β) Επειδή $BA = BG$ και $\Delta A = \Delta \Gamma$, τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από τα Α και Γ, οπότε η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ, άρα $BD \perp AG$.

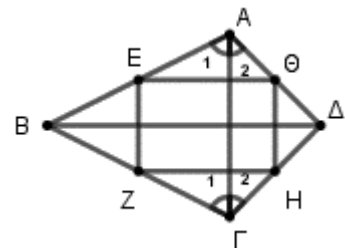
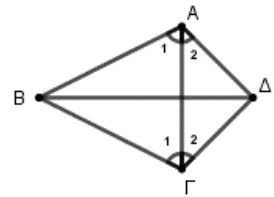
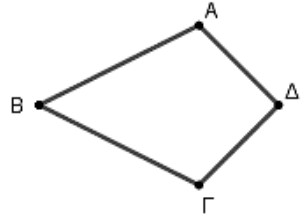
γ) Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Στο τρίγωνο ΒΑΓ τα Ε,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών του οπότε $EZ \parallel AG$ και $EZ = AG/2$.

Στο τρίγωνο ΔΑΓ τα Θ, Η είναι μέσα δύο πλευρών του, οπότε $\Theta H \parallel AG$ και $\Theta H = AG/2$. Επειδή $EZ \parallel AG$ και $\Theta H \parallel AG$, είναι και $EZ \parallel \Theta H$. Επειδή επιπλέον $\Theta H = EZ$, το τετράπλευρο ΕΖΗΘ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο ΒΑΔ τα Ε,Θ είναι μέσα δύο πλευρών του, οπότε $E\Theta \parallel BD$.

Επειδή $E\Theta \parallel BD$, $EZ \parallel AG$ και $AG \perp BD$, είναι και $E\Theta \perp EZ$, δηλαδή

$\angle E = 90^\circ$, οπότε το παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ έχει μια ορθή γωνία και είναι ορθογώνιο.



1766. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta H = \frac{AB}{2}$ (Μονάδες 8)
 β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)
 γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ. (Μονάδες 8)

Λύση

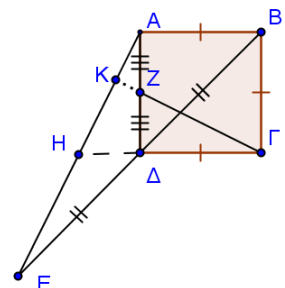
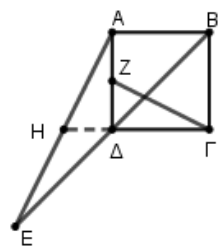
α) Επειδή το Δ είναι μέσο του ΒΕ και η ΔΗ είναι παράλληλη στη πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΒΕ, το Η είναι μέσο της πλευράς ΑΕ και ισχύει ότι $\Delta H = \frac{AB}{2}$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ έχουν:

$$1) \Delta H = \frac{AB}{2} = \frac{AD}{2} = \Delta Z \text{ και}$$

$$2) AD = \Delta \Gamma \text{ πλευρές του τετραγώνου.}$$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.



γ) Έστω ότι η ΓΖ τέμνει την ΑΗ στο Κ. Είναι $\angle KZA = \angle Z\Gamma$ ως κατακορυφήν και $\angle KAZ = \angle \Gamma Z$ γιατί τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΔΖΒ είναι ίσα.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΔΖΓ έχουμε: $\angle \Gamma Z + \angle \Delta Z\Gamma = 90^\circ$.

Στο τρίγωνο ΑΚΖ έχουμε: $\angle KAZ + \angle KZA = \angle \Gamma Z + \angle \Delta Z\Gamma = 90^\circ$, οπότε από το άθροισμα γωνιών του προκύπτει ότι και $\angle \hat{K}Z = 90^\circ$, άρα η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ.

1773. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $AD = BG$. Αν Ε,Λ,Ζ,Κ,Ν,Μ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ,ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΕΜΖΝ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

β) Η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΜΝ.

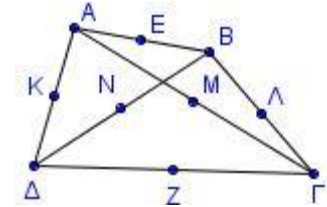
(Μονάδες 7)

γ) $KE = Z\Lambda$

(Μονάδες 5)

δ) Τα τμήματα ΚΛ,ΜΝ,ΕΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 5)

Λύση

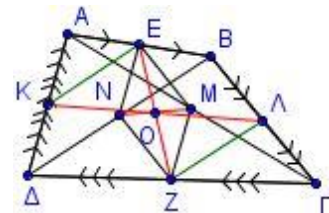


α) Στα τρίγωνα ΑΔΒ, ΔΒΓ, ΑΔΓ, ΑΒΓ, τα Ε,Ν,Ζ,Μ είναι μέσα πλευρών άρα $EN = \parallel \frac{AD}{2}$, $NZ = \parallel \frac{BG}{2}$,

$$MZ = \parallel \frac{AD}{2} \text{ και } ME = \parallel \frac{BG}{2}.$$

Επειδή $AD = BG$, είναι και $EN = NZ = ZM = ME$, οπότε το τετράπλευρο ΕΜΖΝ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

β) Επειδή το ΕΜΖΝ είναι ρόμβος, οι διαγώνιές του είναι κάθετες, άρα $EZ \perp MN$ και διέρχεται από το μέσο της ΜΝ. Επομένως ΕΖ μεσοκάθετος της ΜΝ.



γ) Τα Κ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΒ, άρα $KE = \frac{BD}{2}$ και $KE \parallel BD$.

Τα Λ,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα $\Lambda Z = \frac{BD}{2}$ και $\Lambda Z \parallel BD$.

$$\text{Είναι } KE = \Lambda Z = \frac{BD}{2}.$$

δ) Επειδή τα ΚΕ, ΖΛ είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο ΕΚΖΛ είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΕΖ, ΚΛ είναι διαγώνιες του που διχοτομούνται σε σημείο Ο. Τα ΕΖ, ΜΝ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΕΜΖΝ, οπότε διχοτομούνται. Όμως το Ο είναι μέσο της ΕΖ, οπότε θα είναι μέσο και του ΜΝ. Άρα τα ΚΛ, ΜΝ, ΕΖ έχουν κοινό μέσο, οπότε διέρχονται από το ίδιο σημείο.

1775. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ ($\Gamma E \perp MB$). Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ ($\Delta x \parallel MB$) τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν,Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

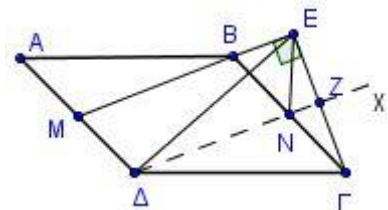
α) Το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Το σημείο Ζ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΕ.

γ) $\Delta E = \Delta \Gamma$.

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 9)



Λύση

Επειδή οι ΑΓ, ΒΔ είναι διαγώνιες του ρόμβου, είναι κάθετες, οπότε και οι ΚΛ, ΚΝ που είναι παράλληλες προς αυτές θα είναι κάθετες, δηλαδή $\angle K = 90^\circ$
Επειδή το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μια ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

β) Τα Κ, Λ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα

$$ΚΛ \parallel ΑΓ \text{ και } ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2} \quad (1).$$

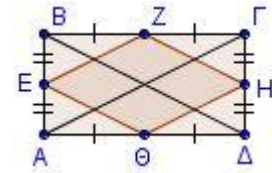
Τα Μ, Ν είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΔΓ, άρα

$$ΜΝ \parallel ΑΓ \text{ και } ΜΝ = \frac{ΑΓ}{2} \quad (2).$$

Τα Λ, Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα $ΛΜ \parallel ΒΔ$ και $ΛΜ = \frac{ΒΔ}{2}$ (3).

Τα Κ, Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $ΚΝ \parallel ΒΔ$ και $ΚΝ = \frac{ΒΔ}{2}$ (4).

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες, οπότε από τις (1),(2),(3),(4) προκύπτει ότι $ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΚΝ$, οπότε το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

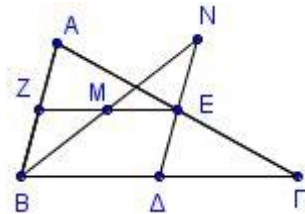


1801. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει τη ΖΕ στο σημείο Μ και την προέκταση της ΔΕ στο σημείο Ν, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Τα τρίγωνα ΒΖΜ και ΜΕΝ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 10)

γ) $ΒΖ + ΝΕ = ΔΓ$ (Μονάδες 8)



Λύση

α) Τα Ζ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα $ΖΕ \parallel ΒΓ$.

Τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $ΔΕ \parallel ΑΒ$.

Το τετράπλευρο ΖΕΔΒ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο

β) Είναι $\angle ΒΜΖ = \angle ΖΜΒ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΖΕ, ΒΔ που

τέμνονται από τη ΒΝ και $\angle ΒΜΖ = \angle ΖΜΒ$ λόγω της διχοτόμησης, άρα

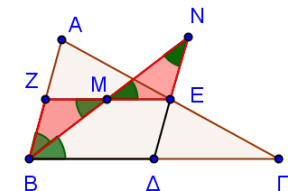
$\angle ΖΜΒ = \angle ΜΒΖ$ οπότε το τρίγωνο ΖΒΜ είναι ισοσκελές.

Είναι $\angle ΖΜΒ = \angle ΜΝΕ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΝΔ που τέμνουν

$\angle ΖΜΒ = \angle ΝΜΕ$ ως κατακορυφήν, άρα $\angle ΜΝΕ = \angle ΝΜΕ$, οπότε το τρίγωνο ΜΕΝ είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το τρίγωνο ΒΖΜ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $ΒΖ = ΖΜ$ και επειδή το τρίγωνο ΜΕΝ είναι ισοσκελές ισχύει ότι $ΜΕ = ΕΝ$.

Είναι $ΖΕ = ΒΔ$ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου) και $ΒΔ = ΔΓ$ (Δ μέσο ΒΓ), οπότε $ΒΖ + ΝΕ = ΖΜ + ΜΕ = ΖΕ = ΒΔ = ΔΓ$.

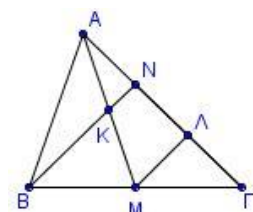


1802. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ διάμεσός του και Κ το μέσο του ΑΜ. Αν η προέκταση της ΒΚ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν, και Λ είναι το μέσο του ΓΝ, να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Ν είναι μέσο του ΑΛ. (Μονάδες 9)

β) $ΚΜΓ = ΜΒΚ + ΑΚΝ$ (Μονάδες 9)

γ) $ΒΚ = 3ΚΝ$ (Μονάδες 7)



Λύση

α) Στο τρίγωνο BNG τα M, Λ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $ML \parallel BN$ και $ML = \frac{BN}{2}$ (1).

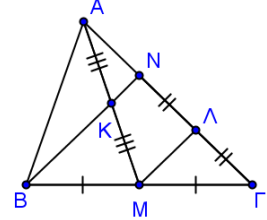
Στο τρίγωνο AML το K είναι μέσο της AM και $KN \parallel ML$, άρα το N είναι μέσο της AL.

β) Η γωνία KMG είναι εξωτερική στο τρίγωνο BKM, οπότε $KMG = MBK + BKM$. Όμως $BKM = AKN$ ως κατακορυφήν, άρα $KMG = MBK + AKN$.

γ) Επειδή τα K, N είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο AML, ισχύει ότι:

$$KN = \frac{ML}{2} = \frac{\frac{BN}{2}}{2} = \frac{BN}{4}.$$

$$\text{Είναι } BK = BN - KN = BN - \frac{BN}{4} = \frac{3}{4}BN = 3 \frac{BN}{4} = 3KN$$



1803. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $B\Gamma = 2A\Gamma$. Έστω AM διάμεσος του ABΓ και K, Λ τα μέσα των MΓ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $MA\Gamma = AM\Gamma$. (Μονάδες 7)

β) $ML = MK$. (Μονάδες 9)

γ) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΛMK. (Μονάδες 9)

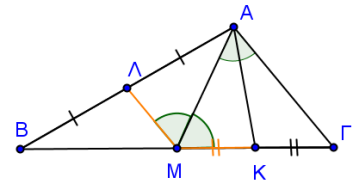
Λύση

α) Είναι $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2A\Gamma}{2} = A\Gamma$, άρα το τρίγωνο AMΓ είναι ισοσκελές με βάση την AM και ισχύει ότι $MA\Gamma = AM\Gamma$ (1).

β) Τα M, Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΓ, άρα

$$ML \parallel A\Gamma \text{ και } ML = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{M\Gamma}{2} = MK \text{ (} A\Gamma = M\Gamma \text{ από ισοσκελές τρίγωνο AMΓ και K μέσο).}$$

γ) $\angle MA\Gamma = \angle M\Gamma A$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων LM και AΓ που τέμνονται από την AM. Από (1) και (2) έχουμε $\angle MA\Gamma = \angle M\Gamma A$. Άρα η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΛMK.



1804. Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ με $AB = \Gamma\Delta$ και M, N, K τα μέσα των AΔ, BΓ, BΔ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των AB, ΔΓ τέμνουν την προέκταση της MN στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $MK = KN$

(Μονάδες 13)

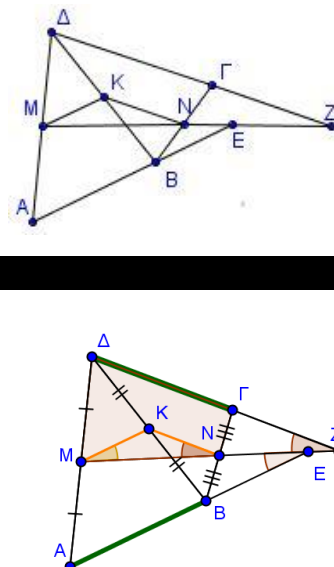
β) $ME\Delta = MZ\Delta$

(Μονάδες 12)

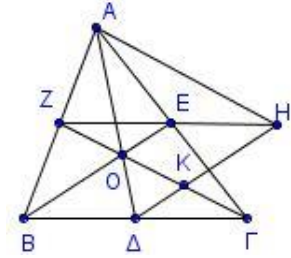
Λύση

α) Τα σημεία M και K είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΔBA, άρα $MK \parallel AB$ και $MK = \frac{AB}{2}$.

Τα σημεία K, N είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο BΓΔ, άρα $KN \parallel \Gamma\Delta$ και $KN = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Όμως $AB = \Gamma\Delta$ άρα και $MK = KN$.



- β) Είναι $ΜΕΑ = ΝΜΚ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΜΚ, ΑΕ$ που τέμνονται από την $ΜΕ$ και $ΜΖΔ = ΚΝΜ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $ΚΝ, ΔΖ$ που τέμνονται από την $ΜΖ$.
 Όμως $ΝΜΚ = ΚΝΜ$ γιατί το τρίγωνο $ΚΜΝ$ είναι ισοσκελές, άρα και $ΜΕΑ = ΜΖΔ$.



1820. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και οι διάμεσοί του $ΑΔ, ΒΕ$ και $ΓΖ$. Προεκτείνουμε το τμήμα $ΖΕ$ (προς το $Ε$) κατά τμήμα $ΕΗ = ΖΕ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $ΕΗΔΒ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
 β) Η περίμετρος του τριγώνου $ΑΔΗ$ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου $ΑΒΓ$. (Μονάδες 9)
 γ) Οι ευθείες $ΒΕ$ και $ΔΗ$ τριχοτομούν το τμήμα $ΖΓ$. (Μονάδες 8)

Λύση

- α) Επειδή τα $Ζ, Ε$ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $ΑΒΓ$, ισχύει ότι

$$ΖΕ \parallel ΒΓ \Leftrightarrow ΕΗ \parallel ΒΔ \quad \text{και} \quad ΖΕ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΕΗ = ΒΔ.$$

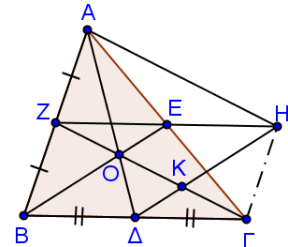
Στο τετράπλευρο $ΕΗΔΒ$ δύο απέναντι πλευρές του, οι $ΕΗ, ΔΒ$ είναι ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

- β) Είναι $ΒΕ = ΔΗ$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ΕΗΔΒ$. Επειδή $ΕΗ = ΖΕ$ και $ΑΕ = ΕΓ$ οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $ΑΖΓΗ$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο και ισχύει ότι $ΓΖ = ΑΗ$, γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

Για τη περίμετρο του τριγώνου $ΑΔΗ$ έχουμε: $ΑΔ + ΔΗ + ΑΗ = ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ$.

- γ) Στο τρίγωνο $ΒΟΓ$ το $Δ$ είναι μέσο της $ΒΓ$ και $ΔΚ \parallel ΒΟ$, άρα το $Κ$ είναι μέσο της $ΟΓ$, δηλαδή $ΓΚ = ΚΟ$ (1).

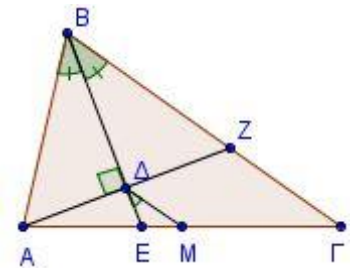
Στο τρίγωνο $ΖΚΗ$ το $Ε$ είναι μέσο της $ΖΗ$ και $ΕΟ \parallel ΚΗ$, άρα το $Ο$ είναι μέσο της $ΖΚ$, δηλαδή $ΚΟ = ΟΖ$ (2). Από τις (1),(2) είναι $ΓΚ = ΚΟ = ΟΖ$, δηλαδή οι ευθείες $ΒΕ$ και $ΔΗ$ τριχοτομούν το τμήμα $ΖΓ$.



1837. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΒΓ$ και η διχοτόμος $ΒΕ$ της γωνίας $Β$. Αν $ΑΖ \perp ΒΕ$, όπου $Ζ$ σημείο της $ΒΓ$ και $Μ$ το μέσον της $ΑΓ$, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $ΑΒΖ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
 β) $ΔΜ \parallel ΒΓ$ και $ΔΜ = \frac{ΒΓ - ΑΒ}{2}$. (Μονάδες 10)

- γ) $ΕΔΜ = \frac{Β}{2}$, όπου $Β$ η γωνία του τριγώνου $ΑΒΓ$. (Μονάδες 8)



Λύση

- α) Στο τρίγωνο $ΑΒΖ$ το $ΒΔ$ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και $ΒΔ$ διάμεσος.

- β) Τα $Δ, Μ$ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $ΑΖΓ$, άρα $ΔΜ \parallel ΖΓ \Leftrightarrow ΔΜ \parallel ΒΓ$ και

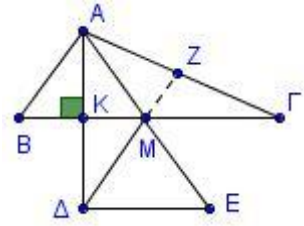
$$ΔΜ = \frac{ΖΓ}{2} = \frac{ΒΓ - ΒΖ}{2} \stackrel{ΒΖ=ΑΒ}{\underset{ΑΒΖ \text{ ισοσκελές}}{=}} \frac{ΒΓ - ΑΒ}{2}$$

- γ) $ΕΔΜ = ΕΒΓ = \frac{Β}{2}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $ΔΜ, ΒΓ$ που τέμνονται από την $ΒΕ$.

1873. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM τέτοια, ώστε $AM = AB$. Φέρνουμε το ύψος του AK και το προεκτείνουμε (προς το K) κατά τμήμα $K\Delta = AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά τμήμα $ME = MD$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta E \perp AD$ και $\Delta E = 2KM$. (Μονάδες 7)
 β) Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)
 γ) Το τετράπλευρο $ABDM$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)
 δ) Η προέκταση της DM τέμνει το $A\Gamma$ στο μέσον του Z . (Μονάδες 6)



Λύση

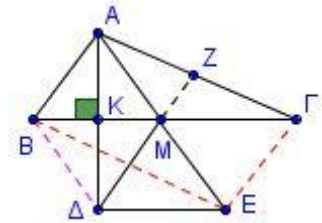
α) Τα σημεία K, M είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ADE , άρα $KM \parallel DE$ και

$$KM = \frac{DE}{2} \Leftrightarrow DE = 2KM. \text{ Επειδή } AD \perp KM \text{ και}$$

$KM \parallel DE$, είναι και $AD \perp DE$.

β) Στο τετράπλευρο $ABE\Gamma$ οι διαγωνίες του AE και $B\Gamma$ διχοτομούνται στο M , οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Στο τετράπλευρο $ABDM$ οι διαγωνίες του AD, BM διχοτομούνται κάθετα στο K , οπότε είναι ρόμβος.



δ) Επειδή το $ABDM$ είναι ρόμβος, οι πλευρές του AB και DM είναι παράλληλες.

Στο τρίγωνο AEG το M είναι μέσο της AE και η MZ είναι παράλληλη στην EG , αφού $MZ \parallel AB \parallel EG$, άρα το σημείο Z είναι μέσο της AG .

1877. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το τμήμα OK κατά τμήμα $KZ = KO$. Η BZ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο Θ . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $O\Gamma$ και BZ διχοτομούνται.

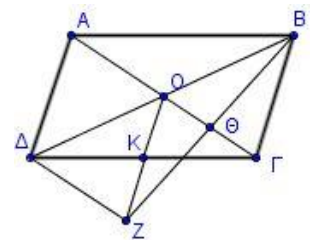
(Μονάδες 8)

β) $AO = \Delta Z$

(Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα AOB και $\Delta Z\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 6)



Λύση

α) Στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ τα O, K είναι μέσα δύο πλευρών άρα

$$OK \parallel B\Gamma \text{ και } OK = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2OK = OZ. \text{ Στο τετράπλευρο } B\Gamma ZO \text{ οι πλευρές του } OZ \text{ και } B\Gamma \text{ είναι}$$

ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγωνίες του διχοτομούνται. Δηλαδή τα τμήματα $O\Gamma$ και BZ διχοτομούνται.

β) Επειδή η OZ είναι ίση και παράλληλη με την $B\Gamma$ και η $B\Gamma$ με τη σειρά της είναι ίση και παράλληλη με την $A\Delta$, τα τμήματα OZ και $A\Delta$ είναι ίσα και παράλληλα.

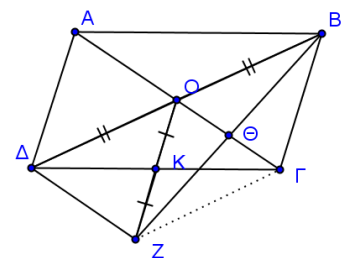
γ) Τα τρίγωνα AOB και $\Delta Z\Gamma$ έχουν:

1) $AO = \Delta Z$

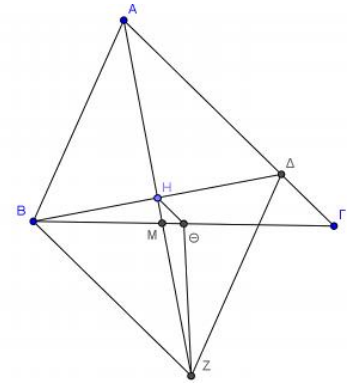
2) $\Gamma Z = OB$ γιατί είναι απέναντι πλευρές στο παραλληλόγραμμο $B\Gamma ZO$ και

3) $AB = \Gamma\Delta$ γιατί είναι απέναντι πλευρές στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$.

Άρα λόγω του κριτηρίου ΠΠΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα.



1889. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Από το B φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο AM της γωνίας A , η οποία τέμνει την AM στο H και την $A\Gamma$ στο Δ . Στην προέκταση της AH θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $AH = HZ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι



α) το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 9)

β) $H\Theta // BZ$.

(Μονάδες 9)

γ) $H\Theta = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το AH είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και το AH είναι και διάμεσος.

Άρα $BH = H\Delta$. Επίσης από υπόθεση ισχύει ότι $AH = HZ$. Συνεπώς, στο τετράπλευρο $ABZ\Delta$ οι διαγώνιες του AZ , $B\Delta$ διχοτομούνται κάθετα, άρα το τετράπλευρο είναι ρόμβος.

β) Το $H\Theta$ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $B\Delta\Gamma$, άρα $H\Theta // \Delta\Gamma \Leftrightarrow H\Theta // A\Delta$ (1)

Επειδή το $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος ισχύει ότι $BZ // A\Delta$ (3). Από τις (1), (3) προκύπτει ότι $H\Theta // BZ$

γ) Το $H\Theta$ ενώνει τα μέσα των πλευρών $B\Delta$ και $B\Gamma$ του τριγώνου $B\Delta\Gamma$ οπότε

$$H\Theta = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - A\Delta}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2} \text{ διότι } AB = A\Delta \text{ αφού } ABZ\Delta \text{ είναι ρόμβος.}$$

1898. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$. Έστω E, Z και H τα μέσα των $B\Delta$, $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών AB και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔEZH να είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο (η γωνία B ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔEZH .

(Μονάδες 5)

Λύση

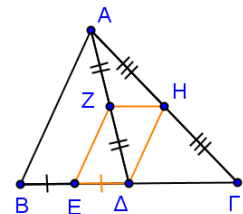
α) Τα E, Z είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Delta$, άρα $EZ // AB$ και

$$EZ = \frac{AB}{2}.$$

Τα Δ, H είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $\Delta H // AB$ και

$$\Delta H = \frac{AB}{2}.$$

Είναι $EZ = \Delta H$ και $EZ // \Delta H$, οπότε το ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.



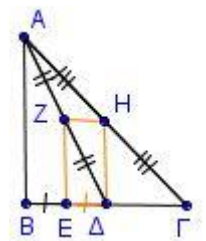
β) Είναι $ZH, E\Delta$ απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΔEZH , οπότε $ZH = E\Delta = \frac{B\Delta}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}.$

Τα Z, E είναι μέσα στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $ZE // AB$ και $ZE = \frac{AB}{2}.$

Αν το ΔEZH είναι ρόμβος, τότε $ZE = ZH \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{B\Gamma}{4} \Leftrightarrow 2AB = B\Gamma.$

γ) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο B , τότε επειδή $\Delta H // AB$

και $B\Gamma \perp AB$, θα είναι και $B\Gamma \perp \Delta H$, δηλαδή $\angle H\Delta E = 90^\circ$, οπότε το παραλληλόγραμμο ΔEZH θα έχει μια ορθή γωνία και θα είναι ορθογώνιο.



13743. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M στην πλευρά AB . Από το M φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ που τέμνει την AG στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta M\Gamma = B\Gamma M$.

(Μονάδες 05)

β) Αν το τρίγωνο ΓAB είναι ισοσκελές με βάση AB , να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου M στην AB ώστε το τρίγωνο $\Delta M\Gamma$ να είναι ισοσκελές με $\Delta M = \Delta\Gamma$ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας.

(Μονάδες 10)

γ) Αν M είναι το μέσο του τμήματος AB και E το μέσο του τμήματος $B\Gamma$ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $M\Delta EB$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $\Delta M\Gamma = B\Gamma M$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $M\Delta$ και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $M\Gamma$.

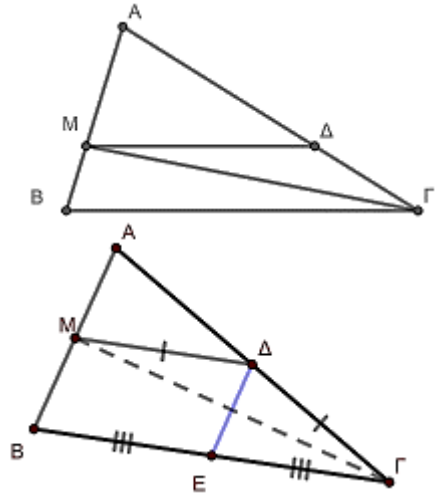
β) Αν το $\Delta M\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Delta M = \Delta\Gamma$, τότε οι γωνίες στη βάση του θα είναι ίσες, δηλαδή $\Delta M\Gamma = \Delta\Gamma M$.

Στο ερώτημα α) αποδείξαμε ότι $\Delta M\Gamma = B\Gamma M$, οπότε

$\Delta\Gamma M = B\Gamma M$, άρα η ΓM θα είναι διχοτόμος της γωνίας Γ .

Όμως από την υπόθεση το τρίγωνο ΓAB είναι ισοσκελές με βάση AB , οπότε η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής Γ θα είναι και διάμεσος προς τη βάση του. Δηλαδή το ζητούμενο σημείο M είναι το μέσο της AB .

γ) Το M είναι το μέσο της AB και έχουμε φέρει $M\Delta//B\Gamma$, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της AG . Δίνεται ότι το σημείο E είναι μέσο της $B\Gamma$ άρα το τμήμα ΔE ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε το ΔE είναι παράλληλο στην AB , ή $\Delta E//MB$. Το τετράπλευρο $M\Delta EB$ έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο



13745. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, το μέσο M της βάσης $B\Gamma$ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.

α) Αν από το μέσο M φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές AB και AG του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

i. $ME = MZ$.

(Μονάδες 6)

ii. Το $AEMZ$ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με $2AB$.

(Μονάδες 7)

β) Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$, διαφορετικό από το μέσο M , και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές AB και AG του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, τότε:

i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου $AK\Lambda\Delta$;

ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου $AK\Lambda\Delta$ με την περίμετρο του ρόμβου $AEMZ$ του ερωτήματος α ii) και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

(Μονάδες 12)

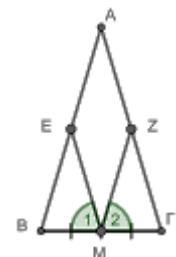
Λύση

α) i. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε $ME//AG$, οπότε το E είναι μέσο της AB και

$ME = \frac{AG}{2}$ (1), ομοίως επειδή από το μέσο M φέρουμε $MZ//AB$, το Z είναι μέσο της AG

και $MZ = \frac{AB}{2}$ (2).

Επιπλέον δίνεται ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = AG$, οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $ME = MZ$.



ii. Από την υπόθεση είναι $ME//AG$ ή $ME//AZ$ και $MZ//AB$ ή $MZ//AE$, οπότε το τετράπλευρο $AEMZ$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ME και MZ είναι ίσες από το α) i. ερώτημα, οπότε το AEMZ είναι ρόμβος.

Η περίμετρος του ρόμβου αυτού είναι ίση με $AE + EM + MZ + AZ = 4AE = 4 \frac{AB}{2} = 2AB$.

Το τετράπλευρο AEMZ είναι ρόμβος οπότε οι τέσσερις πλευρές του είναι ίσες με AE και $AE = \frac{AB}{2}$ αφού E μέσο της AB.

β) i. Από την κατασκευή οι απέναντι πλευρές του τετράπλευρου AKΔΛ είναι παράλληλες, αφού $\Delta K // \Lambda \Gamma$ ή $\Delta K // \Lambda \Lambda$ και $\Delta \Lambda // AB$ ή $\Delta \Lambda // AK$. Άρα το AKΔΛ είναι παραλληλόγραμμο.

Θα αποδείξουμε ότι το AKΔΛ, όταν το Δ δεν είναι το μέσο του BΓ δε μπορεί να είναι ρόμβος.

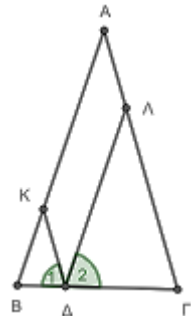
Οι γωνίες Γ και Δ_1 είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΚ και ΑΓ με τέμνουσα την BΓ, οπότε $\Delta_1 = \Gamma$, άρα $\Delta_1 = B$, (αφού οι γωνίες B και Γ είναι ίσες ως γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου).

Οπότε το BΚΔ είναι ισοσκελές τρίγωνο με $K\Delta = KB$ (3).

Όμοια οι γωνίες B και Δ_2 είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΛ και AB με τέμνουσα την BΓ, οπότε $\Delta_2 = B$, άρα $\Delta_2 = \Gamma$. Άρα το τρίγωνο ΔΛΓ είναι ισοσκελές με $\Lambda\Delta = \Lambda\Gamma$ (4).

Επειδή $\Delta_1 = B$ και $\Delta_2 = B$, προκύπτει ότι $\Delta_1 = \Delta_2 = B = \Gamma$. Δηλαδή τα ισοσκελή τρίγωνα BΚΔ και ΓΛΔ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες του, BΚΔ και ΓΛΔ είναι μεταξύ τους ίσες.

Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το μέσο M της BΓ τα τμήματα BΔ και ΔΓ δεν είναι ίσα, οπότε και τα τρίγωνα BΚΔ και ΓΛΔ δεν είναι ίσα. (Αν ήταν ίσα θα έπρεπε και οι πλευρές BΔ και ΔΓ που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες BΚΔ και ΓΛΔ αντίστοιχα, να είναι ίσες). Οι πλευρές ΔΚ και ΔΛ δεν είναι ίσες, γιατί αν ήταν ίσες, τα τρίγωνα BΚΔ και ΓΛΔ θα ήταν ίσα από το κριτήριο ΓΠΓ. Άτοπο, αφού αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα BΚΔ και ΓΛΔ δεν είναι ίσα. Οπότε οι διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου AKΔΛ δεν είναι ίσες, επομένως αυτό δεν είναι ρόμβος.



ii. Για την περίμετρο του παραλληλογράμμου AKΔΛ έχουμε ότι είναι ίση με $AK + K\Delta + \Delta\Lambda + \Lambda A$ με τη βοήθεια των σχέσεων (3) και (4) του β) i. ερωτήματος η περίμετρος γίνεται ίση με $AK + KB + \Gamma\Lambda + \Lambda A = AB + \Lambda\Gamma = AB + AB = 2AB$.

Παρατηρούμε ότι η περίμετρος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται όταν το Δ είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο στη βάση BΓ του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ είναι σταθερή και ίση με 2AB.

13856. Σε τρίγωνο ΔΕΖ, φέρουμε τη διάμεσο ΔΜ και στην προέκτασή της προς το μέρος του Μ παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε $\Delta M = M\Theta$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΕΖ προς το Ε κατά τμήμα $EA = EZ$ και προς το Ζ κατά τμήμα $Z\Gamma = EZ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

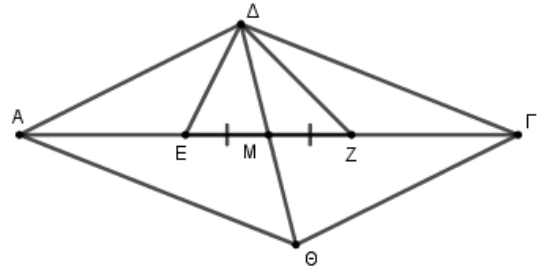
γ) Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι $\Lambda\Delta = 12$. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ στο σχήμα του Γιάννη; (Μονάδες 9)

Λύση

α) Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΕΖ άρα $ME = MZ$, επίσης $EA = EZ = Z\Gamma$ (από υπόθεση) άρα: $ME + EA = MZ + Z\Gamma$ ή $MA = M\Gamma$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ που έχουν:

- $\Delta M = M\Theta$ (από υπόθεση)
 - $MA = M\Gamma$ (ως άθροισμα ίσων τμημάτων $ME + EA$ και $MZ + Z\Gamma$)
 - $\Delta MA = \Theta M\Gamma$ (ως κατακορυφήν)
- Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

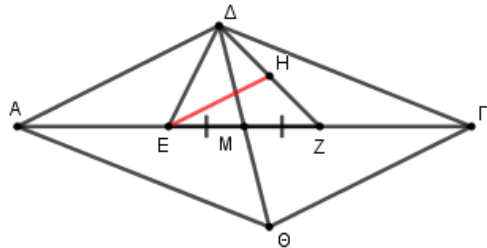


β) Το σημείο M είναι το μέσο του τμήματος $\Delta\Theta$ (από υπόθεση) και μέσο του τμήματος $A\Gamma$ (ii στη σύγκριση του ερωτήματος α)). Στο τετράπλευρο $\Theta A\Delta\Gamma$ οι διαγώνιοι $\Delta\Theta$ και $A\Gamma$ διχοτομούνται στο σημείο M, άρα το τετράπλευρο $\Theta A\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το σημείο H είναι το μέσο της πλευράς ΔZ αφού η EH είναι διάμεσος. Από υπόθεση έχουμε $EA = EZ$, άρα το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς AZ . Στο τρίγωνο $A\Delta Z$ τα σημεία E και H είναι μέσα πλευρών άρα

$$EH = \frac{AZ}{2} \text{ ή } EH = \frac{12}{2} = 6. \text{ Στο σχήμα του Γιάννη η}$$

διάμεσος EH του τριγώνου ΔEZ θα έχει μήκος 6.



3^ο Θέμα

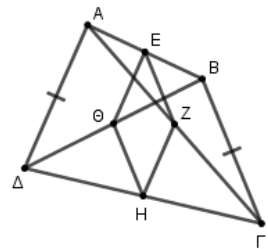
11896. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος ισχύει ότι $A\Delta = B\Gamma$ και τα σημεία E, Z, H και Θ είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων AB , $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α. $EZ \parallel H\Theta$

Μονάδες 15

β. Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 10



Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα E, Z είναι μέσα δύο πλευρών του οπότε $EZ \parallel \frac{B\Gamma}{2}$ (1)

Στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ τα Θ, H είναι μέσα δύο πλευρών του, οπότε $\Theta H \parallel \frac{B\Gamma}{2}$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $EZ \parallel H\Theta$.

β) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο $B\Delta\Delta$ τα E, Θ είναι μέσα δύο πλευρών του οπότε $E\Theta \parallel \frac{A\Delta}{2}$. Όμως $A\Delta = B\Gamma$, οπότε

$E\Theta = EZ$. Στο παραλληλόγραμμο $EZH\Theta$ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

12068. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και M το μέσο της υποτεινούσας του $B\Gamma$. Από το

M φέρουμε $M\Delta \perp AB$ και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΔZ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο MBZ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

ii. Το τετράπλευρο $AMBZ$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 9)

β) Αν το αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τι είδους τετράπλευρο είναι το $AMBZ$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

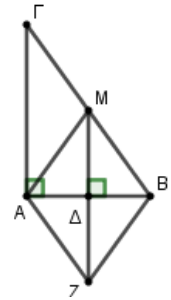
Λύση

α) i. Στο τρίγωνο MBZ το BΔ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την MZ.

ii. Είναι $MΔ \perp AB$ και $AΓ \perp AB$ άρα $MΔ \parallel AΓ$.

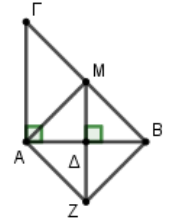
Επειδή M μέσο της BΓ και $MΔ \parallel AΓ$, το Δ είναι μέσο της AB.

Στο τετράπλευρο MAZB οι διαγώνιές του διχοτομούνται κάθετα, οπότε είναι ρόμβος.



β) Είναι $MΔ = \frac{AΓ}{2} \Leftrightarrow MZ = AΓ$.

Αν το ABΓ ήταν ορθογώνιο και ισοσκελές τότε $AB = AΓ$, οπότε και $MZ = AB$, οπότε ο ρόμβος θα είχε τις διαγώνιες του ίσες και θα ήταν τετράγωνο.



ΔΙΑΜΕΣΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ – ΘΕΩΡΗΜΑ 30°

2° Θέμα

1537. Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ προεκτείνουμε την πλευρά $ΔΑ$ (προς το A) κατά τμήμα $ΑΗ = ΔΑ$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $Δ$ η οποία τέμνει την AB στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $ΑΔΖ$ είναι ισοσκελές.

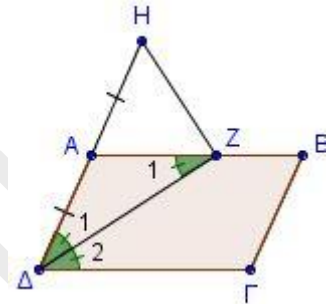
(Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο $ΔΖΗ$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Z .

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $Δ_2 = Z_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, ΓΔ$ που τέμνονται από την $ΔΖ$ και $Δ_2 = Δ_1$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας $Δ$, άρα $Δ_1 = Z_1$. Το τρίγωνο $ΑΔΖ$ έχει δύο γωνίες ίσες και είναι ισοσκελές.



β) Επειδή το τρίγωνο $ΑΔΖ$ είναι ισοσκελές με βάση τη $ΔΖ$, είναι

$$ΔΑ = ΑΖ, \text{ όμως } ΔΑ = ΑΗ, \text{ άρα } ΖΑ = ΑΔ = ΑΗ = \frac{ΔΗ}{2}.$$

Στο τρίγωνο $ΔΖΗ$ η διάμεσος του $ΖΑ$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την $ΔΗ$, δηλαδή $Z = 90^\circ$.

1548. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($A = 90^\circ$) με $ΒΓ = 8\text{ cm}$. Έστω $ΑΜ$ η

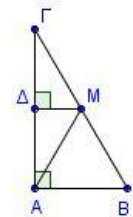
διάμεσος του τριγώνου και $ΜΔ \perp ΑΓ$. Αν $ΑΜΓ = 120^\circ$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $ΑΒ = 4\text{ cm}$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μήκος της $ΜΔ$.

(Μονάδες 13)



Λύση

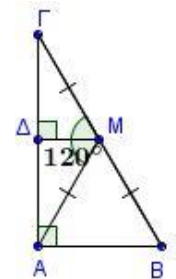
α) Επειδή η $ΑΜ$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$ ισχύει ότι $ΑΜ = ΜΒ = ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2}$, οπότε τα τρίγωνα $ΑΜΓ$ και $ΑΜΒ$ είναι ισοσκελή με βάσεις τις $ΑΓ, ΑΒ$ αντίστοιχα. Επειδή το τρίγωνο $ΑΜΓ$ είναι ισοσκελές με βάση την $ΑΓ$, ισχύει ότι: $Γ = ΓΑΜ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $ΑΜΓ$ έχουμε:

$$Γ + ΓΑΜ + ΑΜΓ = 180^\circ \Leftrightarrow 2Γ + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2Γ = 60^\circ \Leftrightarrow Γ = 30^\circ.$$

Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ η απέναντι κάθετη πλευρά,

$$\text{δηλαδή η } ΑΒ \text{ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Άρα } ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2} = 4\text{ cm}.$$



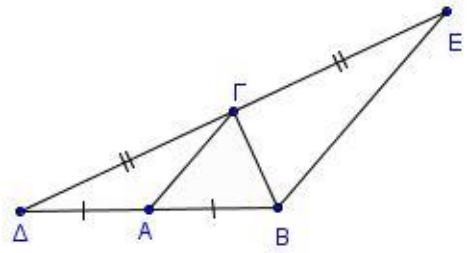
β) Η $ΜΔ$ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΜΓ$ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσος

$$\text{του. Στο τρίγωνο } ΑΒΓ \text{ τα } Μ, Δ \text{ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα } ΜΔ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{4}{2} = 2\text{ cm}$$

1551. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στη προέκταση της $A\Gamma$ (προς το Γ) παίρνουμε σημείο E ώστε $A\Gamma = GE$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

β) $BE \parallel A\Gamma$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$ (Μονάδες 13)



Λύση

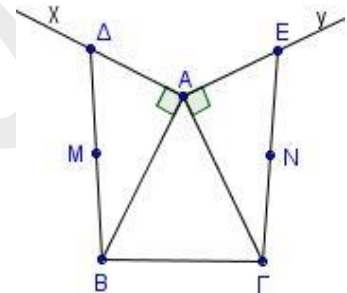
α) Είναι $A\Delta = AB = A\Gamma$, άρα $\Gamma A = \frac{\Delta B}{2}$, δηλαδή στο τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔB , δηλαδή $B\Gamma\Delta = 90^\circ$.

β) Επειδή $AB = A\Delta$ και $A\Gamma = GE$, τα σημεία A, Γ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΔBE , άρα $A\Gamma \parallel BE$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$.

1555. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$. Στις Ax και Ay θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$. (Μονάδες 12)

β) Αν M και N τα μέσα των τμημάτων $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



Λύση

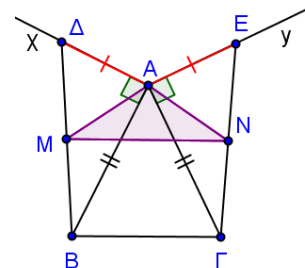
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- 1) $AB = A\Gamma$ και
- 2) $A\Delta = AE$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Delta = \Gamma E$

β) Το AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $A\Delta B$, άρα $AM = \frac{B\Delta}{2}$.

Το AN είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $A\Gamma E$, άρα $AN = \frac{\Gamma E}{2}$.

Επειδή $B\Delta = \Gamma E$, είναι και $AM = AN$, άρα το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές.



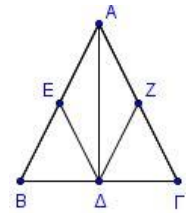
1564. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), το ύψος του $A\Delta$ και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

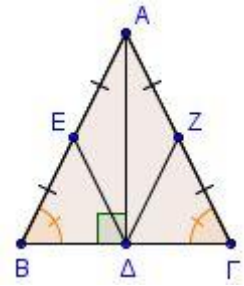


Λύση

α) Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ έχουν:

- 1) $BE = \Gamma Z$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$

- 2) $BD = GD$, γιατί το AD είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι και διάμεσός του και
 3) $B = G$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ABG .
 Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ADB η DE είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $DE = \frac{AB}{2} = AE = BE$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ADG , το DZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $DZ = \frac{AG}{2} = AZ = ZG$ (2)

Επειδή $AB = AG$, από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι στο τετράπλευρο $AEDZ$ οι πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

1567. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABG με $AB < AG$ και $\Gamma = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος του AD και το μέσο Z της πλευράς AG .

α) Να αποδείξετε ότι $DZ = \frac{AG}{2}$. (Μονάδες 12)

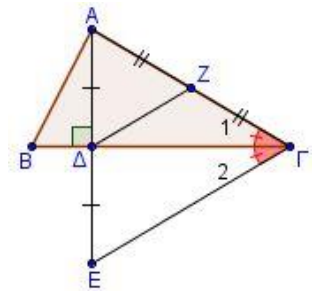
β) Προεκτείνουμε το ύψος AD (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα DE . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AGE είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Η DZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ADG , άρα $DZ = \frac{AG}{2}$.

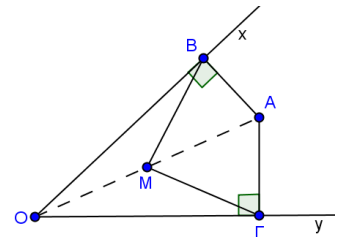
β) Στο τρίγωνο AGE η GD είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και η GD είναι και διχοτόμος του τριγώνου.

Άρα $\Gamma_2 = \Gamma_1 = 30^\circ$ και $\angle AGE = 60^\circ$. Το ισοσκελές τρίγωνο AGE έχει μια γωνία του ίση με 60° , άρα είναι ισόπλευρο.



1586. Δίνεται γωνία α και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες AB, AG προς τις πλευρές Ox, Oy της γωνίας αντίστοιχα και ονομάζουμε M το μέσο του OA . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
 β) Το τρίγωνο BMG είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
 γ) $BMA = 2\alpha$. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο BOA το BM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $BM = \frac{OA}{2}$. Όμως και $AM = \frac{OA}{2}$, οπότε $BM = AM$ και το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο AGO το GM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $GM = \frac{OA}{2}$. Επειδή $BM = GM$, το τρίγωνο BGM είναι ισοσκελές με βάση τη BG .

γ) Επειδή $BM = OM = \frac{OA}{2}$, το τρίγωνο OBM είναι ισοσκελές με βάση την OB και ισχύει ότι

$\angle BOA = \angle MBO$. Η γωνία BMA είναι εξωτερική στο τρίγωνο BMO , άρα

$BMA = \angle BOA + \angle MBO = 2\alpha$.

1606. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με $B = 2\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

$B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη γωνία $AM\Gamma$. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 2\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 3\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ$ και $B = 60^\circ$.

β) Το AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2}$. Όμως και $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα $AM = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $M\Gamma$, είναι $\Gamma AM = \Gamma = 30^\circ$.

Στο τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι $\Gamma AM + \Gamma + AM\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 30^\circ + AM\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow AM\Gamma = 120^\circ$

1614. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = \Delta E = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.

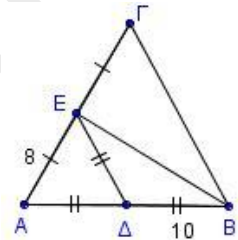
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 20$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή $\Delta E = A\Delta = \Delta B = \frac{AB}{2}$, στο τρίγωνο AEB μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα αυτή τη πλευρά.

β) Αρχικά είναι $A\Delta = \Delta E = \Delta B = 10$.

Τα Δ , E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 10 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 20$.

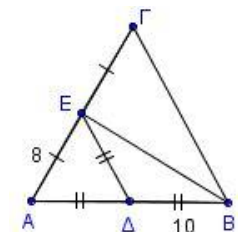
γ) Είναι $2\tau = AB + B\Gamma + A\Gamma = 2\Delta B + 20 + 2AE = 20 + 20 + 16 = 56$

1615. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = \Delta E = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή $\Delta E = A\Delta = \Delta B = \frac{AB}{2}$, στο τρίγωνο AEB μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα αυτή τη πλευρά.

β) Αρχικά είναι $A\Delta = \Delta E = \Delta B = 10$.

Τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 10 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 20$.

Επίσης $AB = 2\Delta B = 20$, οπότε $AB = B\Gamma$ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

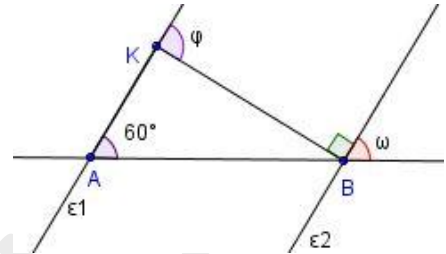
γ) Είναι $2\tau = AB + B\Gamma + A\Gamma = 20 + 20 + 2AE = 40 + 16 = 56$

1619. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB = 6$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ . (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΚ ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΚ, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Είναι $\omega = A = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που τέμνονται από την ΑΒ. Επειδή $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB \perp \varepsilon_2$, είναι και $AB \perp \varepsilon_1$, άρα $\varphi = 90^\circ$.

β) Επειδή $K = 90^\circ$ το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ορθογώνιο.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΚ έχουμε:

$A + ABK = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + ABK = 90^\circ \Leftrightarrow ABK = 30^\circ$, τότε όμως η απέναντι κάθετη πλευρά

του τριγώνου ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή: $AK = \frac{AB}{2} = 3$.

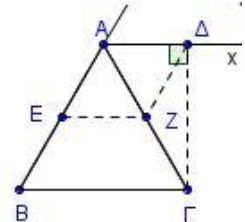
1625. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Αχ της γωνίας Α και από το σημείο Γ την κάθετο ΓΔ στην Αχ. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΖΔ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 12)



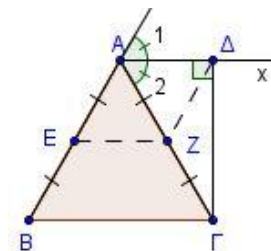
Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι: $A = B = \Gamma = 60^\circ$

Είναι $A_{\varepsilon_2} = 180^\circ - A = 120^\circ$ και $A_2 = \frac{A_{\varepsilon_2}}{2} = 60^\circ = \Gamma$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ η διάμεσος του $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = AZ$. Το τρίγωνο

ΑΖΔ είναι ισοσκελές με μία γωνία του ίση με 60° , άρα είναι ισόπλευρο.



β) Τα σημεία Ε, Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $EZ = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$.

Ακόμη είναι $AE = \frac{AB}{2}$, $AD = \Delta Z = AZ = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$, άρα το τετράπλευρο ΑΔΖΕ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

1631. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $A + \Gamma = 120^\circ$ και $A = 3\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 15)

β) Αν η πλευρά $B\Gamma = 2\text{ cm}$, να βρείτε το μήκος της AB . (Μονάδες 10)

Λύση

α) Επειδή $A + \Gamma = 120^\circ$ και είναι και $A = 3\Gamma$

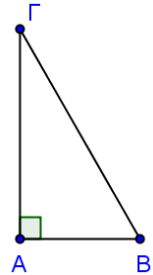
$$3\Gamma + \Gamma = 120^\circ \Leftrightarrow 4\Gamma = 120^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ \text{ και } A = 3\Gamma = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + B + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 60^\circ$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Gamma = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά του

$$\text{τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα } AB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2}{2} = 1\text{ cm}$$



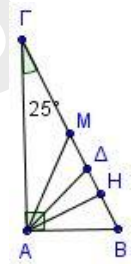
1633. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $\Gamma = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος AD της γωνίας A .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες AMB , HAB , $A\Delta B$.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $M\Delta\Delta = \Delta A H = 20^\circ$.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow B + 25^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B = 65^\circ.$$

Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, άρα

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = MG = MB.$$

Τα τρίγωνα $AM\Gamma$ και AMB είναι ισοσκελή με βάσεις τις $A\Gamma$, AB αντίστοιχα, οπότε

$$MAG = \Gamma = 25^\circ \text{ και } MAB = B = 65^\circ.$$

Η γωνία AMB είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AM\Gamma$, άρα $AMB = MAG + \Gamma = 50^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου HAB έχουμε:

$$HAB + B = 90^\circ \Leftrightarrow HAB + 65^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow HAB = 25^\circ.$$

Η γωνία $A\Delta B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, άρα

$$A\Delta B = \Delta A\Gamma + \Gamma = \frac{A}{2} + 25^\circ = 45^\circ + 25^\circ = 70^\circ.$$

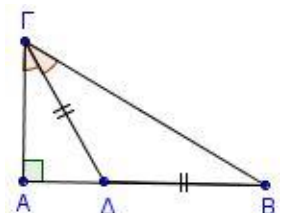
β) Είναι $M\Delta\Delta = \Delta A\Gamma - MAG = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$ και $\Delta A H = \Delta A B - HAB = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$

1638. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , έτσι ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{ cm}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $B = 30^\circ$. (Μονάδες 12)

β) $AB = 3\text{ cm}$ (Μονάδες 13)



Λύση

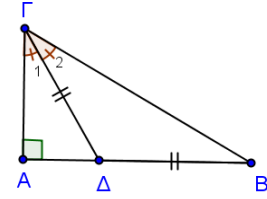
α) Επειδή $\Gamma\Delta = \Delta B$, το τρίγωνο $\Gamma\Delta B$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, άρα

$$B = \Gamma_2 = \frac{\Gamma}{2}.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{\Gamma}{2} + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma + 2\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$3\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 60^\circ \text{ και } B = \frac{\Gamma}{2} = 30^\circ$$



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι $\Gamma_1 = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 30^\circ$, άρα $A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}$. Τότε

$$AB = A\Delta + \Delta B = 1 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

1647. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$, $B = 35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB .

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε: $B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 55^\circ$

β) Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα,

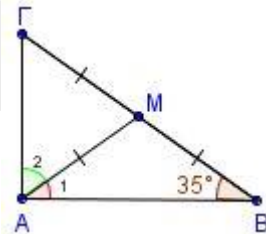
$$\text{άρα } AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma.$$

Επειδή $AM = MB$, το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με βάση την AB , άρα

$$A_1 = B = 35^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AMB έχουμε:

$$AMB + A_1 + B = 180^\circ \Leftrightarrow AMB + 35^\circ + 35^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow AMB = 110^\circ$$



1649. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$, $2\Gamma = B$ και $A\Delta$ το ύψος του.

α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

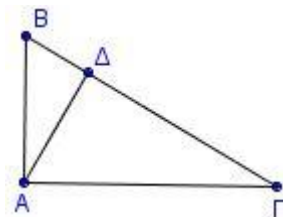
(Μονάδες 9)

β) Να υπολογιστεί η γωνία $BA\Delta$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι: $B\Delta = \frac{AB}{2}$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 3\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ \text{ και } B = 2\Gamma = 60^\circ.$$

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Delta$ έχουμε:

$$B + BA\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + BA\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow BA\Delta = 30^\circ.$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $BA\Delta = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά είναι ίση

$$\text{με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή } B\Delta = \frac{AB}{2}.$$

1655. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:

α) $MA\Gamma = M\Gamma A$ (Μονάδες 12)

β) η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx . (Μονάδες 13)

Λύση

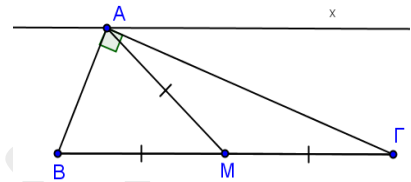
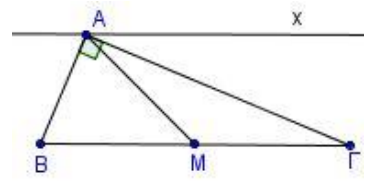
α) Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, άρα

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma, \text{ οπότε το τρίγωνο } AM\Gamma \text{ είναι ισοσκελές με}$$

βάση την $A\Gamma$, άρα $MA\Gamma = M\Gamma A$.

β) Είναι $M\Gamma A = \Gamma A x$ ως εντός εναλλάξ των

παράλληλων $Ax, B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$, όμως $MA\Gamma = M\Gamma A$, άρα $MA\Gamma = \Gamma A x$, άρα η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx .



1671. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $B = 30^\circ$. Αν τα σημεία E και Δ είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα με $E\Delta = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α) $A\Gamma$ (Μονάδες 8)

β) $B\Gamma$ (Μονάδες 9)

γ) $A\Delta$ (Μονάδες 8)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση

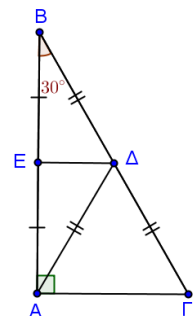
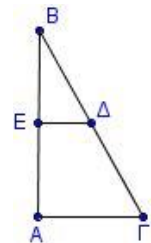
α) Επειδή τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι

$$\Delta E = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = 2$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B = 30^\circ$, άρα $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 4$.

γ) Η $A\Delta$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του

ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = 2$.



1675. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από τα μέσα K και Λ των πλευρών $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα KE και ΛZ στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $KE\Gamma$ και ΛZB είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) $EH = Z\Theta$, όπου H, Θ τα μέσα των τμημάτων $K\Gamma, \Lambda B$ αντίστοιχα. (Μονάδες 10)

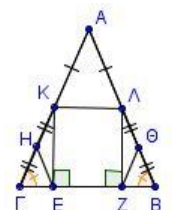
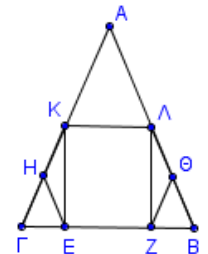
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $KE\Gamma$ και ΛZB έχουν:

1) $K\Gamma = \Lambda B$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$.

2) $\Gamma = B$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία τους ίσες, είναι ίσα.



β) Η ΕΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΚΕΓ, άρα $EH = \frac{KG}{2}$

Η ΖΘ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΛΖΒ, άρα $Z\Theta = \frac{\Lambda B}{2}$.

Επειδή $KG = \Lambda B$, είναι και $EH = Z\Theta$.

1680. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $BD = GE$.

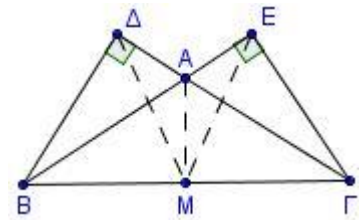
(Μονάδες 10)

β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $MD = ME$

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΔΜΕ. (Μονάδες 7)



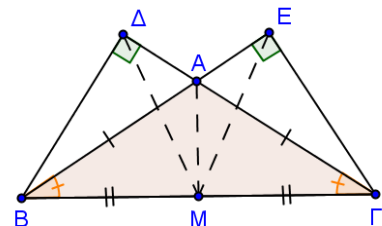
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

1) την πλευρά ΒΓ κοινή και

2) $B = G$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία τους ίσες, είναι ίσα, οπότε έχουν και $BD = GE$.



β) i. Το ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου

ΔΒΓ, άρα $DM = \frac{BG}{2}$ (1). Το ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου

τριγώνου ΕΒΓ, άρα $EM = \frac{BG}{2}$ (2). Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $MD = ME$.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΑ και ΕΑΓ έχουν:

1) $BD = GE$ και

2) $AB = AG$, δηλαδή

έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά μια προς μία ίσες, άρα είναι ίσα και έχουν $AD = AE$.

Επειδή $MD = ME$ και $AD = AE$, τα Μ, Α ισαπέχουν από τα Δ και Ε, άρα η ΜΑ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΔΕ, η ΜΑ είναι μεσοκάθετος της βάσης ΔΕ, άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας ΔΜΕ.

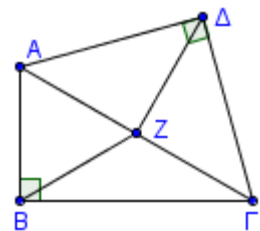
1685. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $B = 90^\circ$ και Ζ το μέσο του ΑΓ. Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ με $\Delta = 90^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $BZ = DZ$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\angle A\Gamma B = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες ΒΑΔ και ΒΓΔ.

(Μονάδες 12)



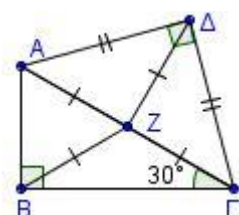
Λύση

α) Η ΒΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα

$BZ = \frac{AG}{2}$ (1). Η ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του

$\angle B\Delta\Gamma = \angle B\Delta G + \angle \Delta\Gamma G = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$ ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, άρα

$DZ = \frac{AG}{2}$ (2). Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $BZ = DZ$.



β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$BA\Gamma + A\Gamma B = 90^\circ \Leftrightarrow BA\Gamma + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow BA\Gamma = 60^\circ.$$

Επειδή το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οι οξείες γωνίες του είναι ίσες με 45° , δηλαδή $\Delta A\Gamma = A\Gamma\Delta = 45^\circ$.

$$\text{Είναι και } B\Gamma\Delta = A\Gamma B + A\Gamma\Delta = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$$

1690. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $B > \Gamma$ φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και την διάμεσό του AM στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

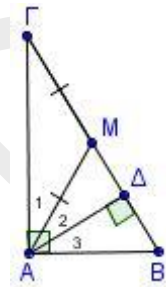
α) $B = \Gamma A\Delta$ (Μονάδες 12)

β) $AM\Delta = 2\Gamma$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Οι γωνίες B και $A\Gamma\Delta$ είναι οξείες με πλευρές κάθετες ($AB \perp A\Gamma$ και $B\Gamma \perp A\Delta$ οπότε είναι ίσες.

β) Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$, άρα το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές και έχει $\Gamma = A_1$. Η γωνία $AM\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AM\Gamma$, άρα $AM\Delta = \Gamma + A_1 = 2\Gamma$.



1691. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $B = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη AE και BZ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$ (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ίσο με το τρίγωνο $B\Gamma Z$, (Μονάδες 9)

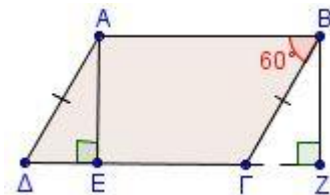
γ) το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Επειδή $BZ \perp \Delta\Gamma$ και $\Delta\Gamma \parallel AB$, είναι $BZ \perp AB$.

Τότε $\Gamma BZ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, οπότε στο ορθογώνιο

$$\text{τρίγωνο } B\Gamma Z \text{ ισχύει ότι } \Gamma Z = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Delta}{2}.$$



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ έχουν:

1) $A\Delta = B\Gamma$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ και

2) $B\Gamma Z = B = 60^\circ = \Delta$ γιατί οι γωνίες $B\Gamma Z$ και B είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$ και οι γωνίες B και Δ είναι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία τους ίση και είναι ίσα.

γ) Επειδή $E = Z = ABZ = 90^\circ$, το τετράπλευρο $ABZE$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.

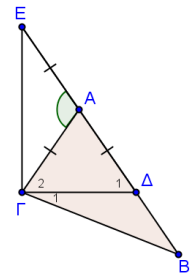
1702. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$ (Μονάδες 12)

β) η γωνία EAG είναι διπλάσια της γωνίας $A\Delta\Gamma$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Επειδή $AE = AG = AD$, στο τρίγωνο $EΓΔ$ η διάμεσος του $ΓΑ$ είναι ίση με το μισό της πλευράς $ΔΕ$ στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα την πλευρά αυτή, δηλαδή $ΕΓΔ = 90^\circ$, άρα $ΔΓ \perp ΕΓ$.



β) Επειδή $AD = AG$, το τρίγωνο $ADΓ$ είναι ισοσκελές με βάση την $ΔΓ$, άρα $\Gamma_2 = \angle AΔΓ$. Η γωνία $ΕΑΓ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ADΓ$, άρα:
 $\angle ΕΑΓ = \Gamma_2 + \angle AΔΓ = 2\angle AΔΓ$.

1704. Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ είναι $B = 120^\circ$ και $ΔΕ \perp ΒΓ$. Έστω $ΕΖ$ η διάμεσος του τριγώνου $ΔΕΓ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες A και Γ του παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 8)

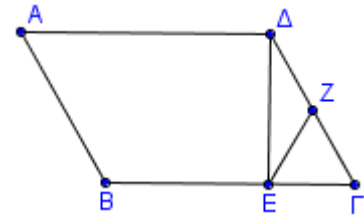
β) Αν K είναι το μέσο της AB , να αποδείξετε ότι $ΕΖ = AK$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $ΕΖΓ$.

(Μονάδες 8)

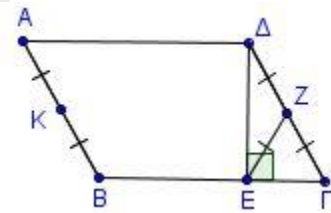
Λύση



α) Οι γωνίες A και B είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AD , $BΓ$ που τέμνονται από την AB . Δηλαδή $A + B = 180^\circ \Leftrightarrow A + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 60^\circ$.

Οι γωνίες A και Γ είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου, άρα είναι ίσες, δηλαδή $\Gamma = 60^\circ$.

β) Η EZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτεινούσα του ορθογωνίου τριγώνου $ΔΕΓ$, άρα $EZ = \frac{ΔΓ}{2}$. Όμως $AK = \frac{AB}{2}$ και $AB = ΓΔ$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ABΓΔ$, άρα είναι και $EZ = AK$.



γ) Είναι $EZ = \frac{ΔΓ}{2} = ZΓ$, άρα το τρίγωνο $ΕΖΓ$ είναι ισοσκελές και

επειδή έχει $\Gamma = 60^\circ$, είναι ισόπλευρο. Άρα $\angle ΕΖΓ = 60^\circ$.

13653. Σχεδιάζουμε γωνία $\angle xOy = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο A επί της πλευράς Ox , τέτοιο ώστε $AO = 2$. Φέρουμε τη διχοτόμο $Oδ$ της γωνίας $\angle xOy$ και θεωρούμε σημείο M στην $Oδ$, τέτοιο ώστε $AM = AO$. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία δOy .

(Μονάδες 6)

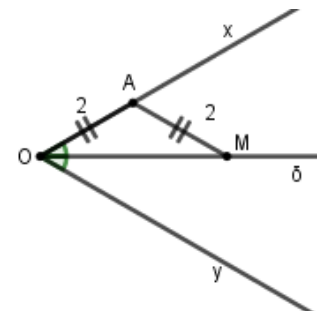
β) Τις γωνίες του τριγώνου AOM .

(Μονάδες 9)

γ) Το μήκος του ύψους AB που αντιστοιχεί στη βάση OM του ισοσκελούς τριγώνου AOM .

(Μονάδες 10)

Λύση



α) Η ημιευθεία $Oδ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle xOy$, οπότε οι γωνίες $\angle xOδ$ και δOy θα είναι ίσες. Άρα, $\angle xOδ = \delta Oy = 60^\circ : 2 = 30^\circ$.

β) Είναι $\angle AOM = \angle xOδ = 30^\circ$.

Το τρίγωνο AOM είναι ισοσκελές με βάση OM , αφού $AO = AM$. Επομένως, οι γωνίες $\angle AOM$ και $\angle AMO$ είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση. Άρα, $\angle AOM = \angle AMO = 30^\circ$.

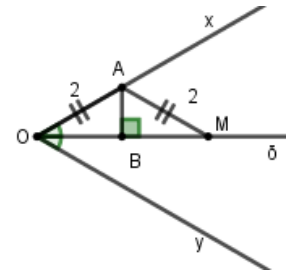
Στο τρίγωνο AOM ισχύει:

$$AOM + AMO + MAO = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 30^\circ + MAO = 180^\circ \Leftrightarrow MAO = 120^\circ.$$

γ) Φέρουμε το ύψος AB που αντιστοιχεί στη βάση OM του ισοσκελούς τριγώνου AOM.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AOB είναι $\angle AOB = 30^\circ$, οπότε, η απέναντι κάθετη πλευρά, δηλαδή η AB, ισούται με το μισό της υποτείνουσας OA. Άρα,

$$AB = \frac{OA}{2} = \frac{2}{2} = 1$$



13831. Ένα τρίγωνο ABΓ έχει $\angle A = 90^\circ$.

α) Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $AB > AG$. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί; (Μονάδες 10)

β) Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α) ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30° , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:

i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία B και πόσες η γωνία Γ; (Μονάδες 8)

ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας; (Μονάδες 7)

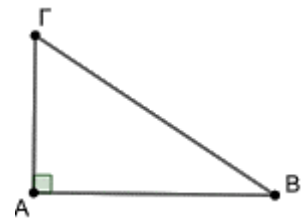
Λύση

α) Το τρίγωνο θα είναι ορθογώνιο. Απέναντι από την ορθή γωνία A είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Αυτή είναι η BG. Οι άλλες δύο πλευρές είναι μικρότερες από την BG και, λόγω της υπόθεσης $AB > AG$, άρα η μικρότερη πλευρά του τριγώνου είναι η AG.

Όμως, απέναντι από τη μικρότερη πλευρά ενός τριγώνου βρίσκεται η μικρότερη γωνία του. Άρα, η γωνία B είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου.

β) i. Εφόσον η μια οξεία γωνία του τριγώνου ABΓ είναι 30° η άλλη οξεία γωνία του είναι συμπληρωματική της, άρα 60° . Όμως η μικρότερη γωνία του τριγώνου είναι η B, άρα

$$B = 30^\circ \text{ και } \Gamma = 60^\circ.$$



ii. Η BG είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ. Εφόσον $B = 30^\circ$ η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας B είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα η πλευρά AG είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

13837. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\angle A = 90^\circ$ και $\angle B = 60^\circ$.

Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε που είναι τα μέσα των πλευρών BG και AG αντίστοιχα.

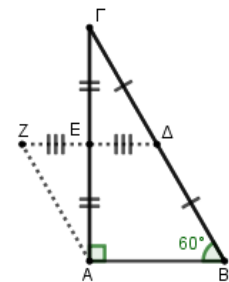
Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα $EZ = \Delta E$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = AZ$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ZAB είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AEZ και ΓΕΔ που έχουν:

- $AE = EG$ (από υπόθεση)

- $EZ = ED$ (από υπόθεση)

- $\angle AEZ = \angle ΓΕΔ$ (ως κατακορυφήν)

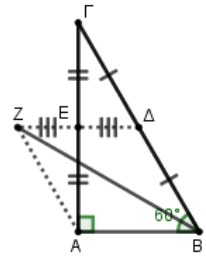
Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες, άρα $AZ = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $\angle AEZ$ και $\angle ΓΕΔ$.

ή

Το Ε μέσο των ΖΔ, ΑΓ άρα οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΖΓΔ διχοτομούνται οπότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο και ΑΖ=ΓΔ (απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου)

β) ΑΖ=ΓΔ από το α) ερώτημα και ΓΔ=ΔΒ επειδή το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Άρα $AZ = \Delta B = \frac{BG}{2}$.

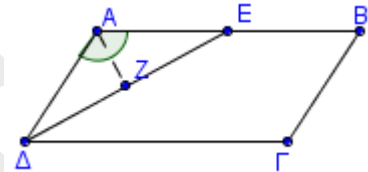
Από το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε ότι $\Gamma = 30^\circ$, συνεπώς η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΒ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή $AB = \frac{BG}{2}$. Άρα ΑΖ = ΑΒ και το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.



14876. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A = 120^\circ$ και $AB = 2AD$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\angle ADE = 30^\circ$ (Μονάδες 10)

β) $AZ = \frac{AB}{4}$ (Μονάδες 15)



Λύση

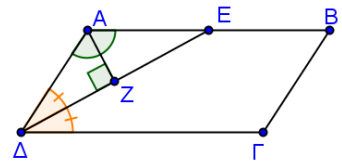
α) Είναι $\angle E\Delta\Gamma = \angle E\Delta A$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ και $\angle E\Delta\Gamma = \angle A\Delta E$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Δ, άρα είναι και $\angle A\Delta E = \angle E\Delta A$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ, έχουμε:

$$A + \angle A\Delta E + \angle E\Delta A = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2\angle A\Delta E = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle A\Delta E = 60^\circ \Leftrightarrow \angle A\Delta E = 30^\circ.$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΖ είναι $\angle A\Delta E = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά από τη γωνία αυτή ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή, $AZ = \frac{AD}{2}$. Όμως

$$AB = 2AD \Leftrightarrow AD = \frac{AB}{2}, \text{ άρα } AZ = \frac{\frac{AB}{2}}{2} = \frac{AB}{4}.$$



4^ο Θέμα

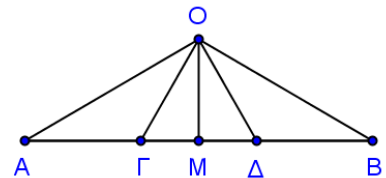
1710. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $AG = GD = DB$. Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν $OG = AG$ και $\Delta B = OD$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\angle O\Delta = 60^\circ$ (Μονάδες 9)

ii. $\angle OAG = \angle O\Delta B = 30^\circ$ (Μονάδες 9)

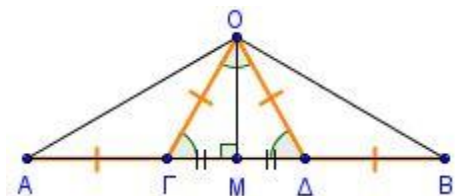
β) Αν Μ το μέσον του τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι $2OM = OA$. (Μονάδες 7)



Λύση

α) i. Είναι $AG = OG = GD = DB = OD$, οπότε το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισόπλευρο και οι γωνίες του είναι ίσες με 60° .

Άρα $\angle O\Delta = 60^\circ$.



ii. Επειδή $ΟΓ = ΑΓ$, το τρίγωνο $ΟΑΓ$ είναι ισοσκελές και έχει $ΟΑΓ = ΑΟΓ$.

Η γωνία $ΟΓΔ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΟΓΑ$, άρα

$$ΟΓΔ = ΟΑΓ + ΑΟΓ \Leftrightarrow 60^\circ = ΟΑΓ + ΑΟΓ \Leftrightarrow 60^\circ = 2ΟΑΓ \Leftrightarrow ΟΑΓ = 30^\circ$$

Όμοια: Η γωνία $ΟΔΒ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΟΓΑ$, άρα

$$ΟΔΒ = ΒΟΔ + ΔΒΟ \Leftrightarrow 60^\circ = ΒΟΔ + ΔΒΟ \Leftrightarrow 60^\circ = 2ΔΒΟ \Leftrightarrow ΔΒΟ = 30^\circ$$

β) Επειδή $ΟΑΓ = ΟΒΔ = 30^\circ$, το τρίγωνο $ΟΑΒ$ είναι ισοσκελές και η διάμεσός του $ΟΜ$ είναι και ύψος του. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΜΑ$, είναι $ΟΑΜ = 30^\circ$, άρα $ΟΜ = \frac{ΟΑ}{2} \Leftrightarrow 2ΟΜ = ΟΑ$.

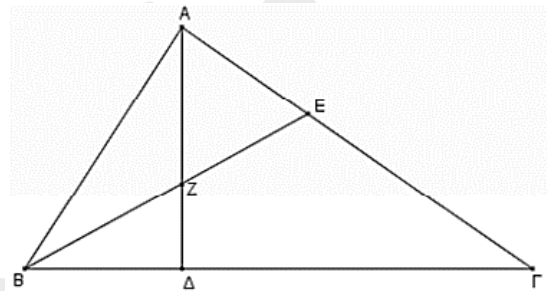
1713. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $A + Γ = 2B$ και έστω $ΑΔ$ ύψος και $ΒΕ$ διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο $Ζ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B = 60^\circ$ και $AZ = BZ$ (Μονάδες 10)

ii. $AD = \frac{3}{2} BZ$ (Μονάδες 8)

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου. (Μονάδες 7)



Λύση

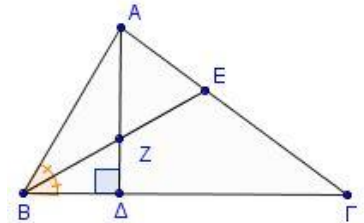
α) i. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι:

$$A + B + Γ = 180^\circ \xRightarrow{A+Γ=2B} 2B + B = 180^\circ \Leftrightarrow 3B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 60^\circ.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι $B + ΒΑΔ = 90^\circ \Leftrightarrow ΒΑΔ = 30^\circ$.

Επειδή η $ΒΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , ισχύει ότι: $ABE = \frac{B}{2} = 30^\circ$.

Επειδή $ABE = ΒΑΔ = 30^\circ$, το τρίγωνο $ΑΒΖ$ είναι ισοσκελές, οπότε $AZ = AB$.



ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΔΖ$ είναι $ZBΔ = 30^\circ$, άρα $ZΔ = \frac{1}{2} BZ$.

$$\text{Είναι } AD = AZ + ZΔ = BZ + \frac{1}{2} BZ = \frac{3}{2} BZ.$$

β) Αν το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, τότε $ΔΑΓ = 60^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΓ$ είναι $ΔΑΓ + Γ = 90^\circ \Leftrightarrow Γ = 30^\circ$. $B = 60^\circ$ από α) i), τότε

$$ΒΑΓ + B + Γ = 180^\circ \Leftrightarrow ΒΑΓ = 90^\circ.$$

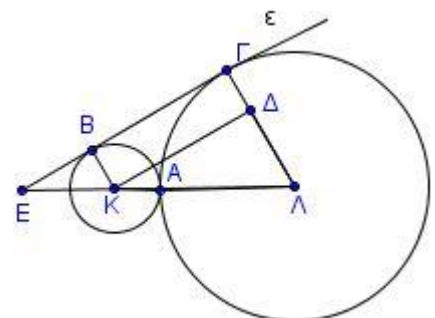
1721. Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο

A . Μια ευθεία εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία B και $Γ$ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου $ΚΛ$ στο σημείο E . Φέρουμε από το σημείο K παράλληλο τμήμα στην $ε$ που τέμνει το τμήμα $ΑΓ$ στο $Δ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΒΓΔΚ$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

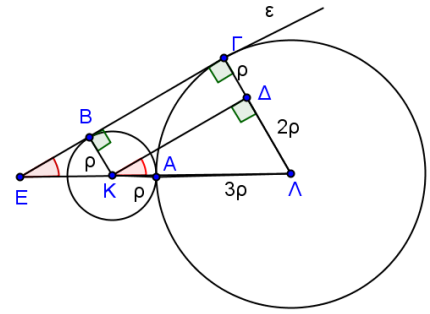
β) Να αποδείξετε ότι $ΔΚΛ = 30^\circ$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $ΕΛ = 6\rho$. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Επειδή τα ΚΒ, ΓΔ είναι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής με την ε, ισχύει ότι $ΚΒ \perp \varepsilon$ και $\Gamma Δ \perp \varepsilon$ θα είναι και $ΚΒ \parallel \Gamma Δ$, $ΒΓ \parallel ΚΔ$.
Το τετράπλευρο ΒΓΔΚ έχει 3 ορθές και είναι ορθογώνιο.



β) Είναι $\Delta\Lambda = \Lambda\Gamma - \Gamma\Delta = 3\rho - \rho = 2\rho$ και
 $K\Lambda = K\Lambda + \Lambda\Lambda = \rho + 3\rho = 4\rho$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΛ η κάθετη πλευρά ΔΛ είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας ΚΛ, άρα η απέναντι γωνία, δηλαδή η $\Delta Κ Λ$ είναι ίση με 30° .

γ) Είναι $E = \Delta K \Lambda = 30^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $K\Delta$ και $E\Gamma$ που τέμνονται από την $ΕΛ$, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΓ\Lambda$ ισχύει ότι: $\Gamma\Lambda = \frac{Ε\Lambda}{2} \Leftrightarrow Ε\Lambda = 2\Gamma\Lambda = 2 \cdot 3\rho = 6\rho$

1737. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και το ύψος του AH .

Ονομάζουμε Δ και E τα συμμετρικά σημεία του H ως προς τις ευθείες AB και AG αντίστοιχα. Αν M είναι το σημείο τομής του τμήματος $H\Delta$ με την πλευρά AB και N είναι το σημείο τομής του HE με την πλευρά AG , να αποδείξετε ότι:

a) $AH = A\Delta = AE$

(Μονάδες 10)

β) Η γωνία ΕΗΔ είναι ορθή.

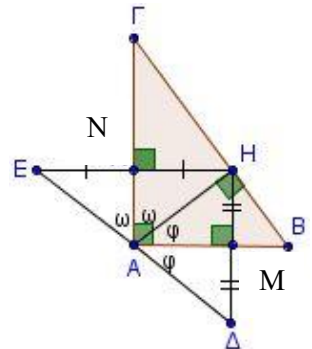
(Μονάδες 8)

γ) Τα σημεία Ε, Α και Δ είναι συνευθειακά και $MN = \frac{\Delta E}{2}$

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΗΔ, η ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AH=AD$ και η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΗΑΔ.
Στο τρίγωνο ΕΑΗ το ΑΛ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AH=AE$ και η ΑΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΕΑΗ.
Άρα $AH=AD=AE$



β) Το τετράπλευρο NAMH έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο, άρα $\angle H = 90^\circ$.

γ) Έστω $\angle EAH = \angle AHD = \omega$ και $\angle HAK = \angle KAD = \varphi$. Επειδή $\angle HAK = 90^\circ$, είναι $\omega + \varphi = 90^\circ$. Είναι $\angle EAD = \omega + \omega + \varphi + \varphi = 2\omega + 2\varphi = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$, άρα τα σημεία E, A, Δ είναι συνευθειακά.

Στο τρίγωνο ΕΗΔ τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών του, οπότε $MN = \Delta E/2$.

1738. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B=2\Gamma$ και η διχοτόμος BD της γωνίας B . Από το μέσο M της AG φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο BD που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο N . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

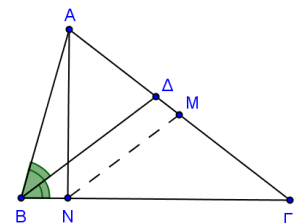
(Μονάδες 5)

β) Το τρίγωνο MNT είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

 $\gamma) \mathbf{AN} \perp \mathbf{B\Gamma}.$

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Είναι $\Delta B\Gamma = \frac{B}{2} = \frac{2\hat{\Gamma}}{2} = \Gamma$, οπότε το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές.

β) Είναι $MNΓ = ΔΒΓ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $BΔ, MN$ που τέμνονται από την $BΓ$ και επειδή $ΔΒΓ = Γ$ είναι και $MNΓ = Γ$. Το τρίγωνο $MNΓ$ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το τρίγωνο $MNΓ$ είναι ισοσκελές με βάση τη $ΝΓ$, είναι $MN = ΜΓ = ΜΑ = \frac{ΑΓ}{2}$.

Στο τρίγωνο $ΑΝΓ$ η διάμεσός του NM είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $ΑΝΓ = 90^\circ$, δηλαδή $ΑΝ \perp ΒΓ$.

1759. Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με γωνία A αμβλεία, ισχύει ότι $ΑΒ = 2ΑΔ$. Τα σημεία E και Z , είναι μέσα των πλευρών του $ΑΒ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα. Από το $Δ$ φέρουμε τη $ΔΗ$ κάθετη στην προέκταση της $BΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ΑΕΖΔ$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $ΕΖΗ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Το τμήμα $ΗΕ$, είναι διχοτόμος της γωνίας $ΖΗΓ$. (Μονάδες 8)

Λύση

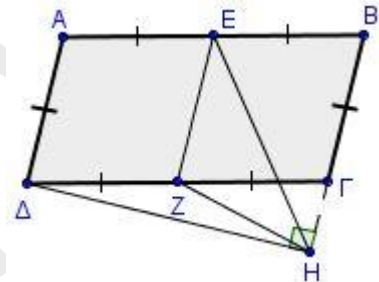
α) Είναι $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΓΔ}{2} = ΔΖ$ και επειδή $ΑΕ \parallel ΔΖ$, το τετράπλευρο

$ΑΔΖΕ$ είναι παραλληλόγραμμο. Όμως $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2} = ΑΔ$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο $ΑΔΖΕ$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΗΓΔ$ το $ΗΖ$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ΗΖ = \frac{ΓΔ}{2} = \frac{2ΔΖ}{2} = ΔΖ \stackrel{ΑΔΖΕ \text{ ρόμβος}}{=} ΕΖ$, άρα το τρίγωνο $ΕΖΗ$ είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το τρίγωνο $ΕΗΖ$ είναι ισοσκελές με βάση την $ΕΗ$, ισχύει ότι $ΖΕΗ = ΖΗΕ$.

Όμως $ΖΕΗ = ΕΗΓ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΕΖ, ΒΗ$ που τέμνονται από την $ΕΗ$, άρα και $ΖΗΕ = ΕΗΓ$, δηλαδή η $ΕΗ$ διχοτομεί τη γωνία $ΖΗΓ$.



1761. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με γωνία A ίση με 120° και γωνία B ίση με 45° . Στην προέκταση της $ΒΑ$ προς το A , παίρνουμε τμήμα $ΑΔ = 2ΑΒ$. Από το $Δ$ φέρνουμε την κάθετη στην $ΑΓ$ που την τέμνει στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΔΚ = 30^\circ$ (Μονάδες 6)

β) Το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

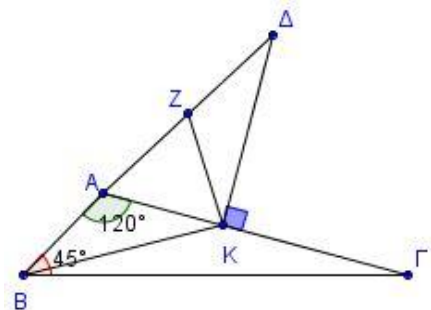
γ) Αν Z το μέσο της $ΔΑ$, τότε $ΖΚΒ = 90^\circ$ (Μονάδες 6)

δ) Το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $ΒΔ$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Είναι $ΚΑΔ + ΓΑΒ = 180^\circ \Leftrightarrow ΚΑΔ + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow ΚΑΔ = 60^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΚΑΔ$ ισχύει ότι: $ΚΑΔ + ΑΔΚ = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + ΑΔΚ = 90^\circ \Leftrightarrow ΑΔΚ = 30^\circ$



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔK είναι $\angle \Delta K = 30^\circ$, άρα $AK = \frac{AD}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$, άρα το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές.

γ) $AZ = \frac{AD}{2} = \frac{2AB}{2} = AB = AK$. Άρα A μέσο και $AK = \frac{BZ}{2}$.

Επομένως το τρίγωνο BKZ είναι ορθογώνιο με $\angle BKZ = 90^\circ$

δ) Επειδή $\angle ABK = \angle \Delta K = 30^\circ$, το τρίγωνο KBD είναι ισοσκελές, άρα $KB = KD$. Επειδή το K ισαπέχει από τα B, Δ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $B\Delta$.

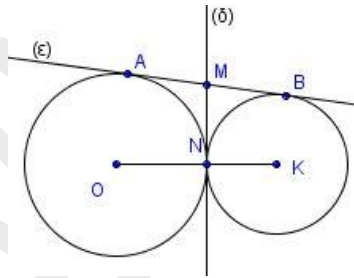
1771. Δύο κύκλοι $(O, \rho_1), (K, \rho_2)$ εφάπτονται εξωτερικά στο N .

Μια ευθεία ε εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία A, B αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο N τέμνει την ε στο M . Να αποδείξετε ότι:

α) Το M είναι μέσο του AB . (Μονάδες 7)

β) $\angle OMK = 90^\circ$ (Μονάδες 9)

γ) $\angle ANB = 90^\circ$ (Μονάδες 9)



Λύση

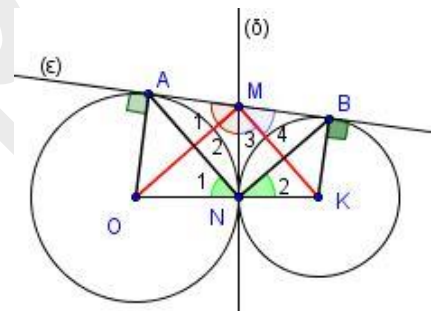
α) Τα MA, MN είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το M προς τον κύκλο (O, ρ_1) , άρα είναι ίσα. Τα MB, MN είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το M προς τον κύκλο (K, ρ_2) , άρα είναι ίσα. Δηλαδή $MA = MB = MN$.

β) Η διακεντρική ευθεία MO διχοτομεί τη γωνία $\angle AMO$, άρα $\angle AMO = \angle OMN = \hat{\omega}$. Η διακεντρική ευθεία MK διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων $\angle NMB$, άρα $\angle NMK = \angle KMB = \hat{\varphi}$.

Είναι $\angle AMB = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega + 2\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \omega + \varphi = 90^\circ$, άρα

$\angle OMK = \omega + \varphi = 90^\circ$.

γ) $NM = \frac{AB}{2}$ και NM διάμεσος στο τρίγωνο ANB . Άρα το τρίγωνο ANB ορθογώνιο με ορθή την γωνία $\angle ANB$.

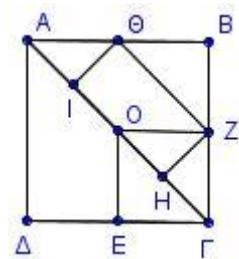


1781. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στη διαγώνιο AG θεωρούμε σημεία I, O, H ώστε $AI = IO = OH = HG$. Αν E, Θ και Z τα μέσα των πλευρών $\Delta\Gamma$, AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $OZ\Gamma E$ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 7)

β) $ZH = \frac{AG}{4}$ (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο $I\Theta ZH$ είναι ορθογώνιο με $\angle Z = 2\angle I$. (Μονάδες 10)

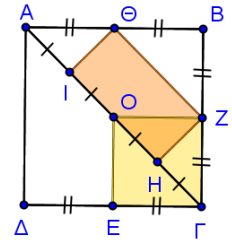


Λύση

α) Τα Ο,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα $OE \parallel AD$ και $OE = \frac{AD}{2}$.

Όμως $AD \parallel BG$, οπότε $OE \parallel ZG$ και $OE = \frac{BG}{2} = GZ$. Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο και επειδή έχει $\Gamma = 90^\circ$ είναι ορθογώνιο. Είναι

$$OE = EG = GZ = ZO = \frac{AD}{2} = \frac{GD}{2}, \text{ οπότε το } OZGE \text{ είναι τετράγωνο.}$$



β) Η ΖΗ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΖΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$ZH = \frac{OG}{2} = \frac{\frac{AG}{2}}{2} = \frac{AG}{4}.$$

γ) Επειδή τα Θ,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\Theta Z \parallel AG \Leftrightarrow \Theta Z \parallel IH$ και

$$\Theta Z = \frac{AG}{2}. \text{ Είναι } IH = IO + OH = \frac{AO}{2} + \frac{OG}{2} = \frac{AG}{2} = \Theta Z.$$

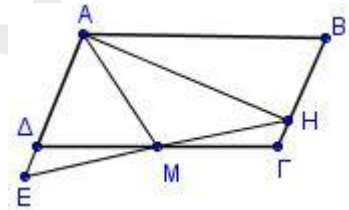
Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΖΓ, το ΖΗ είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος, δηλαδή $ZHO = 90^\circ$. Επειδή το παραλληλόγραμμο ΙΘΖΗ έχει μία ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

1787. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2BG$, τη γωνία Α αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ. (Μονάδες 9)

β) Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

γ) $E = \Delta MA$ (Μονάδες 8)



Λύση

α) Είναι $BAM = M_1$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΑΜ.

Επειδή το Μ είναι μέσο του ΔΓ ισχύει ότι

$$\Delta M = \frac{DG}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{2BG}{2} = BG = AD, \text{ άρα το τρίγωνο } \Delta MA \text{ είναι}$$

ισοσκελές και έχει $\Delta MA = A_1$ (2).

Από τις (1),(2) είναι $BAM = A_1$, οπότε η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ.

β) Τα τρίγωνα ΔΕΜ και ΜΗΓ έχουν:

1) $\Delta M = MG$

2) $\Delta ME = HMG$ ως κατακορυφήν και

3) $EAM = G$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ.

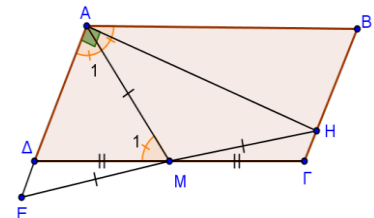
Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ME = MH$.

Επειδή $\Delta M = MG$ και $ME = MH$, τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΗ, η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$AM = ME = MH = \frac{EH}{2}, \text{ οπότε το τρίγωνο } AME \text{ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι } E = A_1.$$

Όμως είναι και $\Delta MA = A_1$, άρα $E = \Delta MA$.



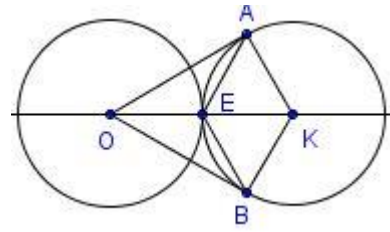
1796. Δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο E . Αν OA και OB είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο O στον κύκλο (K, ρ) , να αποδείξετε ότι:

α) $AE = BE$ (Μονάδες 9)

β) $\angle AOK = 30^\circ$ (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο $AKBE$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

Λύση

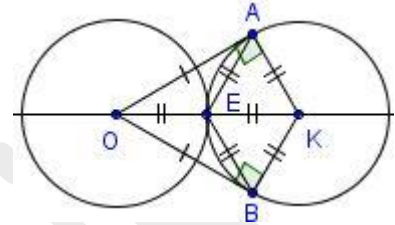


α) Τα τρίγωνα OAE και OBE έχουν:

- 1) τη πλευρά OE κοινή
- 2) $OA = OB$ γιατί τα εφαπτόμενα τμήματα που ágονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν είναι ίσα και
- 3) $\angle AOE = \angle BOE$ γιατί η διακεντρική ευθεία OK

διχοτομεί τη γωνία $\angle AOB$ των εφαπτομένων

Με βάση το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $AE = BE$.



β) Επειδή η AK είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής με την OA , θα είναι $OA \perp AK$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο AOK είναι $AK = \rho$ και $OK = 2\rho = 2AK \Leftrightarrow AK = \frac{OK}{2}$, δηλαδή μια κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, άρα η απέναντι γωνία από τη πλευρά αυτή είναι 30° , δηλαδή $\angle AOK = 30^\circ$.

γ) Το τμήμα AE είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο OAK που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα $AE = \frac{OK}{2} = \rho$. Το τμήμα BE είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο OBK που αντιστοιχεί στην

υποτείνουσα του, άρα $BE = \frac{OK}{2} = \rho$. Επειδή $AE = BE = KB = AK = \rho$, το τετράπλευρο $AKBE$ είναι ρόμβος.

1806. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του AM και σε τυχαίο σημείο K αυτής φέρουμε κάθετη στην AM η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν H είναι το μέσο του ΔE να αποδείξετε ότι:

α) $\angle B = \angle BAM$ (Μονάδες 8)

β) $\angle A\Delta H = \angle A\Delta H$. (Μονάδες 9)

γ) Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$. (Μονάδες 8)

Λύση

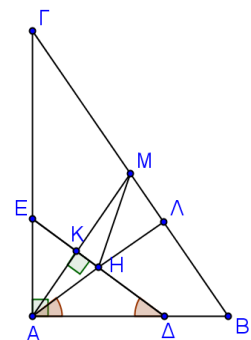
α) Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = MG$, άρα το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με βάση την AB και ισχύει ότι $\angle B = \angle BAM$.

β) Το AH είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $A\Delta E$, άρα $AH = \frac{\Delta E}{2} = H\Delta = HE$, άρα το τρίγωνο $AH\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Delta$ και ισχύει ότι $\angle A\Delta H = \angle A\Delta H$.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AK\Delta$, έχουμε:

$$\angle BAM + \angle A\Delta H = 90^\circ \Leftrightarrow \angle B + \angle A\Delta H = 90^\circ \Leftrightarrow \angle A\Delta H = 90^\circ - \angle B = \angle A\Delta H$$

Στο τρίγωνο $A\Delta B$ έχουμε $\angle A\Delta H + \angle B = 90^\circ \Leftrightarrow \angle A\Delta B = 90^\circ$. Άρα και $\angle A\Delta B = 90^\circ$, δηλαδή $AH \perp B\Gamma$.



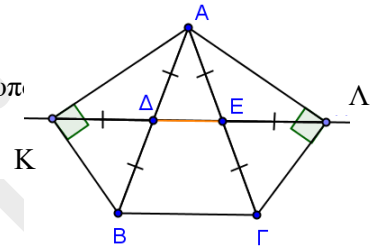
1808. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και Δ, E τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση της AE (προς το E) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $E\Lambda = AE$ και στη προέκταση της ED (προς το Δ) θεωρούμε σημείο K τέτοιο, ώστε $\Delta K = AD$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $K\Delta = \Lambda E$ (Μονάδες 6)
 β) Τα τρίγωνα AKB και $A\Lambda\Gamma$ είναι ορθογώνια. (Μονάδες 9)
 γ) Τα τρίγωνα AKB και $A\Lambda\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $K\Delta = \Lambda E = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = AE = \Lambda E$.

β) Επειδή $K\Delta = \frac{AB}{2}$, μια διάμεσος στο τρίγωνο AKB ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υπ
 Επειδή $\Lambda E = \frac{A\Gamma}{2}$, μια διάμεσος στο τρίγωνο $A\Lambda\Gamma$ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη πλευρά αυτή.



γ) Τα τρίγωνα $AK\Delta$ και $AE\Lambda$ έχουν:

- 1) $AD = AE$
- 2) $K\Delta = \Lambda E$ και
- 3) $\angle AK\Delta = \angle AE\Lambda$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\angle ADE$ και $\angle AED$ (το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές)

Με βάση το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $AK = A\Lambda$.

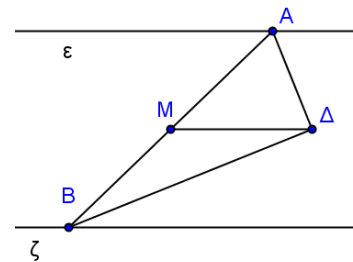
Τα ορθογώνια τρίγωνα AKB και $A\Lambda\Gamma$ έχουν:

- 1) $AK = A\Lambda$ και 2) $AB = A\Gamma$,

δηλαδή έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε είναι ίσα.

1811. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες (ϵ) και (ζ) και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία A και B αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ . Αν M είναι το μέσον του AB , να αποδείξετε ότι:

- α) $\angle B\Delta A = 90^\circ$ (Μονάδες 9)
 β) $\angle BMD = 2\angle M\Delta A$ (Μονάδες 8)
 γ) $M\Delta \parallel \epsilon$ (Μονάδες 8)



Λύση

α) Έστω AD , BD οι διχοτόμοι των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών ΓAM και MBE . Έστω $\angle MBD = \angle DBE = \omega$ και

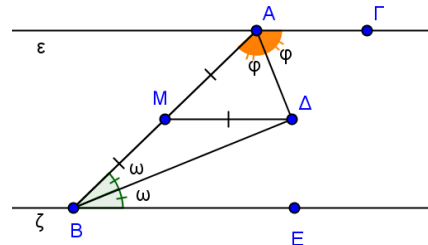
$$\angle MAD = \angle DAG = \varphi.$$

Επειδή οι γωνίες ΓAM και MBE είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ϵ , ζ που τέμνονται από την AB , είναι παραπληρωματικές, άρα

$$\angle GAM + \angle MBE = 180^\circ \Leftrightarrow 2\varphi + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \varphi + \omega = 90^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta B$, έχουμε:

$$\angle B\Delta A + \omega + \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \angle B\Delta A + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle B\Delta A = 90^\circ$$



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ η DM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε

$$\Delta M = \frac{AB}{2} = MA = MB, \text{ άρα το τρίγωνο } \Delta M \Delta \text{ είναι ισοσκελές και οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση}$$

του $\Delta \Delta$ είναι ίσες. Δηλαδή $\angle M \Delta \Delta = \angle \Delta M \Delta = \varphi$.

Η γωνία $\angle B M \Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\Delta M \Delta$, οπότε: $\angle B M \Delta = \angle \Delta M \Delta + \angle M \Delta \Delta = 2\angle \Delta M \Delta$

γ) Είναι $\angle B M \Delta + \angle M B E = 2\varphi + 2\omega = 180^\circ$.

Οι γωνίες $\angle B M \Delta$ και $\angle M B E$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των $M \Delta$, (ζ) που τέμνονται από την $M B$ και επειδή είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες $M \Delta$ και (ζ) είναι παράλληλες, άρα και $M \Delta \parallel \varepsilon$.

1812. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta B \Gamma$ με τη γωνία Δ ορθή και M τυχαίο σημείο της πλευράς $B \Gamma$. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών $\angle B M \Delta$ και $\angle A M \Gamma$ οι οποίες τέμνουν τις ΔB και $\Delta \Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\angle M E$ είναι ορθή. (Μονάδες 12)

β) Αν K το μέσο του ΔE , να αποδείξετε ότι $M K = K A$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Επειδή η $M \Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle B M \Delta$, είναι $\angle B M \Delta = \angle \Delta M \Delta = \omega$ και επειδή η $M E$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle A M \Gamma$, ισχύει ότι $\angle A M E = \angle E M \Gamma = \varphi$.

$$\text{Είναι } \angle A M B + \angle A M \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega + 2\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\omega + \varphi = 90^\circ. \text{ Όμως } \angle M E = \omega + \varphi, \text{ άρα } \angle M E = 90^\circ.$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta \Delta E$, η ΔK είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $A K = \frac{\Delta E}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta M E$, η $M K$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $M K = \frac{\Delta E}{2}$.

$$\text{Οπότε } A K = M K = \frac{\Delta E}{2}.$$

1824. Δίνεται τρίγωνο $\Delta B \Gamma$ και στην προέκταση της ΓB προς το B , θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\Delta B = \Delta B$ ενώ στη προέκταση της $B \Gamma$ προς το Γ , θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $\Gamma E = \Delta \Gamma$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών $\angle B$ και $\angle \Gamma$ τέμνουν τις $\Delta \Delta$ και ΔE στα σημεία K και Λ αντίστοιχα και η $K \Lambda$ τέμνει τις ΔB και $\Delta \Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία K και Λ είναι μέσα των $\Delta \Delta$ και ΔE αντίστοιχα.

β) Τα τρίγωνα $\Delta K M \Delta$ και $\Delta \Lambda N$ είναι ισοσκελή.

$$\gamma) K \Lambda = \frac{\Delta B + \Delta \Gamma + B \Gamma}{2}$$

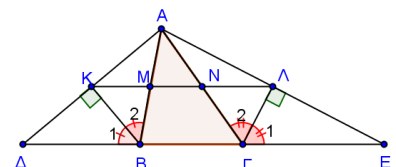
(Μονάδες 8)

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Επειδή $\Delta B = \Delta B$, το τρίγωνο $\Delta B \Delta$ είναι ισοσκελές και το $B K$ είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου. Άρα το K είναι μέσο του $\Delta \Delta$. Επειδή $\Gamma E = \Delta \Gamma$, το τρίγωνο $\Delta \Gamma E$ είναι ισοσκελές και το $\Gamma \Lambda$ είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου. Άρα το Λ είναι μέσο του ΔE .



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ το ΚΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα

$$ΚΜ = \frac{ΑΒ}{2} = ΜΑ, \text{ άρα το τρίγωνο ΚΜΑ είναι ισοσκελές.}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΛΓ το ΛΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του,

$$\text{άρα } ΛΝ = \frac{ΑΓ}{2} = ΝΑ, \text{ άρα το τρίγωνο ΑΝΛ είναι ισοσκελές.}$$

γ) Στο τρίγωνο ΑΔΕ τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα η ΚΛ είναι παράλληλη στη ΒΓ.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ το Κ είναι μέσο της ΑΔ και η ΚΜ είναι παράλληλη στην ΒΔ, άρα το Μ είναι μέσο της ΑΒ. Στο τρίγωνο ΑΓΕ το Λ είναι μέσο του ΑΕ και η ΛΝ είναι παράλληλη στην ΓΕ, άρα το Ν είναι μέσο

$$\text{της ΑΓ. Άρα } ΚΜ = \frac{ΔΒ}{2} \text{ και } ΛΝ = \frac{ΓΕ}{2}$$

$$\text{Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών, άρα } ΜΝ = \frac{ΒΓ}{2}.$$

$$\text{Είναι } ΚΛ = ΚΜ + ΜΝ + ΝΛ = \frac{ΔΒ}{2} + \frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΓΕ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ}{2}.$$

1831. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και $Β = 2Γ$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο, ώστε $ΒΕ = ΒΔ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ. (Μονάδες 9)

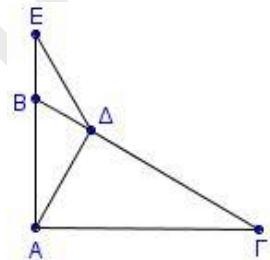
β) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΒΕ = \frac{ΑΒ}{2}$

(Μονάδες 8)

ii. $ΑΕ = ΓΔ$

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$Β + Γ = 90^\circ \Leftrightarrow 2Γ + Γ = 90^\circ \Leftrightarrow 3Γ = 90^\circ \Leftrightarrow Γ = 30^\circ \text{ και } Β = 60^\circ.$$

$$\text{Είναι } ΕΒΔ = 180^\circ - Β = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΒΔΕ έχουμε:

$$ΕΒΔ + Ε + ΕΔΒ = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2Ε = 180^\circ \Leftrightarrow Ε = 30^\circ = ΕΔΒ$$

β)i. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ έχουμε:

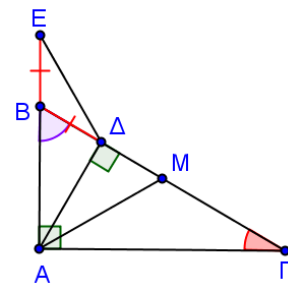
$$ΒΑΔ + Β = 90^\circ \Leftrightarrow ΒΑΔ + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow ΒΑΔ = 30^\circ, \text{ οπότε στο}$$

$$\text{τρίγωνο αυτό ισχύει ότι: } ΒΔ = \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΒΕ = \frac{ΑΒ}{2}.$$

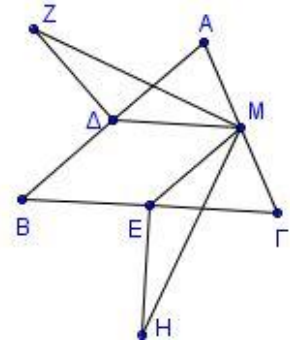
ii. Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Επειδή η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι

$$ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΒ. \text{ Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΒ έχει } Β = 60^\circ, \text{ άρα είναι}$$

ισόπλευρο και $ΑΒ = ΒΜ = ΜΓ$. Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΜΒ το ΑΔ είναι ύψος άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή $ΒΔ = ΔΜ$. Είναι $ΑΕ = ΑΒ + ΒΕ = ΜΓ + ΒΔ = ΜΓ + ΜΔ = ΓΔ$.



1832. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με τις γωνίες B και Γ οξείες και Δ, M και E τα μέσα των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των AB και $B\Gamma$ και εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε σημεία Z και H αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $\Delta Z = \frac{AB}{2}$ και $EH = \frac{B\Gamma}{2}$.



α) Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $B\Delta M E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)
 - Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH είναι ίσα. (Μονάδες 10)
- β) Αν τα σημεία Z, Δ, E είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $A = 90^\circ$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) i. Επειδή τα σημεία Δ και M είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, ισχύει ότι

$$\Delta M \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \Delta M \parallel BE \text{ και } \Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = BE.$$

Στο τετράπλευρο $B\Delta M E$ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH έχουν:

$$1) Z\Delta = \frac{AB}{2} = B\Delta = ME \text{ γιατί τα } B\Delta \text{ και } ME \text{ είναι απέναντι}$$

πλευρές παραλληλογράμμου

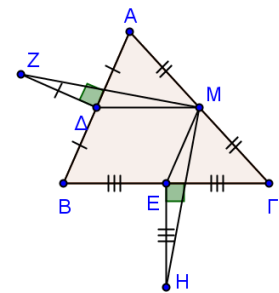
$$2) M\Delta = BE = \frac{B\Gamma}{2} = EH \text{ γιατί τα } M\Delta, BE \text{ είναι απέναντι}$$

πλευρές παραλληλογράμμου και

$$3) MEH = Z\Delta M \text{ γιατί } MEH = 90^\circ + MEG, Z\Delta M = 90^\circ + A\Delta M,$$

$MEG = B$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ME, AB που τέμνονται από την BE και $A\Delta M = B$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $M\Delta, B\Gamma$ που τέμνονται από την $B\Delta$.

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

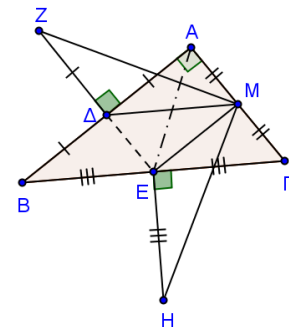


β) Επειδή η $Z\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AB , αν τα Z, Δ, E είναι συνευθειακά, τότε το E ανήκει στη μεσοκάθετο του AB οπότε ισαπέχει

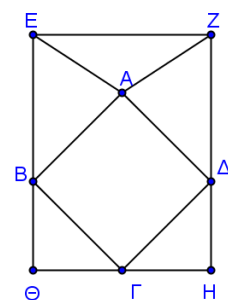
από τα A και B . Δηλαδή $EA = EB$. Όμως $EB = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα

και $AE = \frac{B\Gamma}{2}$. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ μια διάμεσός του, η AE είναι ίση με το

μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$.



1850. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο $EZH\Theta$ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο A της μεσοκαθέτου του τμήματος EZ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους $E\Theta$, ΘH , HZ στα σημεία B, Γ και Δ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης A . Για τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$ που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ. η γωνία ABE) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ. η γωνία $\Theta B\Gamma$) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45° .



α) Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 9)
 - Η διαδρομή $AB\Gamma\Delta A$ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο. (Μονάδες 8)
- β) Αν η AZ είναι διπλάσια από την απόσταση του A από τον τοίχο EZ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AEZ . (Μονάδες 8)

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα EAB και ZAD είναι ίσα γιατί έχουν:

1) $EA = AZ$ (A σημείο της μεσοκαθέτου του EZ)

2) $\hat{AEB} = \hat{AZD}$ γιατί $E = Z = 90^\circ$ και $\hat{AEZ} = \hat{AZE}$ αφού το AZE τρίγωνο είναι ισοσκελές.

3) $\hat{EAB} = \hat{ZAD}$ γιατί τα τρίγωνα AEB και AZD έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες τους γωνίες θα είναι ίσες.

Λόγω του ΓΠΓ τα τρίγωνα EAB και ZAD είναι ίσα.

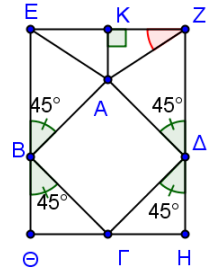
ii. Επειδή οι γωνίες πρόσκρουσης και ανάκλασης είναι 45° , ισχύει ότι

$\hat{ABE} = \hat{GBG} = \hat{BGG} = \hat{DGH} = \hat{HAG} = \hat{ADZ} = 45^\circ$, άρα

$\hat{ABG} = \hat{BGD} = \hat{GDA} = 90^\circ$, οπότε το τετράπλευρο ABGD είναι ορθογώνιο.

Επειδή τα τρίγωνα EAB και ZAD είναι ίσα, είναι και $AB = AD$.

Το ορθογώνιο ABGD έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, επομένως είναι τετράγωνο.



β) Έστω AK η απόσταση του A από τον τοίχο EZ. Είναι $AZ = 2AK \Leftrightarrow AK = \frac{AZ}{2}$,

δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο AKZ μια κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, άρα η απέναντι γωνία από την πλευρά αυτή είναι 30° , δηλαδή $\hat{AZK} = 30^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές με βάση την EZ, ισχύει ότι: $\hat{AEZ} = \hat{AZK} = 30^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AEZ, έχουμε:

$$\hat{EAZ} + \hat{AEZ} + \hat{AZK} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{EAZ} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{EAZ} = 120^\circ$$

1858. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Στην προέκταση του ύψους του AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = KD$. Έστω Λ, Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων AB, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABA είναι ισοσκελές.

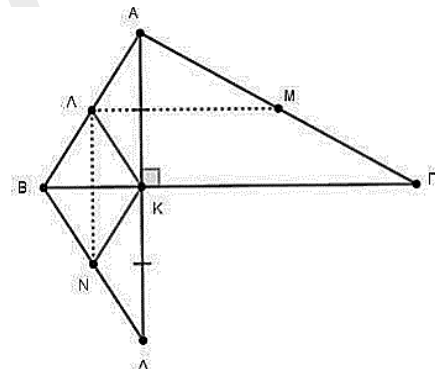
(Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο BAKN είναι ρόμβος.

(Μονάδες 9)

γ) $AM \perp AN$

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Αφού το AK είναι ύψος στο τρίγωνο ABΓ, άρα το AD είναι κάθετο στο BΓ. Αφού είναι $AK = KD$, άρα το K είναι μέσο του AD. Οπότε, στο τρίγωνο ABD το BK είναι ύψος και διάμεσος στην πλευρά AD. Άρα το τρίγωνο ABD είναι ισοσκελές με βάση την AD και ίσες πλευρές τις BA και BD.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο AKB το KL είναι διάμεσος στην υποτείνουσα BA, άρα είναι $KL = BA/2$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BKD το KN είναι διάμεσος στην υποτείνουσα BD, άρα είναι $KN = BD/2$ (2)

Επειδή τα Λ, Ν είναι μέσα των BA, BD αντίστοιχα, θα είναι $BL = BA/2$ (3) και $BN = BD/2$ (4).

Επειδή το τρίγωνο ABD είναι ισοσκελές με $BA = BD$ (από α) ερώτημα) τότε από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) θα είναι $KL = LB = BN = NK$.

Οπότε, το τετράπλευρο BAKN είναι ρόμβος γιατί έχει όλες του τις πλευρές ίσες.

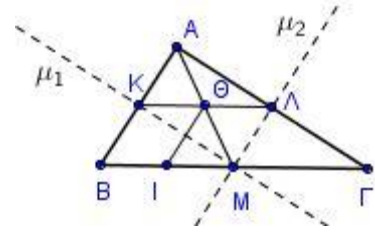
γ) Οι LN και BK είναι διαγώνιοι του ρόμβου BNKL, άρα είναι κάθετες, δηλαδή $LN \perp BK$, οπότε θα είναι $LN \perp BΓ$. Αφού το LM ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΓ, τότε είναι $LM \parallel BΓ$.

Οπότε, αφού LM, BΓ παράλληλες μεταξύ τους και η LN είναι κάθετη στην μία από αυτές, την BΓ, τότε η LN θα είναι κάθετη και στην άλλη, δηλαδή $LN \perp LM$.

1859. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K, Λ τα μέσα των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Φέρουμε τις μεσοκαθέτους μ_1, μ_2 των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο μέσο M της $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$. (Μονάδες 5)
- ii. Το τετράπλευρο $A\Lambda M K$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)
- iii. $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των AM και $K\Lambda$.



(Μονάδες 6)

β) Αν I σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο, ώστε $BI = \frac{B\Gamma}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Theta IB$

είναι παραλληλόγραμμο.

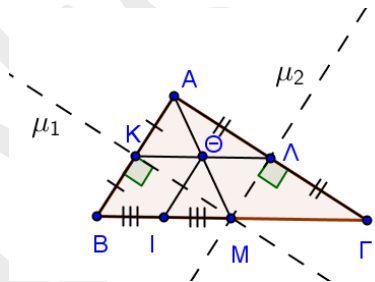
(Μονάδες 7)

Λύση

α) i. Επειδή το σημείο M ανήκει στις μεσοκαθέτους μ_1, μ_2 των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα, ισχύει από τα σημεία A, B, Γ , δηλαδή

$$MA = MB = MG = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος του AM ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$.



ii. Το τετράπλευρο $A\Lambda M K$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.

iii. Επειδή το $A\Lambda M K$ είναι ορθογώνιο, οι διαγωνίες του $AM, K\Lambda$ είναι ίσες και διχοτομούνται. Είναι

$$K\Lambda = AM \Leftrightarrow 2\Theta\Lambda = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}.$$

β) Τα σημεία K, Θ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABM , άρα $K\Theta \parallel BM$ και

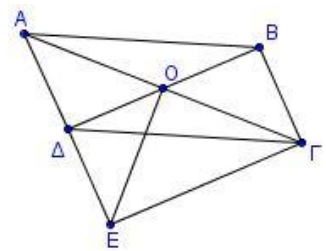
$K\Theta = \frac{BM}{2} = \frac{B\Gamma}{4} = BI$. Το τετράπλευρο $K\Theta IB$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

1862. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην $A\Gamma$ στο κέντρο του O , αυτή να τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ σε σημείο E τέτοιο, ώστε $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\epsilon\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)



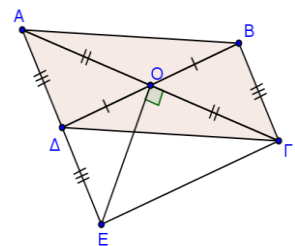
α) Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγωνίες του διχοτομούνται, άρα το O είναι κοινό μέσο των $A\Gamma, B\Delta$.

Στο τρίγωνο $A\epsilon\Gamma$ η EO είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Είναι $B\Gamma = A\Delta = \Delta E$ και $B\Gamma \parallel \Delta E$, αφού η $B\Gamma$ είναι παράλληλη στην $A\Delta$, άρα στο τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο AOE η OD είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

$$\text{υποτείνουσα, άρα } OD = \frac{AE}{2} = \frac{2A\Delta}{2} = A\Delta.$$



Όμως $ΟΔ = ΟΒ$ και $ΑΔ = ΒΓ$, άρα $ΟΒ = ΒΓ$ και το τρίγωνο $ΒΟΓ$ είναι ισοσκελές.

1866. Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με βάση την ΑΒ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, με $\Delta = 120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Η των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η $\Delta\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του AB .

(Μονάδες 8)

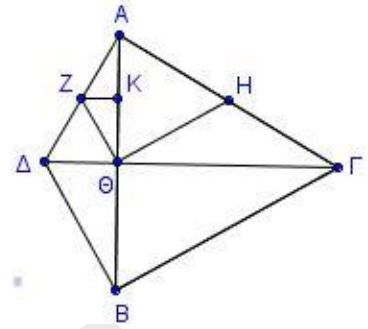
β) Αν η $\Delta\Gamma$ τέμνει την AB στο Θ , να αποδείξετε ότι η γωνία $Z\Theta H$ είναι ορθή.

(Μονάδες 9)

γ) Αν η ZK είναι κάθετη στην AB από το σημείο Z, να

αποδείξτε ότι $ZK = \frac{A\Delta}{4}$.

(Μονάδες 8)

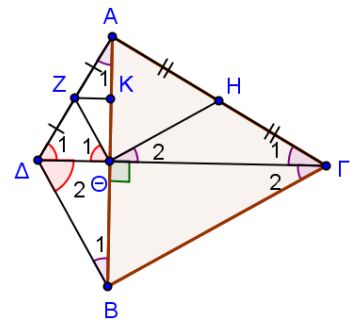


Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $\Gamma A = \Gamma B$, δηλαδή το Γ ισαπέχει από τα A και B , οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του AB .

Επειδή το τρίγωνο $\Delta B \Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Delta = 120^\circ$, έχει βάση την $B \Gamma$ και $\Delta B = \Delta \Gamma$, δηλαδή το Δ ισαπέχει από τα B και Γ , οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του $B \Gamma$.

Επειδή τα σημεία Γ, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ, η ΓΔ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος αυτού.



β) Επειδή η $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AB , η $\Gamma\Delta$ θα είναι και διχοτόμος των γωνιών Δ και Γ , δηλαδή

$\Delta_1 = \Delta_2 = 60^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΔ η ΘΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$\Theta Z = \frac{A\Delta}{2} = Z\Delta$ και αφού $\Delta_1 = 60^\circ$, το τρίγωνο $\Delta\Theta Z$ είναι ισόπλευρο. Άρα $\Theta_1 = 60^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΘΓ, έχουμε:

$$\Gamma_1 + \ominus A \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma_1 + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma_1 = 30^\circ$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΓ η ΘΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$\Theta\text{H} = \frac{\text{A}\Gamma}{2} = \text{H}\Gamma$, άρα το τρίγωνο $\Theta\text{H}\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $\Theta\Gamma$ και $\Theta_2 = \Gamma_1 = 30^\circ$.

Είναι $\Theta_1 + Z\Theta H + \Theta_2 = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + Z\Theta H + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Z\Theta H = 90^\circ$

γ) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΘΔ έχουμε:

$$\Delta_1 + A_1 = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + A_1 = 90^\circ \Leftrightarrow A_1 = 30^\circ, \text{ τότε για την απέναντι πλευρά στο τρίγωνο}$$

$$AZK \text{ ισχύει ότι: } ZK = \frac{AZ}{2} = \frac{\frac{A\Delta}{2}}{2} = \frac{A\Delta}{4}.$$

1868. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα μέσα $Δ, Ε$ και $Μ$ των $ΑΒ$, $ΑΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα. Στη προέκταση του $ΜΔ$ (προς το $Δ$) θεωρούμε τμήμα $ΔΖ = ΔΜ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $BM\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

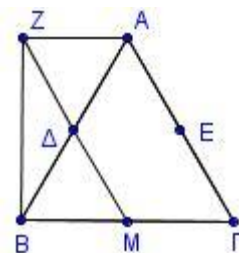
(Μονάδες 6)

γ) Τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.

(Μονάδες 7)

δ) Η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ.

(Μονάδες 6)



Λύση

α) Έστω α η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου. Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $BM\Delta$ έχουν:

- 1) $\Delta Z = \Delta M$
- 2) $\Delta\Delta = \Delta B$ γιατί το Δ είναι μέσο του AB και
- 3) $\Delta\Delta Z = \Delta\Delta M$ ως κατακορυφήν.

Λόγω του κριτηρίου ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Τα Δ, M είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα η ΔM είναι παράλληλη στην $A\Gamma$ και

$$\Delta M = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}. \text{ Όμως } ZM = 2\Delta M, \text{ οπότε τα τμήματα } ZM \text{ και } A\Gamma \text{ είναι ίσα}$$

και παράλληλα και το τετράπλευρο $ZA\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα

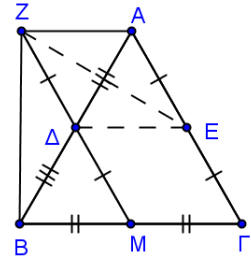
$$\Delta E \parallel B\Gamma \text{ και } \Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Επειδή το $ZA\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι $ZA = M\Gamma = \frac{\alpha}{2}$.

Επειδή $Z\Delta = \Delta E = \Delta E = AZ = \frac{\alpha}{2}$, το τετράπλευρο $A\Delta E Z$ είναι ρόμβος. Τα $ZE, A\Delta$ είναι διαγώνιες του ρόμβου, οπότε διχοτομούνται κάθετα.

δ) Είναι $B\Delta = \Delta M = \Delta Z = \frac{\alpha}{2}$, δηλαδή στο τρίγωνο BMZ η διάμεσος του $B\Delta$ ισούται με το μισό της

πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Άρα το τρίγωνο BMZ είναι ορθογώνιο με $ZBM = 90^\circ$, δηλαδή $ZB \perp BM$.



1870. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα $A\Delta$ κάθετο στην AB και τμήμα $A\epsilon$ κάθετο στην $A\Gamma$ με $A\Delta = A\epsilon$.

Θεωρούμε τα μέσα Z, H και M των $\Delta B, \epsilon \Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

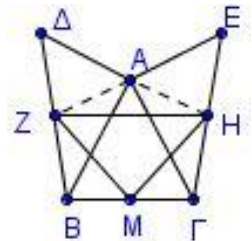
- i. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\epsilon \Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- ii. Το τρίγωνο ZAH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- iii. Η AM είναι μεσοκάθετος του ZH . (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\epsilon \Gamma$ έγραψε τα εξής:

- « 1. $A\Delta = A\epsilon$ από την υπόθεση
2. $AB = A\Gamma$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου
3. $\Delta AB = \epsilon A\Gamma$ ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία ίσα».

Ο καθηγητής είπε ότι η λύση περιέχει λάθος, μπορείς να το εντοπίσεις; (Μονάδες 5)



Λύση

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\epsilon \Gamma$ έχουν:

- 1) $A\Delta = A\epsilon$ και 2) $AB = A\Gamma$, δηλαδή έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, άρα είναι ίσα.

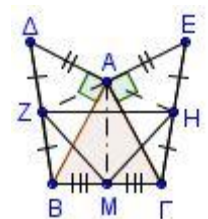
ii. Η AZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου

$$\Delta AB, \text{ άρα } AZ = \frac{B\Delta}{2}.$$

Η AH είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου

$$\epsilon A\Gamma, \text{ άρα } AH = \frac{\epsilon \Gamma}{2}.$$

Επειδή τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\epsilon \Gamma$ είναι ίσα έχουν και $\Delta B = \epsilon \Gamma$, άρα είναι και $AZ = AH$, οπότε το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.



iii. Τα τρίγωνα MBZ και ΓΗΜ έχουν:

1) $MB = M\Gamma$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ

2) $BZ = \frac{B\Delta}{2} = \frac{E\Gamma}{2} = \Gamma H$ και

3) $ZBM = M\Gamma H \Leftrightarrow ZBA + B = A\Gamma H + \hat{\Gamma}$ ($ZBA = A\hat{\Gamma}H$ γιατί τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα

και $B = \hat{\Gamma}$ από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ).

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ, τα τρίγωνα ΜΖΒ και ΓΗΜ είναι ίσα, οπότε έχουν και $MZ = MH$. Επειδή $AZ = AH$ και $MZ = MH$, τα σημεία Μ, Α ισαπέχουν από τα Ζ και Η, άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΖΗ, δηλαδή η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΖΗ.

β) Οι γωνίες ΔΑΒ και ΕΑΓ δεν είναι κατακορυφήν γιατί οι πλευρές τους δεν είναι αντικείμενες ημιευθείες.

1871. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 120^\circ$.

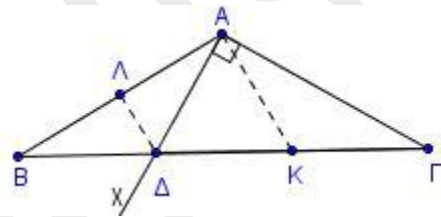
Φέρουμε ημιευθεία Αχ κάθετη στην ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) $\Delta\Gamma = 2\Delta\Delta$ (Μονάδες 8)

γ) $\Delta\Delta \parallel AK$ (Μονάδες 5)

δ) $AK = 2\Delta\Delta$ (Μονάδες 4)



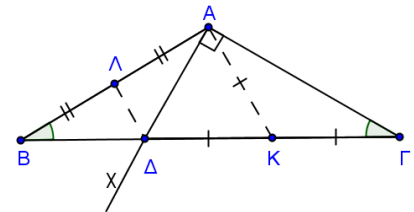
Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ισχύει ότι: $B = \Gamma$.

Είναι $A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 30^\circ = \Gamma$. Είναι

$A = 120^\circ \Leftrightarrow B\Delta\Delta + 90^\circ = 120^\circ \Leftrightarrow B\Delta\Delta = 30^\circ$.

Επειδή $B\Delta\Delta = B$, το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\Gamma = 30^\circ$, άρα $\Delta\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2\Delta\Delta$.

Όμως $\Delta\Delta = \Delta B$ αφού το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές, άρα $\Delta\Gamma = 2\Delta B$

γ) Η ΔΔ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, οπότε είναι και ύψος, δηλαδή $\Delta\Delta \perp AB$ (1).

Η ΑΚ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα

$AK = \Delta K = K\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{2}$. Είναι $\Delta\Delta\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta\Delta\Gamma = 60^\circ$ και επειδή $AK = \Delta K$, το τρίγωνο ΑΔΚ είναι

ισόπλευρο, άρα $\Delta\Delta K = 60^\circ$. Είναι $B\Delta K = B\Delta\Delta + \Delta\Delta K = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, άρα $AK \perp AB$ (2).

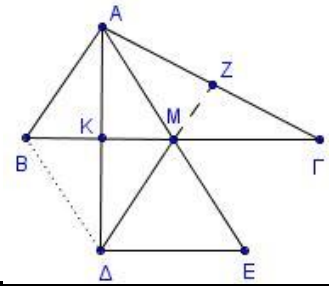
Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $\Delta\Delta \parallel AK$

δ) Στο τρίγωνο ΒΑΚ το Λ είναι μέσο της ΑΒ και η ΔΔ είναι παράλληλη στην ΑΚ, άρα το Δ

είναι μέσο της ΒΚ και ισχύει ότι $\Delta\Delta = \frac{AK}{2} \Leftrightarrow AK = 2\Delta\Delta$.

1872. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $B = 60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την $A\Gamma$ στο Z . Τα σημεία M και K είναι τα μέσα των BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν το τμήμα $\Gamma\Lambda$ είναι κάθετο στη διχοτόμο $B\delta$, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
 β) Το τετράπλευρο $AMKZ$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)
 γ) $\Gamma Z = 2ZA$ (Μονάδες 7)
 δ) $B\Lambda = A\Gamma$ (Μονάδες 6)



Λύση

α) Επειδή η $B\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , ισχύει ότι: $\Gamma BZ = ABZ = 30^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ.$$

Επειδή $\Gamma BZ = \Gamma$, το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελές με $BZ = Z\Gamma$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABZ το AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$AM = \frac{BZ}{2} = BM = MZ. \text{ Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου } BAZ, \text{ έχουμε:}$$

$$ABZ + BZA = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + BZA = 90^\circ \Leftrightarrow BZA = 60^\circ \text{ και αφού}$$

$$AM = MZ, \text{ το τρίγωνο } AMZ \text{ είναι ισόπλευρο και } AM = MZ = AZ (1).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Gamma = 30^\circ$, άρα $AB = \frac{B\Gamma}{2} = BK$.

Τα τρίγωνα ZKB και ZAB έχουν:

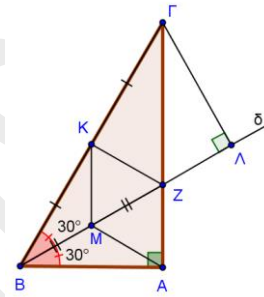
- 1) $AB = BK$
- 2) τη πλευρά BZ κοινή και
- 3) $\Gamma BZ = ABZ = 30^\circ$

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν $BKZ = A = 90^\circ$ και $KZ = AZ$ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BKZ το KM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα

$$KM = \frac{BZ}{2} = BM = MZ (3).$$

Από τις (1),(2),(3) το τετράπλευρο $AMKZ$ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.



γ) Είναι $AZ = MZ = \frac{BZ}{2}$ και $BZ = Z\Gamma$, άρα $AZ = \frac{\Gamma Z}{2} \Leftrightarrow \Gamma Z = 2AZ$.

δ) Τα ορθογώνια τρίγωνα BZA και $\Gamma Z\Lambda$ έχουν:

- 1) $BZ = Z\Gamma$ και 2) $\Gamma Z\Lambda = BZA$ ως κατακορυφήν,

δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $Z\Lambda = ZA$.

Είναι $BZ = Z\Gamma$ και $Z\Lambda = ZA$, άρα και $BZ + Z\Lambda = \Gamma Z + ZA \Leftrightarrow B\Lambda = A\Gamma$

1873. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM τέτοια, ώστε $AM = AB$. Φέρουμε το ύψος του AK και το προεκτείνουμε (προς το K) κατά τμήμα $K\Delta = AK$.

Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι:

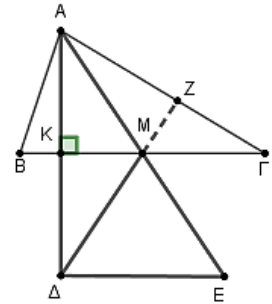
- $\Delta E \perp AD$ και $\Delta E = 2KM$.
- Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τετράπλευρο $ABDM$ είναι ρόμβος.
- Η προέκταση της DM τέμνει την $A\Gamma$ στο μέσον του Z .

(Μονάδες 7)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)



Λύση

α) Στο τρίγωνο $A\Delta E$ τα K, M είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $KM \parallel \Delta E$ και $KM = \frac{\Delta E}{2} \Leftrightarrow \Delta E = 2KM$.

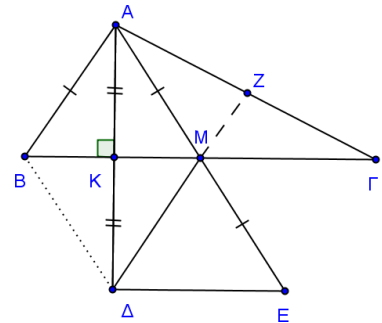
Επειδή $KM \perp AD$ και $KM \parallel \Delta E$, είναι και $\Delta E \perp AD$.

β) Στο τετράπλευρο $ABE\Gamma$ οι $AE, B\Gamma$ είναι διαγωνίες του που διχοτομούνται στο M , άρα είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το τρίγωνο ABM είναι ισοσκελές και η AK είναι ύψος του, άρα είναι και διάμεσος του τριγώνου. Στο τετράπλευρο $ABDM$ οι AD, BM είναι διαγωνίες του που διχοτομούνται κάθετα, άρα το τετράπλευρο είναι ρόμβος.

δ) Επειδή $ABDM$ ρόμβος, είναι $DM \parallel AB$ άρα και $MZ \parallel AB$.

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το M είναι μέσο της $B\Gamma$ και η MZ είναι παράλληλη στην AB , άρα το Z είναι μέσο της $A\Gamma$.



1874. Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο $KL = 2\rho$. Έστω A σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα OA να είναι κάθετη στην KL . Φέρουμε τις χορδές $AB = A\Gamma = \rho$. Έστω Δ και E τα σημεία τομής των προεκτάσεων των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου KL . Να αποδείξετε ότι:

- $\angle B\Delta\Gamma = 120^\circ$ (Μονάδες 7)
- Τα σημεία B και Γ είναι μέσα των $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. (Μονάδες 9)
- $K\Gamma = \Delta B$ (Μονάδες 9)

Λύση

α) Είναι $OA = OB = OG = AB = A\Gamma = \rho$, οπότε τα τρίγωνα

OAB και OAG είναι ισόπλευρα, άρα $\angle BAO = \angle GAO = 60^\circ$.

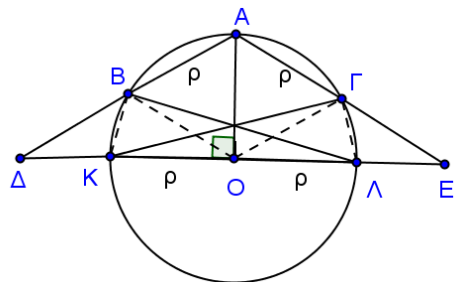
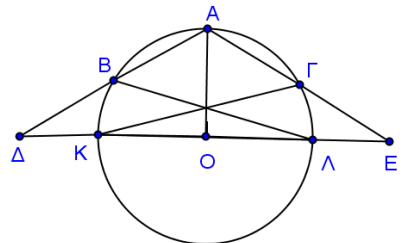
Άρα $\angle B\Delta\Gamma = \angle BAO + \angle GAO = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

β) Στο τρίγωνο ΔOA είναι $\Delta + \angle BAO = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta = 30^\circ$. Τότε

$$OA = \frac{\Delta\Delta}{2} \Leftrightarrow A\Delta = 2\rho \text{ και επειδή } AB = \rho \text{ είναι και } B\Delta = \rho$$

, άρα το B είναι μέσο της $A\Delta$. Όμοια $E = 30^\circ$, άρα

$$OA = \frac{AE}{2} \Leftrightarrow AE = 2\rho, \text{ και αφού } A\Gamma = \rho, \text{ το } \Gamma \text{ είναι μέσο του } AE.$$



- γ) Είναι $\angle AOB = \angle AOG = 60^\circ$ άρα $\angle (AB) = \angle (AG) = 60^\circ$. Επειδή $\angle (AK) = \angle (AL) = 90^\circ$, θα είναι $\angle (BK) = \angle (GL) = 30^\circ$. Είναι $\angle KAG = \angle KB + \angle BAG = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ$ και όμοια $\angle LAB = 150^\circ$, δηλαδή $\angle LAB = \angle KAG$ και επειδή σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές, είναι και $KG = AB$.

1876. Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και $AB\Delta$ ($BA=BD$), τέτοια ώστε οι πλευρές τους AG και BD να τέμνονται κάθετα στο σημείο E , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων AD και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $EL=EG$.

(Μονάδες 7)

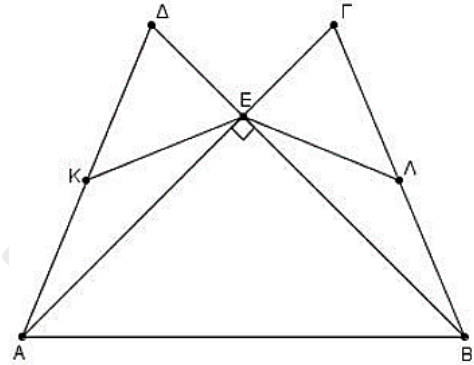
β) $AG \parallel AB$.

(Μονάδες 8)

γ) Το τρίγωνο EKL είναι ισοσκελές και $KL \parallel AB$.

(Μονάδες 10)

Λύση



α) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ίσα, έχουν και $\angle EAB = \angle EBA$ (απέναντι από ίσες πλευρές). Άρα το τρίγωνο EAB είναι ισοσκελές οπότε $EA = EB$. όμως $BD=AG$, οπότε και $BD - BE = AG - AE \Leftrightarrow ED = EG$.

β) Το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού $\Gamma E = \Delta E$, οπότε: $\hat{\Gamma} \Delta E = 45^\circ$

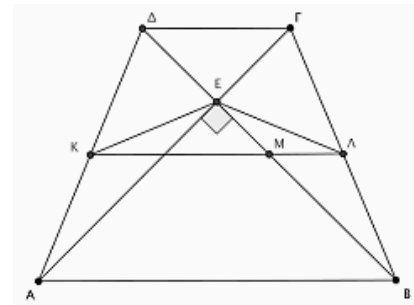
Το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού $EA = EB$, οπότε: $\hat{A} \hat{B} \Delta = 45^\circ$

Άρα οι ευθείες AB και $\Gamma \Delta$ οι οποίες τέμνονται από την $B\Delta$ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους $\Gamma \Delta E$ και $A \hat{B} \Delta$ ίσες, οπότε $\Delta \Gamma \parallel AB$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔEA η EK είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα AD , οπότε: $EK = AD/2$.

Όμοια, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓEB η EL είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε: $EL = B\Gamma/2$.

Όμως $AD = B\Gamma$, άρα $EK = EL$, οπότε το τρίγωνο EKL είναι ισοσκελές. Στο τρίγωνο ADB φέρουμε από το μέσο K του AD ευθεία παράλληλη στην AB η οποία τέμνει την DB στο μέσο της M . Το τμήμα ML ενώνει τα μέσα των πλευρών DB και $B\Gamma$ του τριγώνου $\Delta \Gamma B$ οπότε $ML \parallel \Delta \Gamma$, άρα και $ML \parallel AB$ και επειδή από το M διέρχεται μοναδική παράλληλη στην AB προκύπτει ότι τα σημεία K, M, L είναι συνευθειακά. Επομένως $KL \parallel AB$.



1880. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\angle A = 90^\circ$ και Δ, E και N τα μέσα των AB, AG και ΔE αντίστοιχα. Στο τμήμα $B\Gamma$ θεωρούμε σημεία K και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda \Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta K \Lambda = 2B$ και $E \Lambda K = 2\Gamma$.

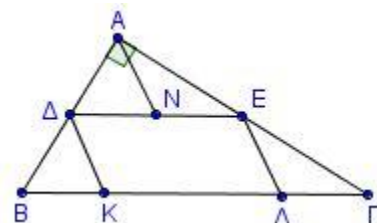
(Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο $\Delta E \Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο με $\Delta E = 2\Delta K$.

(Μονάδες 8)

γ) $AN = \Delta K = \frac{B\Gamma}{4}$

(Μονάδες 7)



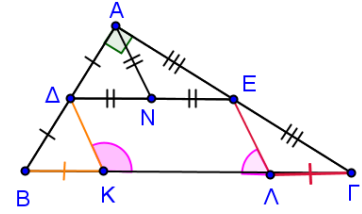
Λύση

α) Επειδή $\Delta K = KB$ το τρίγωνο ΔKB είναι ισοσκελές
 οπότε $B\Delta K = B$.

Η γωνία $\Delta K\Lambda$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔBK , άρα
 $\Delta K\Lambda = B\Delta K + B = 2B$.

Επειδή $E\Lambda = \Lambda\Gamma$ το τρίγωνο $E\Lambda\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $\Lambda E\Gamma = \Gamma$.

Η γωνία $E\Lambda K$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $E\Lambda\Gamma$, άρα
 $E\Lambda K = \Lambda E\Gamma + \Gamma = 2\Gamma$



β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει ότι $B + \Gamma = 90^\circ$.

Είναι $\Delta K\Lambda + E\Lambda K = 2B + 2\Gamma = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ και επειδή οι γωνίες αυτές είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των $\Delta K, E\Lambda$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, οι ευθείες $\Delta K, E\Lambda$ είναι παράλληλες.

Επειδή τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, ισχύει ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.

Στο τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

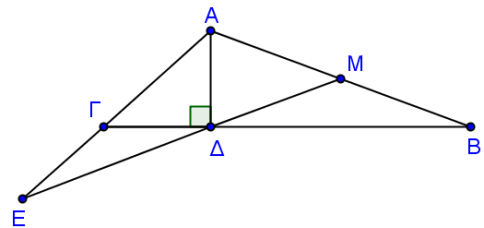
Είναι $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{BK + K\Lambda + \Lambda\Gamma}{2} \stackrel{K\Lambda = \Delta E}{\Leftrightarrow} 2\Delta E = \Delta K + \Delta E + E\Lambda \stackrel{\Delta K = E\Lambda}{\Leftrightarrow} 2\Delta E - \Delta E = 2\Delta K \Leftrightarrow \Delta E = 2\Delta K$.

γ) Το AN είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $A\Delta E$,

άρα $AN = \frac{\Delta E}{2} = \frac{2\Delta K}{2} = \Delta K$ και $AN = \frac{\Delta E}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.

1881. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB > A\Gamma$), $A\Delta$ το ύψος του και M το μέσο του AB . Η προέκταση της $M\Delta$ τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$.
 Να αποδείξετε ότι:

- α) $B = E$ (Μονάδες 8)
 β) $\Gamma = 2B = AM\Delta$ (Μονάδες 10)
 γ) $\Gamma E < A\Gamma$ (Μονάδες 7)



Λύση

α) Επειδή $\Gamma\Delta = \Gamma E$, το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές, οπότε
 και $E = \Gamma\Delta E$ (1).

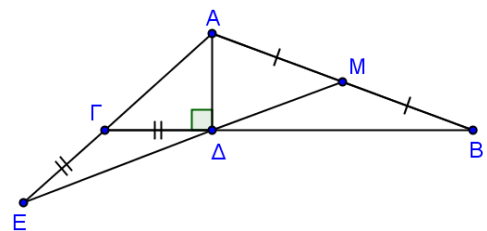
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ η ΔM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του άρα $\Delta M = \frac{AB}{2} = MB$,
 οπότε το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές και ισχύει
 $M\Delta B = B$ (2).

Επειδή $M\Delta B = \Gamma\Delta E$ ως κατακορυφήν, από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $B = E$.

β) Η γωνία Γ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\Gamma\Delta E$, οπότε $\Gamma = E + \Gamma\Delta E = 2E = 2B$.

Η γωνία $AM\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $M\Delta B$, άρα $AM\Delta = M\Delta B + B = 2B$.

γ) Η $A\Gamma$ είναι υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του. Δηλαδή $A\Gamma > \Gamma\Delta$, όμως $\Gamma\Delta = \Gamma E$ άρα $A\Gamma > \Gamma E$.



1895. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ (ΑΓ=ΓΒ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) Η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ.

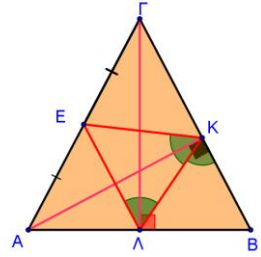
(Μονάδες 15)

Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ η ΚΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

υποτείνουσα άρα $ΚΕ = \frac{ΑΓ}{2}$. Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο

ΓΛΑ: $ΛΕ = \frac{ΓΑ}{2}$. Επομένως $ΚΕ = ΛΕ$ και το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές.



β) Στο τρίγωνο ΓΑΒ τα Ε, Λ είναι μέσα οπότε $ΛΕ // ΓΒ$ και $ΕΛΚ = ΛΚΒ$ (1) (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΛ και ΒΓ που τέμνονται από την ΚΛ).

Από το α) ερώτημα $ΕΛΚ = ΕΚΛ$ (2) (τρίγωνο ΕΚΛ ισοσκελές).

Από (1), (2) $ΕΚΛ = ΛΚΒ$. Επομένως η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ.

13540. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε η διαγώνιος του ΑΓ να είναι κάθετη στη ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΓΕ = ΖΗ$.

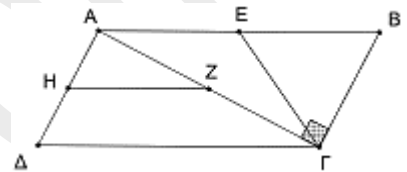
(Μονάδες 9)

ii. Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΕ.

(Μονάδες 9)

β) Αν $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΒ η ΓΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, οπότε

$$ΓΕ = \frac{ΑΒ}{2} \quad (1).$$

Στο τρίγωνο ΑΔΓ τα Η, Ζ είναι μέσα δύο πλευρών του οπότε

$$ΗΖ = \frac{ΓΔ}{2} \quad (2).$$

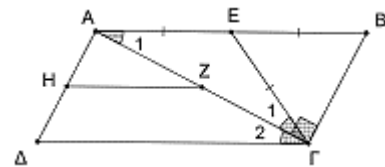
Επειδή οι ΑΒ, ΓΔ είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, είναι ίσες, οπότε από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $ΓΕ = ΖΗ$.

ii. Είναι $ΓΕ = ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές

με βάση την ΑΓ και $Α_1 = Γ_1$ (3) γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου.

Είναι $Α_1 = Γ_2$ (4) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ.

Από τις σχέσεις (3), (4) προκύπτει ότι $Γ_1 = Γ_2$, οπότε η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΕ.



β) Επειδή το Η είναι μέσο της ΑΔ, είναι $ΑΔ = 2ΔΗ = \frac{ΑΒ}{2}$.

Είναι $ΓΕ = ΕΒ = \frac{ΑΒ}{2}$, οπότε $ΓΕ = ΕΒ = ΒΓ$, αφού $ΒΓ = ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2}$, άρα το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισόπλευρο.

13522. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την μεσοκάθετο (ϵ) της $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔZ και ΔH προς τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$.

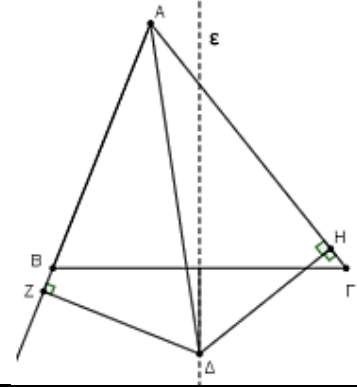
(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι $BZ = H\Gamma$.

(Μονάδες 09)

γ) Αν η γωνία $A = 60^\circ$ και M το μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $HM = Z\Delta$.

(Μονάδες 08)



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$ έχουν:

- την πλευρά $A\Delta$ κοινή

- $\angle B\Delta\Delta = \angle A\Delta\Gamma$ γιατί η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A .

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$ είναι ίσα, επειδή έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

β) Φέρνουμε τις ΔB , $\Delta \Gamma$. Επειδή το Δ ανήκει στην μεσοκάθετο της $B\Gamma$ θα ισαπέχει από τα B και Γ , άρα $B\Delta = \Gamma\Delta$ (1).

Τα ορθογώνια τρίγωνα $BZ\Delta$ και $\Gamma H\Delta$ έχουν:

- $B\Delta = \Gamma\Delta$, από (1).

- $\Delta Z = \Delta H$ (2), επειδή είναι πλευρές των ίσων τριγώνων $AZ\Delta$ και $AH\Delta$,

που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες A_1, A_2 αντίστοιχα.

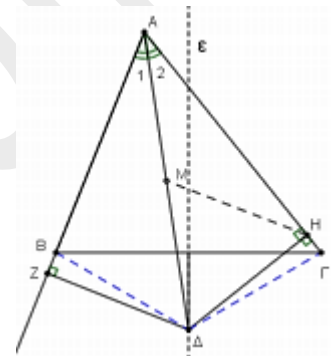
Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με μία κάθετη πλευρά και υποτείνουσα αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Άρα, $ZB = H\Gamma$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AH\Delta$ η HM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

υποτείνουσα του, οπότε $HM = \frac{A\Delta}{2}$ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AZ\Delta$ είναι $A_1 = \frac{A}{2} = 30^\circ$, οπότε $\Delta Z = \frac{A\Delta}{2}$ (3).

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει ότι $HM = \Delta Z$.



13520. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο P εκτός του κύκλου. Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Η PO τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο AB στο Γ και $\angle APB = 60^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $OP = 2\rho$.

(Μονάδες 10)

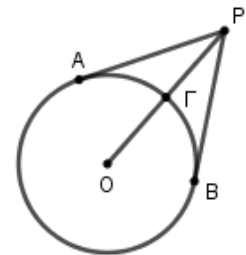
β) $\angle A\Gamma B = 120^\circ$

(Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο $OAGB$ είναι ρόμβος.

Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)



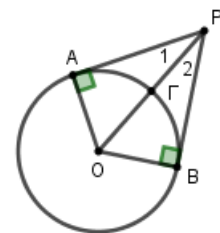
Λύση

α) Φέρνουμε τις ακτίνες OA και OB που είναι κάθετες στα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Επομένως τα τρίγωνα OAP και OBP είναι ορθογώνια.

Η διακεντρική ευθεία PO είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle APB$, οπότε

$\angle P_1 = \angle P_2 = 30^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο PAO είναι $\angle P_1 = 30^\circ$, οπότε

$$OA = \frac{OP}{2} \Leftrightarrow 2OA = OP \Leftrightarrow OP = 2\rho$$



β) Επειδή η ΟΓ είναι ακτίνα του κύκλου είναι $ΟΓ = ρ$. Όμως $ΡΟ = 2ρ$, άρα το Γ είναι μέσο της ΟΡ. Η ΑΓ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΑΟ,

$$\text{οπότε } ΑΓ = \frac{ΡΟ}{2} = \frac{2ρ}{2} = ρ.$$

Όμοια στο τρίγωνο ΡΒΟ η ΒΓ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα,

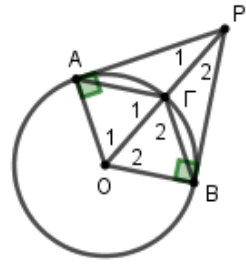
$$\text{οπότε } ΒΓ = \frac{ΡΟ}{2} = \frac{2ρ}{2} = ρ.$$

Επειδή $ΟΑ = ΑΓ = ΟΓ = ρ$, το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $Γ_1 = 60^\circ$.

Επειδή $ΟΒ = ΒΓ = ΟΓ = ρ$, το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $Γ_2 = 60^\circ$.

Είναι $ΑΓΒ = Γ_1 + Γ_2 = 120^\circ$.

γ) Επειδή $ΟΑ = ΑΓ = ΓΒ = ΟΒ = ρ$ το τετράπλευρο ΟΑΓΒ έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.



13672. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $Α = 90^\circ$ και $ΑΒ > ΑΓ$. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε κάθετη στη ΒΓ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο ΑΗ της γωνίας Α στο σημείο Ε. Έστω ΑΖ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΓΑΖ = ΔΑΒ$.

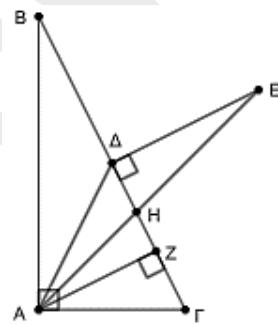
(Μονάδες 8)

β) $ΑΔ = ΔΕ$.

(Μονάδες 9)

γ) $ΖΑΔ = Γ - Β$

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΔ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ, οπότε $ΑΔ = ΔΒ = ΔΓ$.

Οι οξείες γωνίες Β και Γ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι συμπληρωματικές, οπότε: $Β = 90^\circ - Γ$ (1)

Οι οξείες γωνίες ΓΑΖ και Γ του ορθογωνίου τριγώνου ΖΑΓ είναι συμπληρωματικές, οπότε:

$$ΓΑΖ = 90^\circ - Γ \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $ΓΑΖ = Β$.

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $ΑΔ = ΔΒ$, οπότε θα είναι $ΔΑΒ = Β$. Επομένως, οι γωνίες ΓΑΖ και ΔΑΒ θα είναι ίσες, δηλαδή $ΓΑΖ = ΔΑΒ$ (3).

β) Η ΑΗ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, οπότε $ΓΑΗ = ΗΑΒ$ (4).

Με αφαίρεση των σχέσεων (3) και (4) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$ΓΑΗ - ΓΑΖ = ΗΑΒ - ΔΑΒ \Leftrightarrow ΖΑΗ = ΗΑΔ \quad (5).$$

Επίσης, $ΑΖ \parallel ΔΕ$ διότι είναι κάθετες στη ΒΓ. Άρα, $ΖΑΗ = Ε$ (6), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΖ και ΔΕ τεμνόμενων από την ΑΕ.

Από τις ισότητες (5) και (6) προκύπτει ότι $ΗΑΔ = Ε$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΕ άρα $ΔΕ = ΑΔ$.

γ) Είναι $ΓΑΖ + ΖΑΔ + ΔΑΒ = Α$, οπότε $ΖΑΔ = Α - ΓΑΖ - ΔΑΒ = 90^\circ - Β - Β = Γ - Β$, αφού είναι $ΓΑΖ = ΔΑΒ = Β$ και $Γ = 90^\circ - Β$.

13851. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΕ=ΔΓ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.

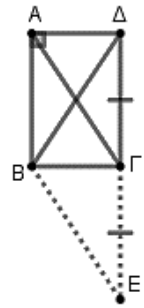
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

γ) Αν $\angle BDE = 120^\circ$ να αποδείξετε ότι $BD = 2AD$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ οι απέναντι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες δηλαδή $AB = GD$, επιπλέον από υπόθεση έχουμε ότι $GD = GE$, άρα $AB = GE$.

Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε $AB \parallel GD$ άρα και $AB \parallel GE$.

Το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΑΒ και ΓΕ παράλληλες και ίσες.

β) Στο παραλληλόγραμμο ΑΓΕΒ έχουμε $AG = BE$ ως απέναντι πλευρές επίσης στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε $AG = BD$ ως διαγώνιοι του ορθογωνίου, άρα $BE = BD$ δηλαδή το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

ή

Στο τρίγωνο ΔΒΕ η ΒΓ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΕ.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΒΕ η ΒΓ είναι ύψος, διάμεσος άρα διχοτόμος του τριγώνου οπότε

$$\angle B\hat{D}G = \frac{\angle BDE}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Επίσης $\angle A\hat{D}B = \angle B\hat{D}G = 60^\circ$ ως εντός εναλλάξ των ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ.

Από το άθροισμα των γωνιών τριγώνου στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\angle B\hat{A}D = 30^\circ$ οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας άρα $AD = \frac{BD}{2}$ ή $BD = 2AD$.

13852. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB > AD$ και με κέντρο Ο. Αν ΒΖ και ΔΕ είναι οι αποστάσεις των κορυφών Β και Δ από τη διαγώνιο ΑΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ είναι ίσα.

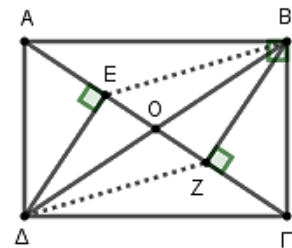
(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\angle DAE = 60^\circ$ και $OE = 5$, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΔ.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ έχουν:

- $\angle EOD = \angle ZOB$ ως κατακορυφήν
- $DO = OB$, Ο μέσο της διαγωνίου ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Στα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ οι γωνίες $\angle ODE$ και $\angle OBZ$ είναι ίσες ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\angle EOD$ και $\angle ZOB$.

Από τη σύγκριση του α) ερωτήματος έχουμε $EO = ZO$ ως πλευρές των ίσων τριγώνων απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle ODE$ και $\angle OBZ$. Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι διαγώνιοι του ΕΖ και ΒΔ διχοτομούνται στο Ο αφού $EO = OZ$ και $DO = OB$ (Ο μέσο της ΒΔ).

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\Gamma$ έχουμε $\Delta\Gamma\Gamma = 60^\circ$ συνεπώς $\Delta\Gamma\Gamma = 30^\circ$. Οι διαγώνιοι $\Delta\Gamma$ και $\Delta\Delta$ του ορθογωνίου $\Delta\Gamma\Delta$ είναι ίσες και $\Gamma\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{\Delta\Delta}{2} = \Delta\Delta$ δηλαδή το τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση

$\Delta\Delta$ και $\Delta\Gamma\Gamma = 30^\circ$, άρα $\Delta\Gamma\Delta = 120^\circ$ και $\Delta\Gamma\Delta = 60^\circ$ ως παραπληρωματική της $\Delta\Gamma\Delta$.

Συνεπώς το τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο και η $\Delta\Gamma$ είναι ύψος άρα και διάμεσος. Το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος $\Delta\Delta$ με $\Delta\Gamma = \Gamma\Delta = 5$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$ έχουμε $\Delta\Gamma\Delta = 60^\circ$ συνεπώς $\Delta\Gamma\Delta = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά $\Delta\Gamma$ ισούται με το μισό της υποτείνουσας $\Delta\Delta$, δηλαδή $\Delta\Gamma = \frac{\Delta\Delta}{2} \Leftrightarrow 5 = \frac{\Delta\Delta}{2} \Leftrightarrow \Delta\Delta = 10$.

13853. Στο παραπάνω σχήμα το τρίγωνο $\Delta\Gamma\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\Delta = 90^\circ$. Επίσης οι $\Delta\Delta$ και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες και το τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο.

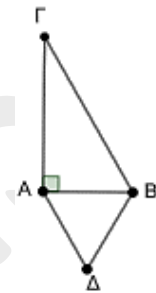
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Γ και Δ του τριγώνου $\Delta\Gamma\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) Αν η περίμετρος του $\Delta\Gamma\Delta$ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του $\Delta\Gamma\Gamma$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν το σημείο Δ είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το $\Delta\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου Δ . Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $\Delta\Gamma\Delta$; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Οι γωνίες $\Delta\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma\Gamma$ είναι εντός και εναλλάξ των παραλλήλων $\Delta\Delta$ και $\Delta\Gamma$ με τέμνουσα την $\Delta\Gamma$. Επομένως $\Delta\Gamma\Delta = \Delta\Gamma\Gamma$. Όμως το τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο, επομένως η καθεμία από τις γωνίες του είναι 60° . Δηλαδή $\Delta\Gamma\Delta = \Delta\Gamma\Gamma = 60^\circ$. Όμως οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές, άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\Gamma$ είναι $\Delta\Gamma\Gamma = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

β) Το τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο, άρα έχει ίσες πλευρές. Επομένως το μήκος κάθε πλευράς του είναι $\Delta\Gamma = \Delta\Delta = \Delta\Gamma = 12 : 3 = 4$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\Gamma$ η γωνία $\Gamma = \Delta\Gamma\Gamma = 30^\circ$, επομένως η απέναντι πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $\Delta\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 8$.

γ) Αν το $\Delta\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος είναι παραλληλόγραμμο τότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες (ιδιότητα παραλληλογράμμου). Επίσης $\Delta\Delta = \Delta\Gamma$ οπότε είναι ρόμβος αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. Άρα $\Delta\Gamma = \Delta\Delta$.

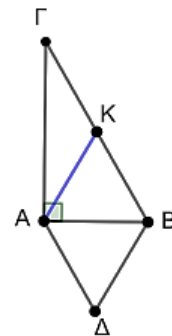
Είναι $\Delta\Gamma\Gamma = 60^\circ$ οπότε το τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο άρα $\Delta\Gamma = \Delta\Delta = \Delta\Gamma$.

Η γωνία $\Delta\Gamma\Delta$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\Delta\Gamma\Delta$ οπότε είναι

$\Delta\Gamma\Delta = 180^\circ - \Delta\Gamma\Delta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου στο τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$ έχουμε

$\Delta\Gamma\Delta + \Delta\Gamma\Delta + \Delta\Gamma\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\Gamma\Delta + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\Gamma\Delta = 30^\circ$ οπότε το τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές και $\Delta\Gamma = \Delta\Delta$. Επομένως $\Delta\Gamma = \Delta\Delta$ άρα το Δ είναι μέσο του $\Delta\Gamma$.



13855. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά AG που τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι

$\angle E\Delta\Gamma = 120^\circ$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\Delta\Gamma A$.

(Μονάδες 5)

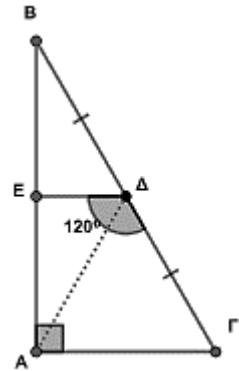
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 8)

γ) Προεκτείνουμε την πλευρά AG προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma Z = AG$ και την

πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H = \frac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\angle AHZ = 90^\circ$.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και $E\Delta \parallel AG$ άρα το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς AB . Οι γωνίες $\angle E\Delta\Gamma$ και $\angle \Delta\Gamma A$ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων $E\Delta$ και AG που τέμνονται από την $\Gamma\Delta$, συνεπώς είναι παραπληρωματικές άρα

$$\angle E\Delta\Gamma + \angle \Delta\Gamma A = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \angle \Delta\Gamma A = 180^\circ \Leftrightarrow \angle \Delta\Gamma A = 60^\circ.$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η $A\Delta$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Delta = \Delta\Gamma. \text{ Στο ίδιο τρίγωνο οι γωνίες } B \text{ και } \Gamma \text{ είναι συμπληρωματικές, από το α) ερώτημα}$$

έχουμε $\Gamma = 60^\circ$ άρα $B = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $B = 30^\circ$ άρα η απέναντι κάθετη πλευρά AG ισούται με το μισό της υποτείνουσας $B\Gamma$, δηλαδή

$$AG = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow AG = \Delta\Gamma. \text{ Συνεπώς το τρίγωνο } A\Delta\Gamma \text{ είναι ισόπλευρο αφού έχει}$$

και τις τρεις πλευρές του ίσες $A\Delta = AG = \Delta\Gamma$.

ή

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η $A\Delta$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

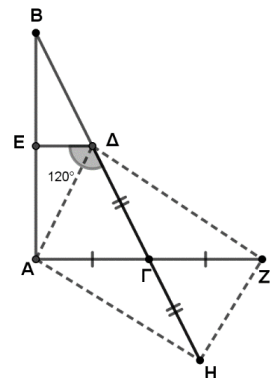
υποτείνουσα, άρα $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Delta = \Delta\Gamma$ οπότε το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι

ισοσκελές με γωνία $\angle \Delta\Gamma A = 60^\circ$ οπότε είναι ισόπλευρο.

γ) Από την κατασκευή των $\Gamma Z, \Gamma H$ το Γ είναι μέσο των $\Delta H, AZ$, οι οποίες είναι διαγώνιες του τετραπλεύρου $A\Delta ZH$.

Επομένως το $A\Delta ZH$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επίσης $AZ = 2AG = 2\Delta\Gamma = \Delta H$ οπότε το παραλληλόγραμμο $A\Delta ZH$ είναι ορθογώνιο αφού έχει ίσες διαγώνιες. Άρα $\angle AHZ = 90^\circ$.



14879. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Από την κορυφή A φέρουμε $AE \perp BD$. Έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών AB και $A\Delta$ αντιστοίχως, τότε:

α) i. Να αποδείξετε ότι: $\angle K\epsilon\Lambda = 90^\circ$

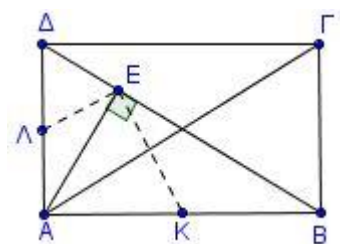
(Μονάδες 8)

ii. $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$

(Μονάδες 8)

β) Αν $\angle B\Lambda\Gamma = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $K\Lambda = B\Gamma$.

(Μονάδες 9)



Λύση

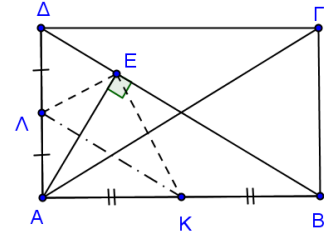
α) i. Το ΕΛ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου ΑΕΔ, οπότε $ΕΛ = ΛΑ = \frac{ΑΔ}{2}$.

Τότε το τρίγωνο ΛΕΑ είναι ισοσκελές οπότε $ΛΕΑ = ΛΑΕ$ (1).

Το ΕΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου ΑΕΒ, οπότε $ΕΚ = ΚΑ = \frac{ΑΒ}{2}$. Τότε το τρίγωνο ΚΕΑ

είναι ισοσκελές οπότε $ΚΕΑ = ΚΑΕ$ (2).

Είναι $ΚΕΛ = ΛΕΑ + ΚΕΑ = ΛΑΕ + ΚΑΕ = ΛΑΚ = 90^\circ$



ii. Επειδή τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ, ισχύει ότι $ΚΛ = \frac{ΒΔ}{2}$. Όμως $ΒΔ = ΑΓ$

γιατί οι διαγώνιες του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες, άρα $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$.

β) Αν $ΒΑΓ = 30^\circ$, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι: $ΒΓ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΒΔ}{2} = ΚΛ$

14886. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α = 90^\circ$), τα μέσα

Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Αν Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ, ΔΕ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

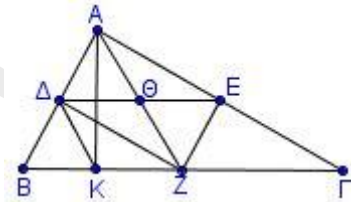
i. Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

ii. $ΑΘ = ΘΕ = \frac{ΒΓ}{4}$ (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον είναι $Γ = 30^\circ$,

i. να βρείτε τη γωνία ΑΖΒ. (Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι $ΒΚ = \frac{ΒΓ}{4}$. (Μονάδες 5)



Λύση

α) i. Επειδή τα Ε,Ζ είναι μέσα πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, είναι

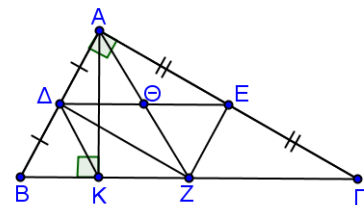
$ΕΖ \parallel ΑΒ \Leftrightarrow ΕΖ \parallel ΑΔ$ και $ΕΖ = \frac{ΑΒ}{2} = ΑΔ$. Στο τετράπλευρο ΑΔΖΕ

δύο απέναντι πλευρές του, οι ΑΔ, ΕΖ είναι ίσες και παράλληλες και μια γωνία του, η Α, είναι ορθή, οπότε το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

ii. Τα Δ,Ε είναι μέσα πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $ΔΕ \parallel ΒΓ$ και

$ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$. Οι ΑΖ, ΔΕ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου ΑΔΖΕ, οπότε είναι ίσες και διχοτομούνται.

$$\text{Άρα } ΑΘ = ΘΕ = \frac{ΔΕ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}.$$



β) i. Επειδή $ΖΕΓ = 90^\circ$, το ΖΕ είναι ύψος στο τρίγωνο ΑΖΓ και επειδή είναι και διάμεσος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα $ΖΑΓ = Γ = 30^\circ$.

Η γωνία ΑΖΒ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα $ΑΖΒ = ΖΑΓ + Γ = 60^\circ$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Gamma = 30^\circ$, άρα $AB = \frac{B\Gamma}{2}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε: $B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow B = 60^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου AKB έχουμε:

$$BAK + B = 90^\circ \Leftrightarrow BAK = 30^\circ. \text{ Τότε } BK = \frac{AB}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$$

14881. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και AM η διάμεσός του. Από το M φέρουμε MK κάθετη στην AB και ML κάθετη στην $A\Gamma$. Αν N, P είναι τα μέσα των BM και ΓM αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $NKM = NMK$

(Μονάδες 7)

β) Η MK είναι διχοτόμος της γωνίας NMA .

(Μονάδες 9)

γ) $AM = KN + LP$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Το KN είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου

τριγώνου MKB , οπότε $KN = \frac{MB}{2} = MN = NB$, άρα το τρίγωνο KNM είναι

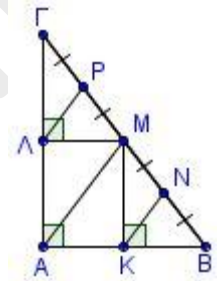
ισοσκελές και οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του MK είναι ίσες. Δηλαδή $NKM = NMK$.

β) Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου

τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο AMB , η MK είναι ύψος, οπότε είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας NMA .

$$\gamma) \text{ Είναι } KN + LP = \frac{MB}{2} + \frac{M\Gamma}{2} \stackrel{AM=MB=M\Gamma}{=} \frac{AM}{2} + \frac{AM}{2} = AM$$



3^ο Θέμα

12165. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\angle A = 120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ που τέμνει την AB στο μέσο της E .

α) Να αποδείξετε ότι $AB = 2 \cdot A\Delta$.

(Μονάδες 6)

β) Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο E

στην $\Gamma\Delta$ την τέμνει στο H , τότε να αποδείξετε ότι $\frac{AE}{HE} = 2$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν M είναι το μέσο της $\Gamma\Delta$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MA\Delta$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι $\angle A\Gamma = 90^\circ$.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Επειδή η DE είναι διχοτόμος της Δ , είναι $\angle 1 = \angle 2$. Όμως $\angle 2 = \angle 1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την DE , άρα $\angle 1 = \angle 1$, οπότε το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές με βάση την DE .

Είναι $AD = DE$ και E μέσο της AB άρα $AD = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2AD$.

β) Οι γωνίες A και Δ του παραλληλογράμμου είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την AD ,

οπότε $\angle A + \angle \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \angle \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \angle \Delta = 60^\circ$, άρα

$\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο DEH είναι $\angle 2 = 30^\circ$ άρα

$$EH = \frac{ED}{2} \Leftrightarrow \frac{AE}{HE} = 2.$$

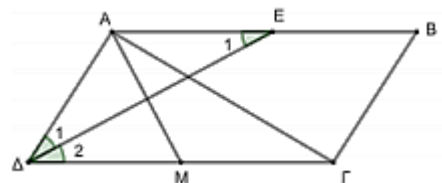
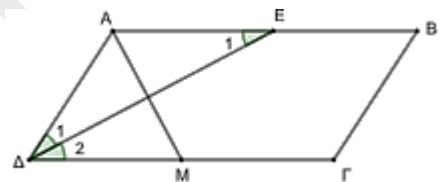
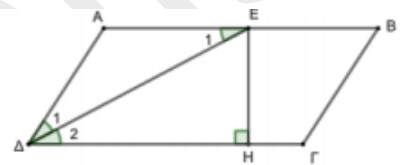
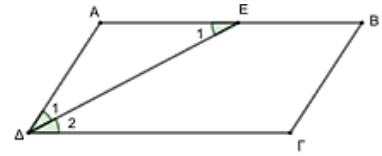
γ) Από το ερώτημα (α) έχουμε $AB = 2 \cdot AD$ και $AB = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, οπότε $\Gamma\Delta = 2AD$ (1). Επειδή το M είναι μέσο του $\Gamma\Delta$, έχουμε $\Gamma\Delta = 2DM$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $AD = DM$. Άρα το τρίγωνο ADM είναι ισοσκελές και επειδή η γωνία Δ είναι 60° το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

δ) Επειδή το τρίγωνο $MA\Delta$ είναι ισόπλευρο είναι

$$AM = MD = \frac{\Gamma\Delta}{2}, \text{ οπότε στο τρίγωνο } \Delta A\Gamma \text{ η } AM \text{ είναι διάμεσος}$$

και ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα την $\Gamma\Delta$, οπότε

$$\angle A\Gamma = 90^\circ.$$



ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ - ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ**4^ο Θέμα**

1706. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

II: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta=\gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **II**, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της **II** και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η **II** και η αντίστροφή της ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

Λύση

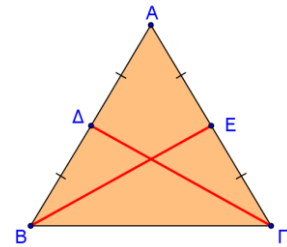
α) Συγκρίνω τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$.

- $B\Delta = E\Gamma$ (μισά των ίσων πλευρών AB και AG του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

- $B\Gamma$ κοινή πλευρά

- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (προσκειμένες στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

Άρα (Π-Γ-Π) τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ είναι ίσα και $BE = \Gamma\Delta$ ($\mu_\beta = \mu_\gamma$)



β) Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $\beta=\gamma$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔZB και $EZ\Gamma$

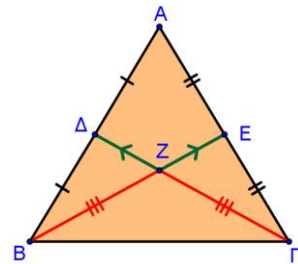
- $\Delta Z = ZE$ ($\Delta Z = \frac{1}{3} BE = \frac{1}{3} \Gamma\Delta = Z\Delta$)

- $BZ = \Gamma Z$ ($BZ = \frac{2}{3} BE = \frac{2}{3} \Gamma\Delta = \Gamma Z$)

- $\hat{\Delta ZB} = \hat{EZ\Gamma}$ (κατά κορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα ΔZB και $EZ\Gamma$ είναι ίσα και $\Delta B = E\Gamma \Leftrightarrow 2\Delta B = 2E\Gamma \Leftrightarrow AB = AG$.

Επομένως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



γ) Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta=\gamma$ αν και μόνο αν οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

1716. Στο διπλανό σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα ύψη του BA και ΓE που τέμνονται στο H και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $MA = ME$ (Μονάδες 10)

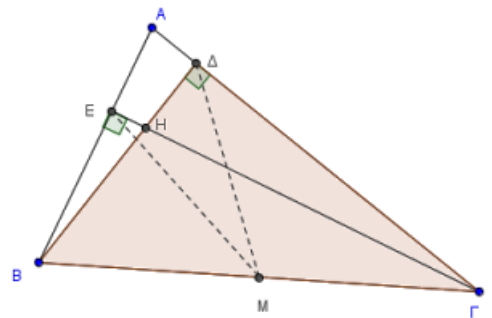
ii. Η ευθεία AH τέμνει κάθετα την $B\Gamma$ και ότι

$\angle A\hat{H}\Delta = \Gamma$, όπου Γ η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH .

(Μονάδες 10)

**Λύση**

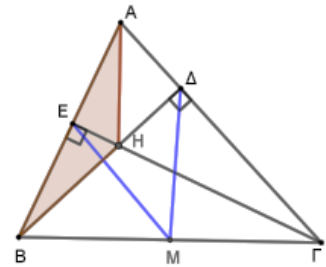
α) i. Τα $M\Delta$, ME είναι διάμεσοι στα ορθογώνια τρίγωνα $BE\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ που αντιστοιχούν στην

υποτείνουσα τους $B\Gamma$, οπότε: $M\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$ και $ME = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα $M\Delta = ME$.

ii. Επειδή τα ύψη BA και ΓE του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνονται στο H , το σημείο αυτό είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε και το AH είναι ύψος του, δηλαδή $AH \perp B\Gamma$.

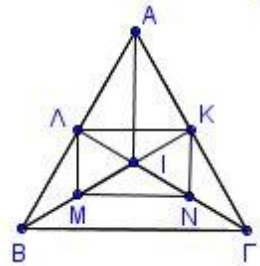
Επειδή $AH \perp BG$ και $HA \perp AG$ οι οξείες γωνίες $AH\Delta, \Gamma$ έχουν πλευρές κάθετες οπότε είναι ίσες.

β) Στο τρίγωνο ABH το ύψος που αντιστοιχεί στη πλευρά AB είναι το HE και το ύψος που αντιστοιχεί στη πλευρά BH είναι το AD . Επειδή οι φορείς των EH, AD τέμνονται στο Γ , το σημείο αυτό είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH .



1719. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BK και $\Gamma\Lambda$, τα οποία τέμνονται στο I . Αν τα σημεία M και N είναι τα μέσα των BI και ΓI αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)
- Τα τρίγωνα $B\Lambda I$ και $\Gamma I K$ είναι ίσα. (Μονάδες 5)
- Το AI προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 5)
- Το τετράπλευρο $M\Lambda K N$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Τα $BK, \Gamma\Lambda$ είναι ύψη του ισόπλευρου τριγώνου, οπότε είναι και διχοτόμοι και διάμεσοί του. Άρα $B_1 = \frac{B}{2} = 30^\circ$ και $\Gamma_1 = \frac{\Gamma}{2} = 30^\circ$, οπότε $B_1 = \Gamma_1$ και το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Lambda I$ και $\Gamma I K$ έχουν:
 1) $BI = \Gamma I$ αφού το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.
 2) $B_2 = \Gamma_2 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

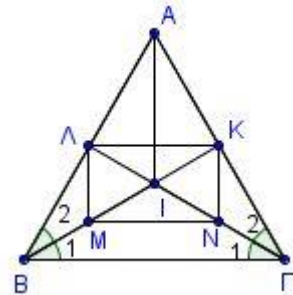
Άρα τα τρίγωνα $B\Lambda I$ και $\Gamma I K$ είναι ίσα.

γ) Στο σημείο I τέμνονται τα ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε είναι ορθόκεντρο του τριγώνου και το AI είναι επίσης ύψος του τριγώνου. Επειδή όμως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, το ύψος AI είναι και διάμεσος, άρα το AI προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

δ) Επειδή $BK, \Gamma\Lambda$ διάμεσοι του τριγώνου $AB\Gamma$, το I είναι βαρύκεντρο του τριγώνου.

Άρα $IK = \frac{1}{3}BK$, $I\Lambda = \frac{1}{3}\Gamma\Lambda$, $IN = \frac{1}{2}\Gamma I = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\Gamma\Lambda = \frac{1}{3}\Gamma\Lambda$ και $MI = \frac{1}{2}BI = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BK = \frac{1}{3}BK$.

Επειδή $I\Lambda = MI = NI = KI$ οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $K\Lambda M N$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή όμως τα τρίγωνα $B\Lambda I$ και $\Gamma I K$ είναι ίσα, τα τμήματα $I\Lambda$ και KI είναι ίσα, οπότε και τα τμήματα $N\Lambda$ και MK είναι ίσα. Στο παραλληλόγραμμο $K\Lambda M N$ οι διαγώνιές του MK και $N\Lambda$ είναι ίσες, οπότε είναι ορθογώνιο.



1728. Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

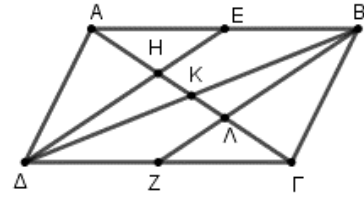
- Το τετράπλευρο $\Delta E B Z$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- $\Delta E \Delta = B Z \Gamma$. (Μονάδες 8)
- Οι ΔE και $B Z$ τριχοτομούν τη διαγώνιο $A\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Είναι $\Delta Z = \frac{\Delta \Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = EB$ και $\Delta Z \parallel EB$ αφού $\Delta \Gamma \parallel AB$, οπότε το τετράπλευρο ΔEBZ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι $\Delta EB = BZ \Leftrightarrow 180^\circ - \widehat{AE\Delta} = 180^\circ - \widehat{BZ\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{AE\Delta} = \widehat{BZ\Gamma}$.

2ος τρόπος: $\widehat{AE\Delta} = \widehat{BZ\Gamma}$ γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες



γ) Έστω K το κέντρο του παραλληλογράμμου, H το σημείο τομής των ΔE, AΓ και Λ το σημείο τομής των BZ, AΓ. Στο τρίγωνο AΔB οι AK, ΔE είναι διάμεσοι, οπότε το σημείο τομής τους H είναι βαρύκεντρο του τριγώνου. Άρα $AH = \frac{2}{3} AK = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} A\Gamma = \frac{1}{3} A\Gamma$ (1)

Στο τρίγωνο BΓΔ οι BZ, ΓK είναι διάμεσοι του, οπότε το σημείο τομής τους Λ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Άρα $\Gamma\Lambda = \frac{2}{3} \Gamma K = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} A\Gamma = \frac{1}{3} A\Gamma$ (2). Είναι $H\Lambda = A\Gamma - AH - \Gamma\Lambda = \frac{1}{3} A\Gamma$ (3).

Από τις (1), (2), (3) είναι $AH = H\Lambda = \Lambda\Gamma$.

1748. Στο τετράγωνο ABΓΔ ονομάζουμε O το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο E του τμήματος OΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AE, που τέμνει το τμήμα AO στο Z. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και φ του σχήματος είναι ίσες.

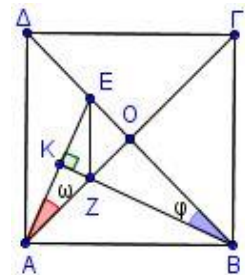
(Μονάδες 6)

β) $BZ = AE$ και $\Gamma Z = BE$.

(Μονάδες 12)

γ) Το τμήμα EZ είναι κάθετο στο AB.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Οι γωνίες ω και φ είναι ίσες γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες ($AE \perp BK$ και $AG \perp BD$ γιατί οι διαγώνιες του τετραγώνου είναι κάθετες)

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα AOE και BOZ έχουν:

1) $AO = OB$ μισά των ίσων διαγωνίων του τετραγώνου και

2) $\hat{\omega} = \hat{\phi}$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν $BZ = AE$ και $OZ = OE$.

Είναι $GO = OB$ και $OZ = OE$, άρα και $GO + OZ = OB + OE \Leftrightarrow \Gamma Z = BE$.

γ) Στο τρίγωνο EAB τα BK και AO είναι ύψη του, άρα το σημείο τομής τους Z είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Άρα το EZ είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου, δηλαδή $EZ \perp AB$.

1754. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του AΔ.

Στο AΔ θεωρούμε σημείο H τέτοιο, ώστε $HA = HB$. Έστω ότι E είναι το σημείο τομής της BH με την AΓ. Φέρνουμε την AZ κάθετη στη BE, η οποία τέμνει την πλευρά BΓ στο Θ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα HΔB και HZA είναι ίσα.

(Μονάδες 6)

ii. $\Delta\Theta = \Theta Z$

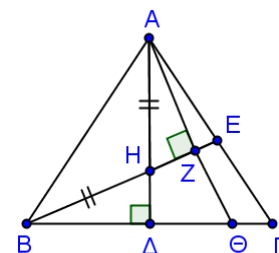
(Μονάδες 6)

iii. Η ευθεία ΘH είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB.

(Μονάδες 6)

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AHB; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΒΔ και ΗΑΕ έχουν:

1) $HA = HB$ και

2) $BHD = AHZ$ ως κατακορυφήν άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

ii. Επειδή $HA = HB$, το τρίγωνο ΗΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε

$HAB = HBA$ (1). Ακόμη επειδή τα τρίγωνα ΗΒΔ και ΗΑΖ είναι ίσα,

ισχύει ότι $HAZ = HBD$ (2).

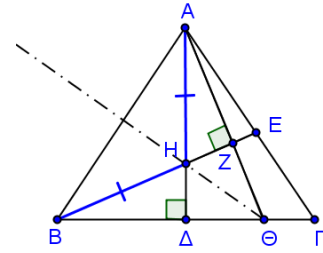
Από (1) + (2) $\Rightarrow HAB + HAZ = HBA + HBD \Leftrightarrow BAZ = ABD$, οπότε

το τρίγωνο ΘΑΒ είναι ισοσκελές και έχει $\Theta A = \Theta B$. Επειδή $\Theta A = \Theta B$ και $ZA = \Delta B \left(\begin{matrix} \triangle HBD = \triangle HAZ \end{matrix} \right)$

είναι και $\Theta E = \Theta \Delta$.

iii. Επειδή $\Theta A = \Theta B$ και $HA = HB$, τα σημεία Θ, Η ισαπέχουν από τα άκρα Α, Β του τμήματος ΑΒ, άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ. Δηλαδή η ΘΗ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

β) Τα τμήματα ΑΖ, ΒΔ είναι ύψη του τριγώνου ΑΗΒ που τέμνονται στο Θ, άρα το σημείο αυτό είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΗΒ.



1760. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και ΑΜ το ύψος του στη πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση του ΑΜ θεωρούμε τμήμα $MN = AM$. Στη προέκταση του ΒΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

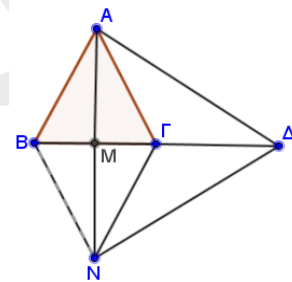
α) Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ. (Μονάδες 9)



Λύση

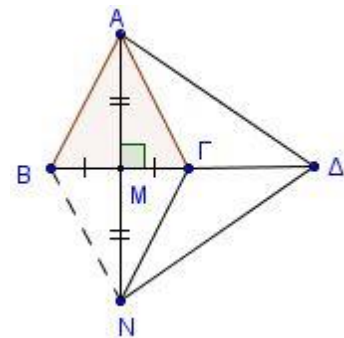
α) Το ΑΜ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσος. Οι ΑΝ, ΒΓ είναι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΝΓ και διχοτομούνται κάθετα, άρα είναι ρόμβος.

β) Στο τρίγωνο ΑΔΝ η ΔΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $\Gamma M = \frac{1}{2} B\Gamma = \frac{1}{2} \Delta\Gamma \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2\Gamma M = 2(\Delta M - \Delta\Gamma) \Leftrightarrow$

$$\Delta\Gamma = 2\Delta M - 2\Delta\Gamma \Leftrightarrow 3\Delta\Gamma = 2\Delta M \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{2}{3} \Delta M.$$

Το σημείο Γ βρίσκεται στη διάμεσο ΔΜ και απέχει από τη κορυφή Δ απόσταση ίση με τα $\frac{2}{3}$ της διαμέσου, άρα είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.



1764. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $AB > BG$, $AG = 2BG$. Στην προέκταση της πλευράς ΔΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $\Delta A = AE$. Να αποδείξετε ότι:

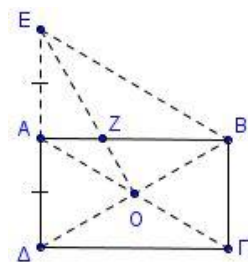
α) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)

γ) Αν η ΕΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ,

να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp EB$.

(Μονάδες 8)



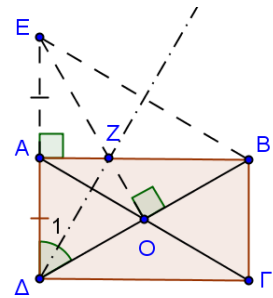
Λύση

α) Επειδή $AE = AD = BF$, $AD \parallel BF$ και τα σημεία A, Δ, E είναι συνευθειακά, τα τμήματα AE και BF είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο $AEBF$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Η AB είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο EAB είναι ισοσκελές.

Είναι $AO = \frac{AG}{2} = \frac{BD}{2} = OD$ και $\frac{AG}{2} = BF = AD$, οπότε το τρίγωνο OAD έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ισόπλευρο. Τότε οι γωνίες του είναι ίσες με 60° , άρα $\Delta_1 = 60^\circ$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο EAB μια γωνία του είναι 60° , οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.



γ) Τα EO, BA είναι ύψη στο ισόπλευρο τρίγωνο EAB , οπότε το σημείο τομής τους Z είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου και η AZ είναι το τρίτο ύψος του. Δηλαδή $AZ \perp EB$.

1777. Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, $BE, \Gamma Z$ τα ύψη από τις κορυφές B, Γ αντίστοιχα και H το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα M, N, K, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $AB, A\Gamma, \Gamma H, BH$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

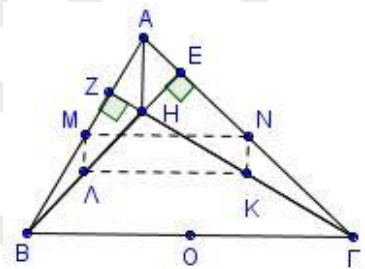
i. $MN = AK$ (Μονάδες 6)

ii. $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$ (Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο $MNKL$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν O είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\angle MOK = 90^\circ$.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) i. Τα M, N είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα

$$MN \parallel B\Gamma \text{ και } MN = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Τα K, Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $H\Gamma$, άρα $K\Lambda \parallel B\Gamma$

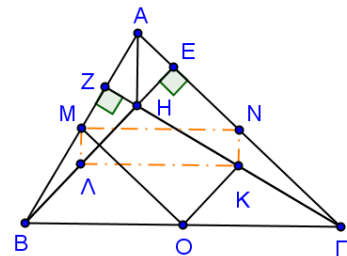
$$\text{και } K\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}. \text{ Είναι } MN = K\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}.$$

ii. Τα N, K είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $A\Gamma H$, άρα $NK \parallel AH$

$$\text{και } NK = \frac{AH}{2}.$$

Τα M, Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο AHB , άρα $M\Lambda \parallel AH$ και $M\Lambda = \frac{AH}{2}$.

$$\text{Είναι } NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}.$$



iii. Επειδή $MN \parallel K\Lambda$ και $MN = K\Lambda$, το τετράπλευρο $MNKL$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή το H είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι $AH \perp B\Gamma$.

Επειδή $MN \parallel B\Gamma$ και $M\Lambda \parallel AH$, είναι $MN \perp M\Lambda$, άρα το παραλληλόγραμμο $MNKL$ έχει μία ορθή γωνία και είναι ορθογώνιο.

β) Τα K, O είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $H\Gamma$, άρα $KO \parallel BH$.

Τα M, O είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $MO \parallel A\Gamma$. Όμως $BH \perp A\Gamma$ άρα και $KO \perp MO$, δηλαδή $\angle MOK = 90^\circ$.

1780. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = \Delta B$. Έστω M το μέσο της $A\Delta$ και N το σημείο τομής των ευθειών AE και $\Gamma\Delta$.

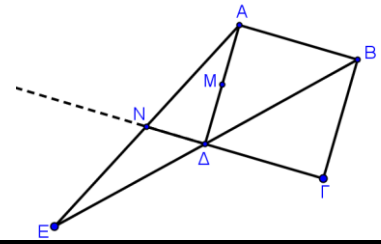
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta N = \Delta M$ (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $NM\Delta$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $MN \perp A\Gamma$ (Μονάδες 7)

ii. $\Gamma M \perp AN$ (Μονάδες 7)



Λύση

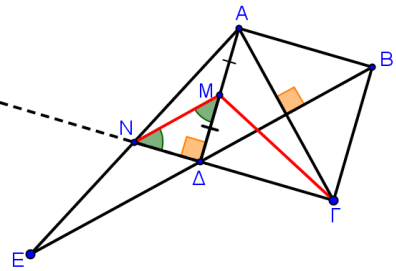
α) Στο τρίγωνο EAB το Δ είναι μέσο της EB και η ΔN είναι παράλληλη στην AB (απέναντι πλευρές τετραγώνου), άρα το N είναι μέσο της AE και ισχύει ότι $\Delta N = \frac{AB}{2}$. Όμως

$$AB = A\Delta \text{ και } \Delta M = \frac{A\Delta}{2}, \text{ άρα } \Delta N = \Delta M$$

β) Το τρίγωνο $NM\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\Delta N = \Delta M$, δηλαδή είναι και ισοσκελές, άρα $\Delta NM = \Delta MN = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$

γ) i. Στο τρίγωνο $A\Delta E$ τα M, N είναι μέσα δύο πλευρών, άρα η MN είναι παράλληλη στην DE . Η DE όμως είναι κάθετη στην $A\Gamma$ αφού οι διαγώνιες ενός τετραγώνου είναι κάθετες, άρα και $MN \perp A\Gamma$.

ii. Στο τρίγωνο $AN\Gamma$ τα NM και $A\Delta$ είναι ύψη του, άρα το σημείο τομής τους, δηλαδή το M είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Οπότε και το ΓM είναι ύψος του τριγώνου, δηλαδή $\Gamma M \perp AN$.

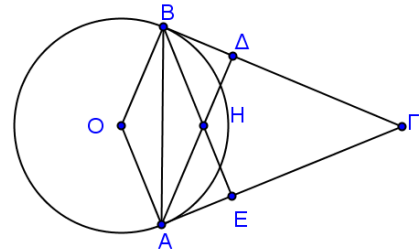


1823. Δίνεται κύκλος κέντρου O και δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία του A και B . Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B οι οποίες τέμνονται σε σημείο Γ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη $A\Delta$ και BE του τριγώνου $AB\Gamma$ τα οποία τέμνονται στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $OBHA$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ) Τα σημεία O, H, Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)



Λύση

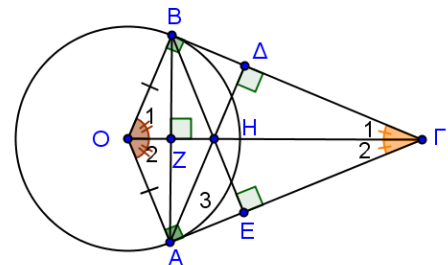
α) Γνωρίζουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα που ágονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν είναι ίσα, άρα $A\Gamma = B\Gamma$. Η διακεντρική ευθεία ΓO διχοτομεί τη γωνία $B\Gamma A$ των εφαπτομένων καθώς και τη γωνία BOA των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓBA η ΓZ είναι διχοτόμος, οπότε είναι ύψος και διάμεσος δηλαδή είναι μεσοκάθετος του AB . Το σημείο H είναι το σημείο τομής των υψών $A\Delta$ και BE (ορθόκεντρο), άρα ανήκει στη ΓZ .

Επειδή το σημείο H ανήκει στη μεσοκάθετο του AB ισαπέχει από τα A και B , δηλαδή $HA = HB$, άρα το τρίγωνο HBA είναι ισοσκελές.

β) Επειδή OA, OB ακτίνες, ισχύει ότι $OA \perp A\Gamma$ και $OB \perp B\Gamma$. Όμως $BE \perp A\Gamma$ και $A\Delta \perp B\Gamma$, άρα $OA \parallel BE$ και $OB \parallel A\Delta$, οπότε το τετράπλευρο $OBHA$ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $OA = OB = R$, το παραλληλόγραμμο έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

γ) Τα σημεία O, H, Γ ανήκουν στη διακεντρική ευθεία $O\Gamma$. Επομένως τα σημεία O, H, Γ είναι συνευθειακά.



1827. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου BA . Στην προέκταση της AE θεωρούμε σημείο Z τέτοιο, ώστε $EZ = AE$ και έστω Θ το σημείο τομής της AZ με την πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Delta Z$.

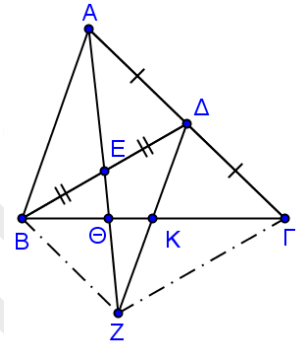
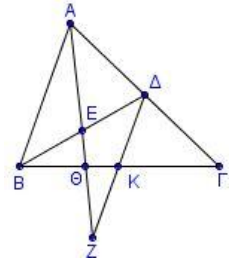
(Μονάδες 9)

Λύση

α) Οι $AZ, B\Delta$ είναι διαγώνιες του τετραπλεύρου $ABZ\Delta$ και διχοτομούνται, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

β) Οι $BZ, A\Delta$ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα $BZ = A\Delta$ και $BZ \parallel A\Delta$. Όμως $A\Delta = \Delta\Gamma$, οπότε $BZ = \Delta\Gamma$ και $BZ \parallel \Delta\Gamma$, άρα το $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

γ) Επειδή το $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του διχοτομούνται. Άρα το K είναι μέσο του ΔZ . Στο τρίγωνο $B\Delta Z$ τα EZ, BK είναι διάμεσοι, άρα το Θ που είναι το σημείο τομής τους είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.



1835. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $\Gamma = 30^\circ$ με M και N τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E . α) Να αποδείξετε ότι:

i. η BE είναι διχοτόμος της γωνίας B . (Μονάδες 6)

ii. $AE = \frac{BE}{2}$ (Μονάδες 6)

iii. η BE είναι μεσοκάθετος της διαμέσου AM . (Μονάδες 7)

β) Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνει την BE στο H , να αποδείξετε ότι τα σημεία M, H και N είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

Λύση

α) i. Επειδή το EM είναι μεσοκάθετος του $B\Gamma$, το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές και έχει $EB\Gamma = \Gamma = 30^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε: $B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow B + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B = 60^\circ$, τότε $ABE = B - EB\Gamma = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$. Επειδή $ABE = EB\Gamma$, η BE είναι διχοτόμος της γωνίας B .

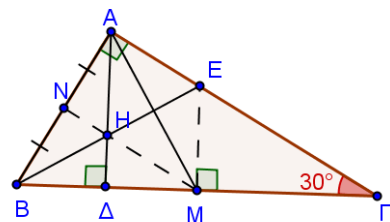
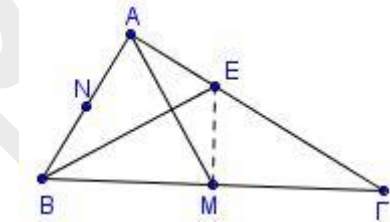
ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE είναι $ABE = 30^\circ$, άρα $AE = \frac{BE}{2} = \frac{BE}{2}$.

iii. Το AM είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ που

αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma$.

Το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές και επιπλέον έχει $B = 60^\circ$, άρα είναι ισόπλευρο. Η BE είναι διχοτόμος στο ισόπλευρο τρίγωνο ABE , οπότε είναι ύψος και διάμεσός του, δηλαδή το BE είναι μεσοκάθετος του AM .

β) Επειδή τα $A\Delta, BH$ είναι ύψη του τριγώνου ABM , το H είναι ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε και $MH \perp AB$. Όμως και $MN \perp AB$ αφού το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο και η MN είναι διάμεσός του. Επειδή από το M άγεται μοναδική κάθετη προς την AB , τα σημεία M, H, N είναι συνευθειακά.



1843. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του AM . Φέρουμε τη $ΜΔ$ κάθετη στην $A\Gamma$ και θεωρούμε σημείο H το μέσο του $ΜΔ$. Από το H φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις AM και $A\Gamma$ στα σημεία K και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 9)

β) $MZ \parallel B\Delta$ (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία AH είναι κάθετη στη $B\Delta$. (Μονάδες 8)

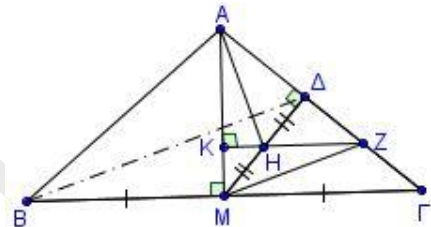
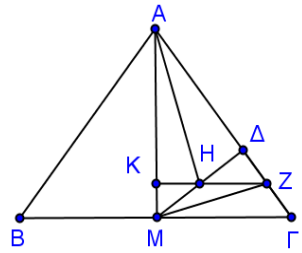
Λύση

α) Το AM είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι και διάμεσος του τριγώνου. Στο τρίγωνο $ΜΔΓ$ το H είναι μέσο της $ΜΔ$ και $HZ \parallel ΜΓ$, άρα το Z

είναι μέσο της $ΔΓ$ και ισχύει ότι $HZ = \frac{ΜΓ}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.

β) Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ τα M, Z είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $MZ \parallel B\Delta$.

γ) Είναι $KZ \parallel B\Gamma$ και $B\Gamma \perp AM$, άρα $KZ \perp AM$. Στο τρίγωνο AMZ τα $ΜΔ, ZK$ είναι ύψη, άρα το σημείο τομής τους, δηλαδή το H , είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Επομένως το AH είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου. Δηλαδή $AH \perp MZ$ και επειδή $MZ \parallel B\Delta$ είναι και $AH \perp B\Delta$.



1865. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A = 90^\circ$) με $B\Delta$ διχοτόμο και AK

ύψος, που τέμνονται στο E . Η κάθετη

από το E στην AB τέμνει τις AB και $B\Gamma$ στα H και Z αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα EHA και EKZ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii) Το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii) Η $B\Delta$ είναι κάθετη στην AZ . (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας Γ . (Μονάδες 6)

Λύση

α) i) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα EHA και EKZ . Έχουν:

- $\widehat{H\epsilon A} = \widehat{K\epsilon Z}$ (κατακορυφήν)
- $HE = EK$ (E σημείο της διχοτόμου $A\Delta$ και EH, EK

αποστάσεις από τις πλευρές της γωνίας $\widehat{B}$

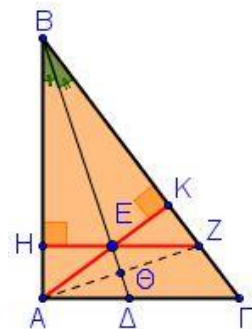
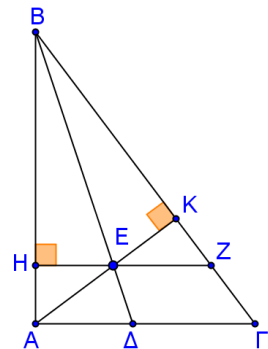
Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη τους πλευρά ίση και την οξεία γωνία που περιέχεται μεταξύ αυτής της κάθετης και της υποτείνουσας ίση, τα τρίγωνα EHA και EKZ είναι ίσα.

ii) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα BEH και BEK . Έχουν:

- $\widehat{HEB} = \widehat{BEK}$ ως συμπληρωματικές των $\widehat{H\epsilon E} = \widehat{E\epsilon K}$ ($B\Delta$ διχοτόμος)
- $HE = EK$

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη τους πλευρά ίση και την οξεία γωνία που περιέχεται μεταξύ αυτής της κάθετης και της υποτείνουσας ίση, τα τρίγωνα BEH και BEK είναι ίσα, οπότε είναι και $BH = BK$. Επομένως το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές.

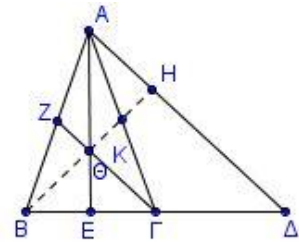
iii) Στο τρίγωνο ABZ το σημείο E είναι ορθόκεντρο (σημείο τομής των υψών AK, ZH) οπότε και το $A\Theta$ είναι ύψος αφού διέρχεται από το E . Άρα η AE είναι κάθετη στην AZ .



β) Στην περίπτωση αυτή το ΑΚ είναι ύψος άρα και διχοτόμος.
Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Ε είναι σημείο τομής των διχοτόμων ΑΚ και ΒΔ άρα είναι έγκεντρο.
Η ΓΕ διέρχεται από το Ε άρα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

1878. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$. Προεκτείνουμε το ΒΓ (προς το Γ) κατά τμήμα $ΓΔ = BG$. Φέρουμε τις διαμέσους ΑΕ και ΓΖ του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Θ. Το ΒΘ προεκτεινόμενο, τέμνει το ΑΓ στο Κ και το ΑΔ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
β) $AH = \Theta\Gamma$ (Μονάδες 9)
γ) $AH = 2Z\Theta$ (Μονάδες 7)



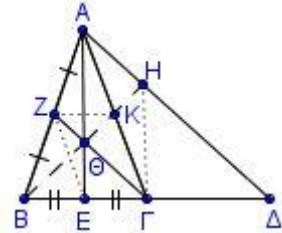
Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Ζ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών, άρα

$$ZE \parallel AG \Leftrightarrow ZE \parallel KG \text{ και } ZE = \frac{AG}{2} \quad (1).$$

Επειδή ΑΕ,ΓΖ διάμεσοι, το Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου, οπότε

$$\Theta Z = \frac{1}{3} \Gamma Z, \text{ δηλαδή } \Gamma\Theta = 2\Theta Z. \text{ όμως } \Gamma\Theta = AH, \text{ άρα } AH = 2Z\Theta$$



β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ τα Ζ,Γ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $Z\Gamma \parallel AD \Leftrightarrow \Theta\Gamma \parallel AH$ (3).

Στο τρίγωνο ΒΗΔ το Γ είναι μέσο του ΒΔ και $\Gamma\Theta \parallel HD$, άρα το Θ είναι μέσο του ΒΗ.

Στο τρίγωνο ΒΗΓ τα Θ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $\Theta E \parallel HG \Leftrightarrow A\Theta \parallel HG$ (4).

Από τις (3),(4) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΘΓΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. Άρα $AH = \Theta\Gamma$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

γ) **1ος τρόπος:** Στο τρίγωνο ΒΑΗ τα Ζ,Θ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $Z\Theta = \frac{AH}{2} \Leftrightarrow AH = 2Z\Theta$

2ος τρόπος: Επειδή το Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι $\Gamma\Theta = \frac{2}{3} \Gamma Z$ και

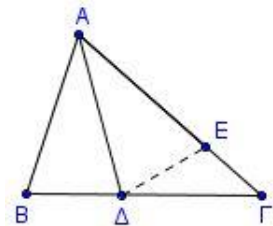
$$\Theta Z = \frac{1}{3} \Gamma Z, \text{ δηλαδή } \Gamma\Theta = 2\Theta Z. \text{ όμως } \Gamma\Theta = AH, \text{ άρα } AH = 2Z\Theta$$

1887. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $AE = AB$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΕ. (Μονάδες 9)

γ) αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ. (Μονάδες 9)



Λύση

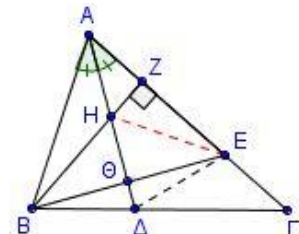
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ έχουν:

- 1) την πλευρά ΑΔ κοινή
- 2) $AE = AB$ και
- 3) $\angle BAD = \angle DAE$ λόγω της διχοτόμησης

Λόγω του κριτηρίου ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα και $\Delta B = \Delta E$.

β) Επειδή $AB = AE$, $\Delta B = \Delta E$ τα Α,Δ βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ΒΕ.
Άρα η ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΕ.

γ) Στο τρίγωνο ΑΒΕ τα ΑΘ,ΒΗ είναι ύψη που τέμνονται στο Η, άρα το σημείο αυτό είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε το ΕΗ είναι το τρίτο ύψος. Δηλαδή $EH \perp AB$.



ΤΡΑΠΕΖΙΟ

2^ο Θέμα

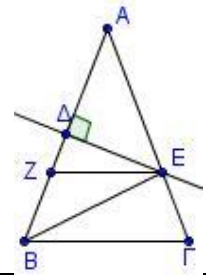
1529. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

α) Να αποδείξετε ότι $AE = BE$.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

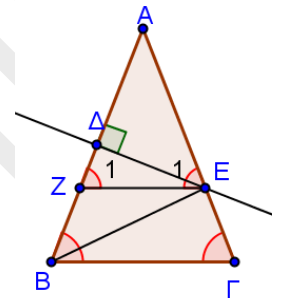
(Μονάδες 10)



Λύση

α) Η ED είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο AEB , άρα είναι ισοσκελές με βάση την AB και έχει $AE = BE$.

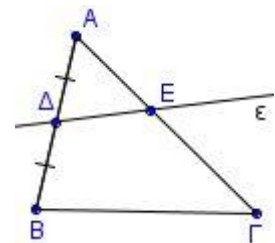
β) Είναι $Z_1 = B$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ZE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την AB και $E_1 = \Gamma$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ZE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$. Όμως $B = \Gamma$ γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, άρα και $Z_1 = E_1$, δηλαδή το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές με βάση την ZE και είναι $AZ = AE$. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $AZ = AE$, είναι και $AB - AZ = A\Gamma - AE \Leftrightarrow ZB = E\Gamma$ (1). Επειδή $EZ \parallel B\Gamma$ (2) και οι πλευρές ZB , $E\Gamma$ τέμνονται (3), από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



1536. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της πλευράς AB . Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ϵ) που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο E . Η ευθεία (ϵ) χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $A\Delta E$ κι σε ένα τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$.

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

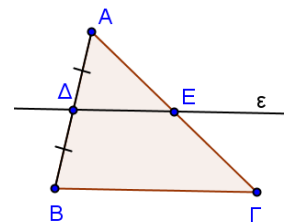
β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 13)

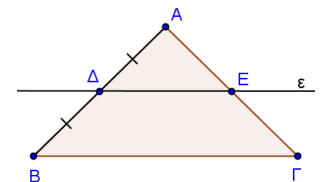
Λύση

α) Αν το $B\Delta E\Gamma$ είναι τραπέζιο, θα έχει δύο απέναντι πλευρές του παράλληλες. Επειδή οι πλευρές $B\Delta$ και ΓE τέμνονται στο A , παράλληλες θα είναι οι ΔE , $B\Gamma$. Επειδή το Δ είναι μέσο της AB και η ΔE είναι παράλληλη στη $B\Gamma$, το E θα είναι μέσο της $A\Gamma$.



β) Αν το τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε $B\Delta = \Gamma E$.

Όμως $B\Delta = \frac{AB}{2}$ και $\Gamma E = \frac{A\Gamma}{2}$, άρα $AB = A\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



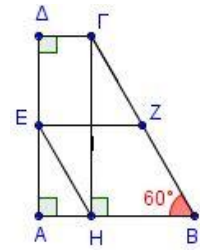
1549. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $A = \Delta = 90^\circ$, $AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$ και $B = 60^\circ$. Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$ και θεωρούμε τα μέσα E και Z των πλευρών AD και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = 3\Gamma\Delta$

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο $EHBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου $B\Gamma H$ έχουμε: $B + B\Gamma H = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + B\Gamma H = 90^\circ \Leftrightarrow B\Gamma H = 30^\circ$.

Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma H$ ισχύει ότι $BH = \frac{B\Gamma}{2}$.

Όμως $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$, άρα $BH = \frac{4\Gamma\Delta}{2} = 2\Gamma\Delta$.

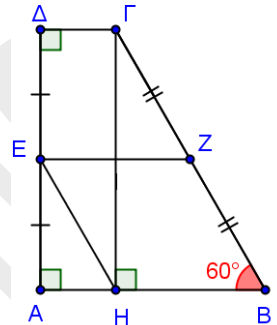
Το τετράπλευρο $AH\Gamma\Delta$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο. Τότε $AH = \Gamma\Delta$ γιατί είναι απέναντι πλευρές ορθογώνιου.

Είναι $AB = AH + HB = \Gamma\Delta + 2\Gamma\Delta = 3\Gamma\Delta$.

β) Η EZ είναι διάμεσος του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$, άρα είναι παράλληλη στις βάσεις

AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{3\Gamma\Delta + \Gamma\Delta}{2} = \frac{4\Gamma\Delta}{2} = 2\Gamma\Delta = HB$.

Επειδή τα τμήματα EZ και HB είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο $EHBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.



1550. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$ και $AD = B\Gamma$.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραpezίου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ισούται με το ημίαθροισμα των βάσεων του τραpezίου, άρα:

$$MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{3x + 2 + x + 2}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot (x + 4) = 4x + 4 \Leftrightarrow$$

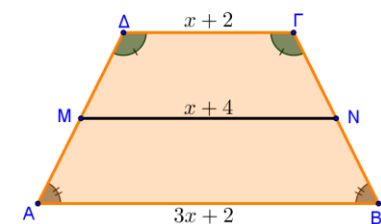
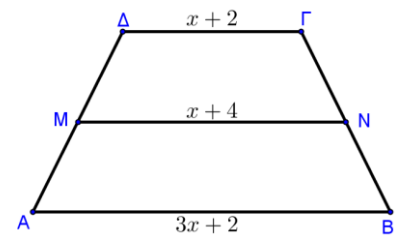
$$2x + 8 = 4x + 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

β) Το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε $A = B$ (1) και $\Gamma = \Delta$ (2).

Το άθροισμα των γωνιών του τραpezίου είναι ίσο με 360° άρα

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow \cancel{\hat{A}} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ.$$

$$\text{Επομένως } \hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60^\circ \text{ και } \hat{B} = 2\hat{\Gamma} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ = \hat{A}$$



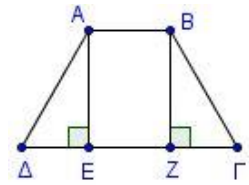
1562. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ . Να αποδείξετε ότι:
α) $DE = \Gamma Z$

(Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)

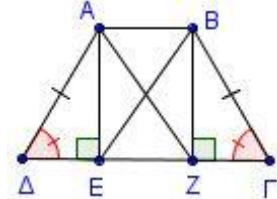
Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ έχουν:

- 1) $AD = B\Gamma$ μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραpezίου και
 - 2) $\Delta = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τραpezίου.
- Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $DE = \Gamma Z$.

β) Επειδή $AE \perp \Gamma\Delta$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$, θα είναι και $AE \perp AB$. Το τετράπλευρο $AEZB$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.



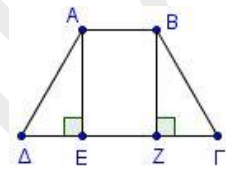
1563. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ . Να αποδείξετε ότι:
α) $DE = \Gamma Z$

(Μονάδες 12)

β) $AZ = BE$

(Μονάδες 13)

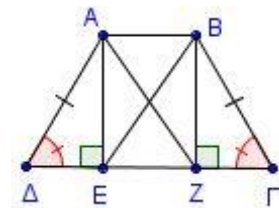
Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ έχουν:

- 1) $AD = B\Gamma$ μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραpezίου και
 - 2) $\Delta = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τραpezίου.
- Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $DE = \Gamma Z$.

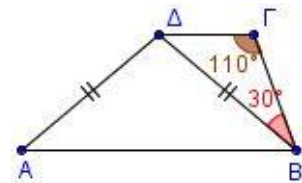
β) Επειδή $AE \perp \Gamma\Delta$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$, θα είναι και $AE \perp AB$. Το τετράπλευρο $AEZB$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο. Οι AZ , BE είναι διαγώνιες του ορθογωνίου και είναι ίσες.



1577. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) στο οποίο η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την πλευρά $A\Delta$. Αν η γωνία $\Gamma = 110^\circ$ και η γωνία $\Delta B\Gamma = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $A\Delta B$.

(Μονάδες 25)

Λύση



Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\Delta\Gamma B$ έχουμε:

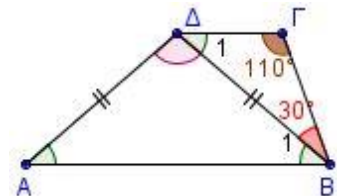
$$\Delta_1 + 30^\circ + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 40^\circ.$$

Είναι $B_1 = \Delta_1 = 40^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$.

Επειδή $A\Delta = B\Delta$, το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές με βάση την AB , άρα $A = B_1 = 40^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta B$ έχουμε:

$$A\Delta B + A + B_1 = 180^\circ \Leftrightarrow A\Delta B + 2 \cdot 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A\Delta B = 80^\circ$$



1579. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των ΔZ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta Z = \Gamma E$

(Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα EKZ και $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 12)

Λύση

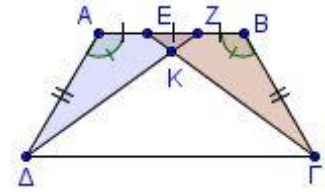
α) Τα τρίγωνα $\Delta\Delta Z$ και $E\Gamma E$ έχουν:

1) $AZ = EB = \frac{2}{3}AB$

2) $\Delta\Delta = \Gamma\Gamma$, ίσες μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπέζιου και

3) $\Delta = \Gamma$ βρίσκονται σε μια βάση του ισοσκελούς τραπέζιου

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta Z = \Gamma E$.



β) Επειδή τα τρίγωνα $\Delta\Delta Z$ και $E\Gamma E$ είναι ίσα, έχουν και $KEZ = KZE$, οπότε το τρίγωνο EKZ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές.

Επειδή το τρίγωνο EKZ είναι ισοσκελές με βάση την EZ , είναι $KZ = KE$. Όμως είναι και $\Delta Z = \Gamma E$, άρα και $\Delta Z - KZ = \Gamma E - KE \Leftrightarrow K\Delta = K\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελές.

1612. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $\Delta\Delta = 9$, $E\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 30$.

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

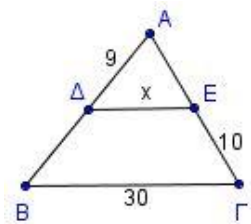
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔE .

(Μονάδες 8)

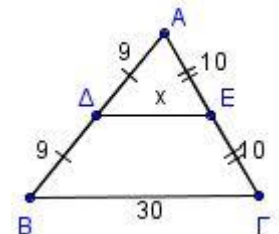


Λύση

α) Είναι $2\tau = AB + B\Gamma + A\Gamma = 2\Delta\Delta + 30 + 2E\Gamma = 18 + 30 + 20 = 68$

β) Επειδή τα σημεία Δ, E είναι μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$. Επειδή επιπλέον οι πλευρές $\Delta B, E\Gamma$ τέμνονται στο A , το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

γ) $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow x = \frac{30}{2} = 15$



1629. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με

$\Gamma\Delta > AB$ και $B = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.

(Μονάδες 10)

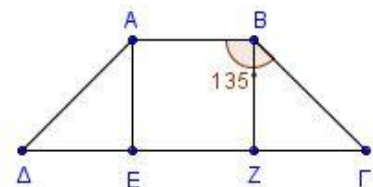
β) Να αποδείξετε ότι $AE = ED = BZ = \Gamma Z$.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές οι γωνίες κάθε βάσης του είναι ίσες, άρα $A = B = 135^\circ$.

Οι γωνίες B και Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 135^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 45^\circ$, άρα και $\Delta = \Gamma = 45^\circ$.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι $\Gamma = 45^\circ$ και από το άθροισμα των γωνιών του είναι και $ZB\Gamma = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει $BZ = Z\Gamma$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Delta$ είναι $\Delta = 45^\circ$ και από το άθροισμα των γωνιών του είναι και $\Delta AE = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει $AE = E\Delta$.

Όμως το $ABZE$ είναι ορθογώνιο, οπότε $AE = BZ$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του, άρα $AE = E\Delta = BZ = Z\Gamma$.

1634. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 6$,

$B\Gamma = 4$ και $\Gamma = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές οι γωνίες κάθε βάσης του είναι ίσες, άρα $\Delta = \Gamma = 60^\circ$.

Οι γωνίες B και Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

$$B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow B + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 120^\circ, \text{ άρα και}$$

$$A = B = 120^\circ.$$

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ έχουν:

1) $A\Delta = B\Gamma$ γιατί οι μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπέζιου είναι ίσες και

2) $\Delta = \Gamma = 60^\circ$

Άρα τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες ίσες και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα.

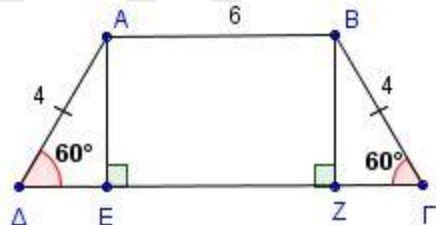
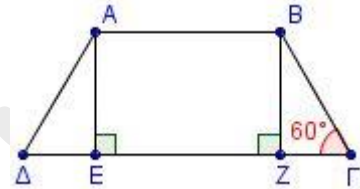
γ) Είναι $B = 120^\circ$ και $ABZ = 90^\circ$, άρα $ZB\Gamma = 30^\circ$, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $BZ\Gamma$ ισχύει

$$\text{ότι } Z\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = 2. \text{ Επειδή τα τρίγωνα } AE\Delta \text{ και } BZ\Gamma \text{ είναι ίσα, έχουν και } \Delta E = Z\Gamma = 2.$$

Επειδή το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο, ισχύει ότι $EZ = AB = 6$, άρα

$$\Delta\Gamma = \Delta E + EZ + Z\Gamma = 2 + 6 + 2 = 10.$$

$$\text{Η περίμετρος του } AB\Gamma\Delta \text{ είναι: } AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 6 + 4 + 10 + 4 = 24$$



1635. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = B\Gamma = 4$, $A = 90^\circ$

και $\Gamma = 60^\circ$.

Δίνεται επίσης το ύψος BE από την κορυφή B .

α) Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 8)

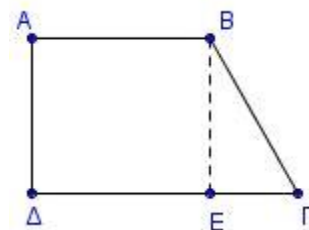
β) Να αποδείξετε ότι $2E\Gamma = B\Gamma$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν M, N τα μέσα των πλευρών $A\Delta, B\Gamma$ αντίστοιχα, να

βρείτε το μήκος του τμήματος MN .

(Μονάδες 8)



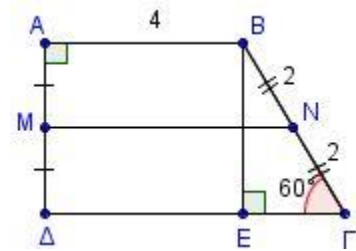
Λύση

α) Επειδή $A = 90^\circ$ είναι $AD \perp AB$, όμως $AB \parallel \Gamma\Delta$, άρα και

$AD \perp \Gamma\Delta$, οπότε $\Delta = 90^\circ$.

Οι γωνίες B και Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AB, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

$$B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow B + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 120^\circ.$$



β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου BEΓ, έχουμε:

$$EB\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow EB\Gamma + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow EB\Gamma = 30^\circ, \text{ τότε στο τρίγωνο αυτό ισχύει ότι}$$

$$E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2E\Gamma = B\Gamma.$$

γ) Είναι $E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Το MN ενώνει τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του τραpezίου, οπότε η MN είναι διάμεσος του

τραpezίου ABΓΔ και ισχύει ότι: $MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{4 + \Delta E + E\Gamma}{2} = \frac{4 + 4 + 2}{2} = 5$

1644. Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 3$, $\Gamma\Delta = 4$.

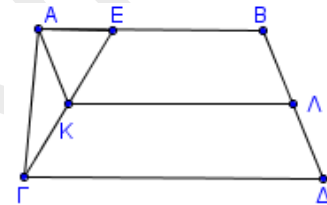
Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE = 1$. Στο τραπέζιο EBΓΔ θεωρούμε τα K και Λ, μέσα των ΕΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΚΛ του τραpezίου EBΓΔ.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΛK είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)

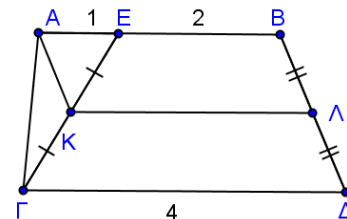


Λύση

α) Είναι $K\Lambda \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$ και

$$K\Lambda = \frac{EB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{AB - AE + \Gamma\Delta}{2} = \frac{3 - 1 + 4}{2} = 3$$

β) Είναι $K\Lambda \parallel AB$ και $K\Lambda = AB = 3$, δηλαδή στο τετράπλευρο ABΛK δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



1650. Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $BD = B\Gamma$. Αν

$\Delta B\Gamma = 110^\circ$ και $A\Delta B = 25^\circ$, να υπολογίσετε:

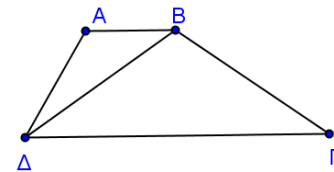
α) Τη γωνία Γ.

(Μονάδες 11)

β) Τη γωνία Α.

(Μονάδες 14)

Λύση

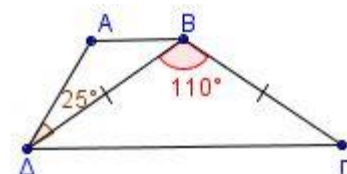


α) Επειδή $BD = B\Gamma$, το τρίγωνο BΔΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΓ,

άρα $B\Delta\Gamma = \Gamma$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου BΔΓ έχουμε:

$$B\Delta\Gamma + \Gamma + \Delta B\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma = 70^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 35^\circ$$



β) Είναι $B\Delta\Gamma = \Gamma = 35^\circ$ και $A\Delta\Gamma = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$.

Οι γωνίες A και AΔΓ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων AB, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ και είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $A + A\Delta\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 120^\circ$

1666. Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ ,

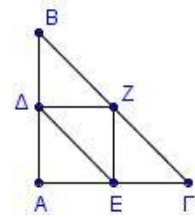
E και Z των πλευρών του AB , AG και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 13)



Λύση

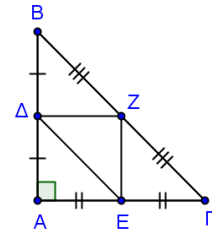
α) Επειδή τα Δ, Z είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, ισχύει ότι

$\Delta Z \parallel AG \Leftrightarrow \Delta Z \parallel AE$ και $\Delta Z = \frac{AG}{2} = AE$. Στο τετράπλευρο $AEZ\Delta$ δύο απέναντι

πλευρές του, οι ΔZ και AE , είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή όμως $A = 90^\circ$, το $AEZ\Delta$ είναι ορθογώνιο.

β) Επειδή τα σημεία Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η ΔE είναι παράλληλη στη $B\Gamma$ (1). Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, έχει $AB = AG$, τότε όμως είναι και $\Delta B = EG$ (2) γιατί είναι μισά των AB, AG .

Επειδή οι $B\Delta$ και $E\Gamma$ τέμνονται στο A (3), από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



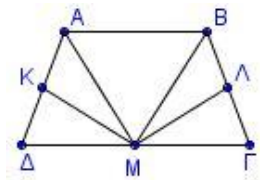
1669. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $KM = \Lambda M$

(Μονάδες 12)

β) $AM = BM$

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα $K\Delta M$ και $\Lambda M\Gamma$ έχουν:

1) $M\Delta = M\Gamma$ γιατί το M είναι μέσο της $\Delta\Gamma$

2) $K\Delta = \Lambda\Gamma$ γιατί είναι μισά των ίσων μη παράλληλων πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ του ισοσκελούς τραpezίου και

3) $\Delta = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση $\Delta\Gamma$ του ισοσκελούς τραpezίου.

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $KM = \Lambda M$.

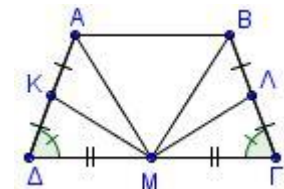
β) Τα τρίγωνα $A\Delta M$ και $M B\Gamma$ έχουν:

1) $M\Delta = M\Gamma$

2) $\Delta = \Gamma$ και

3) $A\Delta = B\Gamma$

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AM = BM$.



1694. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Delta\Gamma$, $AB = 8$ και $\Delta\Gamma = 12$. Αν AH και $B\Theta$ τα ύψη του τραpezίου,

α) να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραpezίου.

(Μονάδες 13)

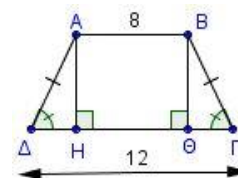
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AH\Delta$ και $B\Theta\Gamma$ έχουν:

1) $A\Delta = B\Gamma$ μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραpezίου και

2) $\Delta = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του τραpezίου

Άρα τα τρίγωνα έχουν τις υποτεινόμενες τους ίσες και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $\Delta H = \Theta\Gamma$.



β) Αν δ η διάμεσος του τραπέζιου, τότε: $\delta = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{8 + 12}{2} = 10$

1697. Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε $AB = AD = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\Delta = 60^\circ$

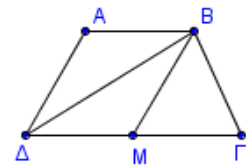
και M το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) η ΔB είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

(Μονάδες 9)

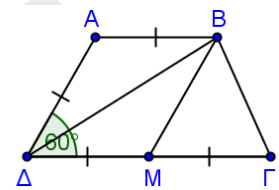
β) η BM χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

(Μονάδες 16)



Λύση

α) Είναι $\angle M\Delta B = \angle A\Delta B$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$. Επειδή $AB = AD$ το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Delta$, άρα $\angle A\Delta B = \angle A\Delta B$ (2). Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\angle M\Delta B = \angle A\Delta B$, άρα η ΔB είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .



β) Είναι $\Delta M = \frac{\Delta\Gamma}{2} = AB$ και $\Delta M \parallel AB$, αφού $\Delta\Gamma \parallel AB$, άρα το τετράπλευρο $A\Delta MB$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Όμως $AB = AD$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο $A\Delta MB$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος. Επειδή το $A\Delta MB$ είναι ρόμβος, ισχύει ότι $BM = \Delta M$, όμως $\Delta M = M\Gamma$, άρα $BM = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

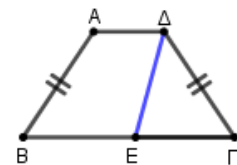
Είναι $\angle BM\Gamma = \Delta = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AD, BM που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$. Επειδή το ισοσκελές τρίγωνο $BM\Gamma$ έχει μια γωνία του ίση με 60° , είναι ισόπλευρο.

13497. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($A\Delta \parallel B\Gamma$) με $B\Gamma > \Delta\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι η ΔE είναι διχοτόμος της $A\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $\angle A = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

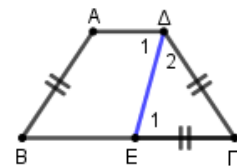


(Μονάδες 13)

Λύση

α) Επειδή $\Gamma\Delta = \Gamma E$ το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την ΔE , άρα $\angle \Delta_2 = \angle E_1$ (1).

Είναι $\angle \Delta_1 = \angle E_1$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Delta, B\Gamma$ που τέμνονται από την ΔE . Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\angle \Delta_1 = \angle \Delta_2$, οπότε η ΔE είναι διχοτόμος της $A\Delta\Gamma$.



β) Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο ισχύει ότι $\angle \Delta = \angle A = 120^\circ$. Τότε $\angle \Delta_2 = \frac{\angle \Delta}{2} = 60^\circ$, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ έχει μία γωνία του 60° , οπότε είναι ισόπλευρο.

13824. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Αν E και Z τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και BE αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της AB και της προέκτασης της ΓZ , να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΓEZ , ΘBZ είναι ίσα.

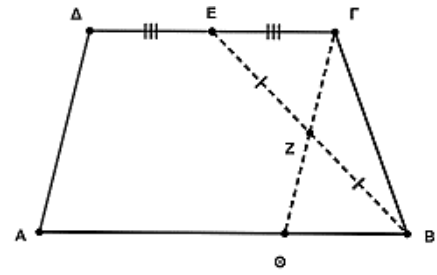
(Μονάδες 13)

β) $E\Gamma = \Theta B$.

(Μονάδες 5)

γ) Το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΓEZ και ΘZB τα οποία έχουν:

- $EZ = ZB$ (από υπόθεση)

- $\angle ZEG = \angle ZB\Theta$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΓE και ΘB που τέμνονται από την BE)

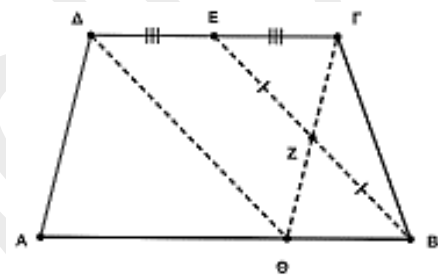
- $\angle EZ\Gamma = \angle BZ\Theta$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΓEZ και ΘZB έχουμε ότι

$E\Gamma = \Theta B$ ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle EZ\Gamma = \angle BZ\Theta$, πλευρές.

γ) $\Delta E \parallel B\Theta$ ως τμήματα των βάσεων $\Gamma\Delta$ και AB του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$. Από το ερώτημα β) έχουμε $E\Gamma = B\Theta$, επίσης E μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$ άρα $E\Gamma = \Delta E$ οπότε $B\Theta = \Delta E$, επομένως το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΔE και ΘB , παράλληλες και ίσες.

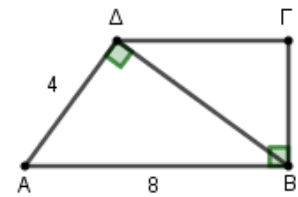


13828. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η διαγώνιος $B\Delta$ είναι κάθετη στην πλευρά $A\Delta$ και η πλευρά ΓB κάθετη στη βάση AB . Αν $A\Delta = 4$ και $AB = 8$ τότε: α) Να υπολογιστεί η γωνία ΔAB .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος $B\Delta$ του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ είναι διπλάσια της πλευράς του $B\Gamma$.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η υποτείνουσα AB είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς $A\Delta$ άρα η οξεία γωνία ΔBA ισούται με 30° δηλαδή $\Delta BA = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε $\Delta AB + \Delta + \Delta BA = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta AB = 60^\circ$.

β) Οι βάσεις AB και $\Delta\Gamma$ του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ είναι κάθετες στην $B\Gamma$ άρα το τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο στο Γ . Οι γωνίες $AB\Delta$ και $B\Delta\Gamma$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$, άρα $AB\Delta = B\Delta\Gamma = 30^\circ$.

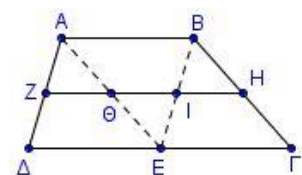
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ η κάθετη πλευρά $B\Gamma$ βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία 30° άρα ισούται με το μισό της υποτείνουσας $B\Delta$, δηλαδή $B\Gamma = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow B\Delta = 2B\Gamma$.

4^ο Θέμα

1711. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $\Gamma\Delta = 2AB$. Επίσης Z, H, E είναι τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Ακόμη η ZH τέμνει τις AE, BE στα σημεία Θ, I αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)



β) Να δείξετε ότι τα σημεία Θ, Ι είναι μέσα των ΑΕ, ΒΕ αντίστοιχα.

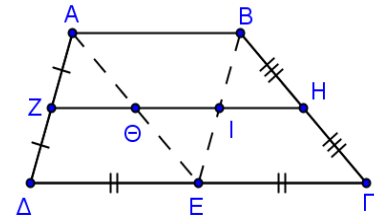
(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2}AB$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Επειδή $\Gamma\Delta = 2AB$ και Ε μέσο του $\Gamma\Delta$, είναι $AB = \Delta E = E\Gamma$.
Επίσης $AB \parallel \Gamma E$ αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$, άρα το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



β) Επειδή η ΖΗ είναι διάμεσος του τραπέζιου είναι παράλληλη στις βάσεις ΑΒ και ΓΔ.

Στο τρίγωνο ΑΔΕ, το Ζ είναι μέσο της ΑΔ και $Z\Theta \parallel \Delta E$, άρα το Θ είναι μέσο του ΑΕ.

Στο τρίγωνο ΒΕΓ το Η είναι μέσο της ΒΓ και $I\Gamma \parallel E\Gamma$, άρα το Ι είναι μέσο του ΒΕ.

γ) Επειδή η ΖΗ είναι διάμεσος του τραπέζιου, ισχύει ότι: $ZH = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{AB + 2AB}{2} = \frac{3}{2}AB$

1715. Δίνεται ευθεία (ε) και δύο σημεία Α, Β εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Φέρουμε ΑΔ, ΒΓ κάθετες στην (ε) και Μ, Ν μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα.

α) Αν τα Α, Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)

i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

1) $AD < BG$

(Μονάδες 4)

2) $AD = BG$.

(Μονάδες 4)

ii. να εκφράσετε το τμήμα ΜΝ σε σχέση με τα τμήματα ΑΔ, ΒΓ στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

(Μονάδες 6)

β) Αν η (ε) τέμνει το τμήμα ΑΒ στο μέσο του Μ, να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα Μ, Ν ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9+2)

Λύση

α) i. Επειδή $AD \perp \epsilon$ και $B\Gamma \perp \epsilon$, είναι $AD \parallel B\Gamma$.

1) Αν $AD < B\Gamma$, τότε οι ΑΒ, ΓΔ δεν είναι παράλληλες γιατί αν ήταν, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα ήταν ορθογώνιο και οι απέναντι πλευρές του ΑΔ, ΒΓ θα ήταν ίσες, που δεν ισχύει.

Άρα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

2) Αν $AD = B\Gamma$, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει δύο

απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και επειδή $\Delta = 90^\circ$, είναι ορθογώνιο.

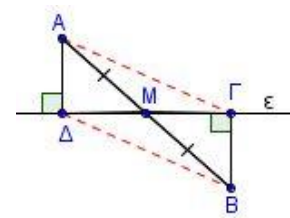
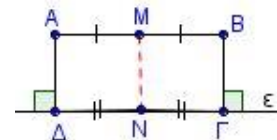
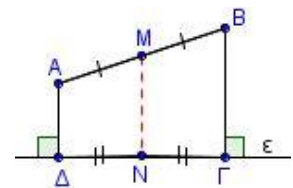
ii. Όταν το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο, τότε το ΜΝ είναι διάμεσός του και είναι:

$$MN = \frac{AD + B\Gamma}{2}.$$

Όταν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τότε και τα ΑΜΝΔ, ΜΝΓΒ θα είναι ορθογώνια και τότε

$$MN = AD = B\Gamma.$$

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ έχουν τις πλευρές ΑΜ και ΜΒ ίσες και τις γωνίες ΑΜΔ και ΜΒΓ ίσες ως κατακορυφήν. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε και $AD = B\Gamma$. Τότε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ θα είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

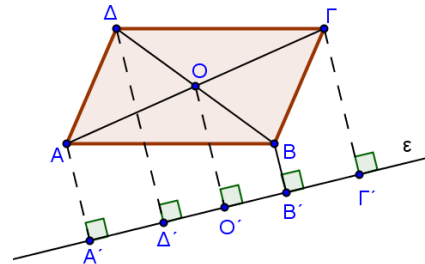


1718. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τις προβολές A' , B' , Γ' , Δ' των κορυφών του A, B, Γ, Δ αντίστοιχα σε μια ευθεία ε .

α) Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιέπιπεδο και είναι $AA' = 3$, $BB' = 2$, $\Gamma\Gamma' = 5$, τότε:

- Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$. (Μονάδες 9)

β) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



Λύση

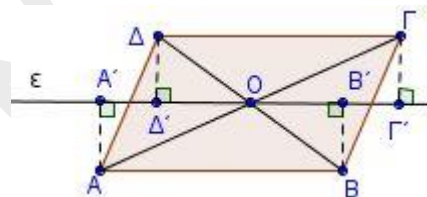
α) Είναι $AA' \perp \varepsilon$, $BB' \perp \varepsilon$, $\Gamma\Gamma' \perp \varepsilon$, $\Delta\Delta' \perp \varepsilon$ και $OO' \perp \varepsilon$, άρα τα τμήματα AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$, OO' είναι παράλληλα.

Αν η ε ήταν παράλληλη στην $A\Gamma$, τότε το $AA'\Gamma'\Gamma'$ θα ήταν ορθογώνιο και οι απέναντι πλευρές του AA' και $\Gamma\Gamma'$ θα ήταν ίσες, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η ε δεν είναι παράλληλη στην $A\Gamma$.

i. Στο τραπέζιο $AA'\Gamma'\Gamma'$ το OO' είναι διάμεσος, άρα $OO' = \frac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$.

ii. Στο τραπέζιο $BB'\Delta'\Delta$ το OO' είναι διάμεσος, άρα $OO' = \frac{BB' + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{2 + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow \Delta\Delta' = 6$

β) Αν η ε είναι παράλληλη στις $\Gamma\Delta$ και AB και διέρχεται από το κέντρο O , τότε η ε θα είναι μεσοπαράλληλη των $AB, \Gamma\Delta$, τα τετράπλευρα $AA'B'B$ και $\Delta\Delta'\Gamma'\Gamma'$ είναι ίσα ορθογώνια και οι αποστάσεις AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$ είναι ίσες.



1722. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε

$\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA .

Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα. (Μονάδες 6)
- Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $Z\Gamma$. (Μονάδες 6)
- Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $BE\Delta$ έχουν:

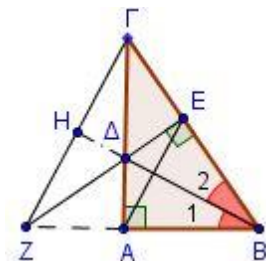
- τη πλευρά $B\Delta$ κοινή και
- $\angle B_1 = \angle B_2$ γιατί η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της B

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε είναι $AB = BE$ και το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ έχουν:

- $AB = BE$ και
- τη γωνία B κοινή

Άρα τα δύο τρίγωνα μια κάθετη τους πλευρά ίση και την οξεία γωνία που περιέχεται μεταξύ αυτής της κάθετης και της υποτείνουσας ίση, οπότε είναι ίσα.



γ) $BA = BE$ και $\Delta A = \Delta E$ (Δ σημείο της διχοτόμου $B\Delta$). Άρα η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AE . Επειδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα είναι και $B\Gamma = BZ$, οπότε το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές. Το τμήμα

ΒΗ είναι διχοτόμος στο τρίγωνο ΒΓΖ που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι ύψος και διάμεσός του, δηλαδή η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΓΖ.

δ) Επειδή $AE \perp BD$ και $GZ \perp BD$, είναι $AE \parallel GZ$ (1)

Είναι $BG = BZ$ και $BE = AB$ άρα και $BG - BE = BZ - AB \Leftrightarrow EG = AZ$ (2)

Επειδή οι ευθείες ΓΕ και ΑΖ τέμνονται στο Β, από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1727. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $A = \Delta = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $B = 3\Gamma$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma = 45^\circ$

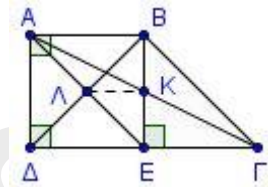
(Μονάδες 8)

β) $BD = AE$

(Μονάδες 9)

γ) $KL = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Επειδή οι γωνίες Β,Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, είναι παραπληρωματικές. Δηλαδή $B + \Gamma = 180^\circ$, όμως $B = 3\Gamma$ άρα $3\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 4\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 45^\circ$.

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο. Οι ΑΕ, ΒΔ είναι διαγωνίες του ορθογωνίου, οπότε είναι ίσες.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ έχουμε:

$EB\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow EB\Gamma + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow EB\Gamma = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ έχει δύο γωνίες ίσες και είναι ισοσκελές. Άρα $BE = EG$. Όμως $AB = DE = \frac{1}{2}\Delta\Gamma$, οπότε και $EG = \frac{1}{2}\Delta\Gamma = AB$. Στο τρίγωνο ΑΕΓ τα Λ,Κ

είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $KL = \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\Delta\Gamma = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$.

1736. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με τη γωνία Γ ίση με

30° και έστω Κ,Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτείνόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = 2AE$

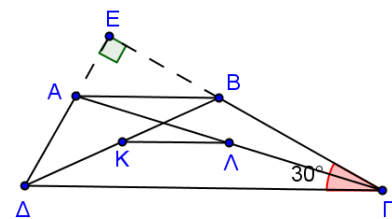
(Μονάδες 10)

β) $KL = A\Delta$

(Μονάδες 10)

γ) Σε ποια περίπτωση το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο;

Να αιτιολογήσετε τη απάντησή σας. (Μονάδες 5)



Λύση

α) Είναι $ABE = \Gamma = 30^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΒ είναι $ABE = 30^\circ$, άρα $AE = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2AE$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΔΓ είναι $\Gamma = 30^\circ$, άρα $E\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2E\Delta$.

Επειδή τα Κ,Λ είναι μέσα των διαγωνίων του τραπέζιου, ισχύει ότι:

$$ΚΛ = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} = \frac{2\Delta E - 2EA}{2} = \frac{2(\Delta E - EA)}{2} = \Delta\Delta$$

γ) Για να είναι το ΑΒΛΚ παραλληλόγραμμο πρέπει οι πλευρές του ΚΛ και ΑΒ να είναι ίσες και παράλληλες. Όμως $ΚΛ \parallel ΑΒ \parallel \Gamma\Delta$ γιατί η ΚΛ ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τραπέζιου και

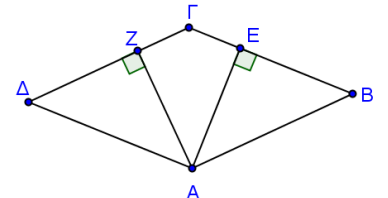
$$ΚΛ = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} = \Delta\Delta, \text{ οπότε πρέπει } \Delta\Delta = AB \text{ ή } \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} = AB \Leftrightarrow \Gamma\Delta - AB = 2AB \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 3AB.$$

1742. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με $B \neq 60^\circ$. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΖΕ. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΝΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ έχουν:

- 1) $AB = \Delta\Delta$ γιατί είναι πλευρές του ρόμβου και
 - 2) $\Delta = B$ γιατί είναι απέναντι γωνίες του ρόμβου.
- Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν $AZ = AE$ και το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή $\Gamma\Delta = \Gamma B$ και $Z\Delta = EB$ ($\triangle AZ\Delta = \triangle AEB$), είναι και

$\Gamma Z = \Gamma E$. Επειδή $AZ = AE$ και $\Gamma Z = \Gamma E$, τα σημεία Α, Γ ισαπέχουν από τα Ζ, Ε, άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΖΕ. Δηλαδή η ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΖΕ.

γ) Επειδή τα Μ, Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΒ, ισχύει ότι $MN \parallel B\Delta$.

Όμως $A\Gamma \perp B\Delta$ γιατί οι διαγωνίες του ρόμβου είναι κάθετες και $ZE \perp A\Gamma$, άρα $ZE \parallel B\Delta$, άρα και $ZE \parallel MN$. Αν $B = 60^\circ$, τότε στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΖΑ είναι $\angle EAB = \angle ZAD = 30^\circ$.

Είναι $A + B = 180^\circ$ επειδή είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ, άρα $A = 120^\circ$, οπότε $\angle EAZ = 120^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ και επειδή $AZ = AE$, το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.

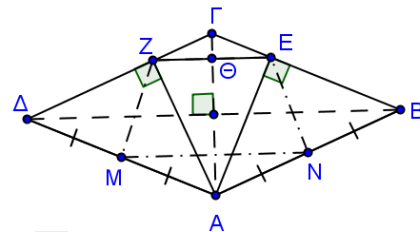
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ το ΕΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$EN = NB = NA = \frac{AB}{2}. \text{ Το τρίγωνο ΑΕΝ είναι ισοσκελές και έχει } \angle AEN = \angle EAN = 30^\circ.$$

Τότε $\angle ZEN = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$. Όμοια $ZM = MA = M\Delta = \frac{A\Delta}{2}$, $\angle MZE = 90^\circ$ και επειδή $ZE \parallel MN$, θα είναι $ZM \parallel EN$.

Άρα όταν $B \neq 60^\circ$, τότε οι ΖΜ και ΕΝ δεν είναι παράλληλες και το τετράπλευρο ΖΜΝΕ είναι τραπέζιο.

Επειδή $ZM = \frac{A\Delta}{2} = \frac{AB}{2} = EN$, το τραπέζιο είναι ισοσκελές.



1747. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του E και τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$ (Μονάδες 8)

β) Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσον του τόξου AB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου. (Μονάδες 9)

Λύση

α) i. Είναι $\varepsilon_1 \perp AB$ και $\varepsilon_2 \perp AB$, άρα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

Έστω ότι οι ευθείες $\Gamma\Delta, AB$ είναι παράλληλες. Τότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ θα έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και μία ορθή γωνία, οπότε θα είναι ορθογώνιο.

Τότε επειδή $OE \perp B\Gamma$ και $OE = OA = OB = R$, τα τετράπλευρα $AOE\Delta$ και $EOB\Gamma$ θα είναι τετράγωνα, οπότε τα τόξα AE και EB θα είναι ίσα, δηλαδή το E θα είναι μέσο του τόξου AB που δεν ισχύει. Άρα στη περίπτωση που το E δεν είναι μέσο του τόξου AB , οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται, οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

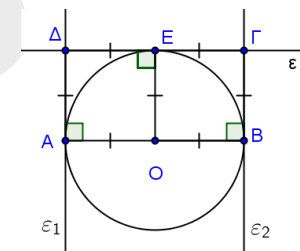
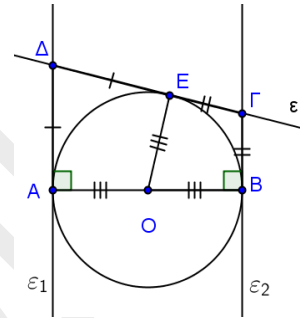
ii. Επειδή τα εφαπτόμενα μέρη που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν, είναι μεταξύ τους ίσα, ισχύει ότι $\Delta A = \Delta E$ και $\Gamma E = \Gamma B$. Είναι $\Gamma\Delta = \Gamma E + E\Delta = \Gamma B + A\Delta$

β) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο από προηγούμενως. Επειδή τα $AOE\Delta$ και $EOB\Gamma$ είναι ίσα τετράγωνα, ισχύει ότι:

$$OE = OA = A\Delta = \Delta E = E\Gamma = \Gamma B = OB = R.$$

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι

$$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + A\Delta = 2R + R + 2R + R = 6R$$



1755. Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $AB = A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ . (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $ABE\Delta$ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον είναι $\angle B\Delta\Delta = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο O , να

υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $EOB\Gamma$. (Μονάδες 8)

Λύση

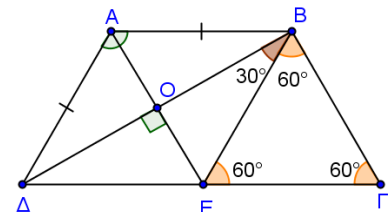
α) Επειδή $AB = A\Delta$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές και οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του $B\Delta$ είναι ίσες. Δηλαδή $\angle A\Delta B = \angle A\Delta B$.

Όμως $\angle A\Delta B = \angle B\Delta E$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$, άρα $\angle A\Delta B = \angle B\Delta E$, επομένως η $B\Delta$ διχοτομεί τη γωνία Δ .

β) Αρχικά πρέπει το $ABE\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. Από το B φέρουμε παράλληλη στην $A\Delta$. Το σημείο τομής της με την $\Gamma\Delta$ είναι το E , γιατί το τετράπλευρο $ABE\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και δύο διαδοχικές πλευρές του, τις $AB, A\Delta$, ίσες οπότε είναι ρόμβος.

γ) $\angle BOE = 90^\circ$ (Οι διαγώνιες του ρόμβου τέμνονται κάθετα)

Είναι $\angle B\Delta\Delta = \angle A\Delta\Gamma = 120^\circ$ γιατί βρίσκονται στη βάση AB του ισοσκελούς τραπέζιου.



Οι γωνίες $AB\Gamma$ και $B\Gamma E$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από τη $B\Gamma$, οπότε είναι παραπληρωματικές. Είναι $AB\Gamma + B\Gamma E = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 60^\circ$.

Επειδή $B\Gamma = BE = A\Delta$ και $\Gamma = 60^\circ$, το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισόπλευρο, άρα $\angle BE\Gamma = \angle B\Gamma E = 60^\circ$.

Είναι $\angle ABE = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ και επειδή η BE είναι διαγώνιος του ρόμβου, διχοτομεί τη γωνία ABE .

Άρα $\angle OBE = 30^\circ$ και τότε $\angle OBG = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου OBE έχουμε:

$$\angle OEB + \angle OBE = 90^\circ \Leftrightarrow \angle OEB + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \angle OEB = 60^\circ \text{ και } \angle OEG = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ.$$

1757. Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $A = \Delta = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$. Επιπλέον φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Αν K, Λ είναι τα μέσα των BE και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος BK . (Μονάδες 9)

Λύση

α) Το τετράπλευρο $ABE\Delta$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.

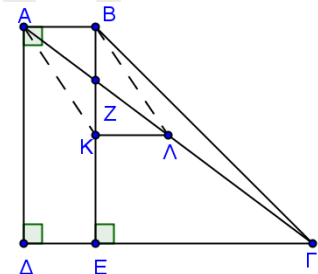
β) Είναι $\Delta E = AB$ και $A\Delta = BE$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $ABE\Delta$. Όμως $\Delta\Gamma = 4AB$, άρα $E\Gamma = 3AB$ και

$AB = \frac{1}{3}A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = 3AB = BE$, άρα $BE = E\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ) Επειδή τα K, Λ είναι μέσα των διαγωνίων του τραpezίου $AE\Gamma B$, ισχύει ότι

$$K\Lambda = \frac{E\Gamma - AB}{2} = \frac{3AB - AB}{2} = AB.$$

Όμως είναι και $K\Lambda \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$, άρα το τετράπλευρο $AK\Lambda B$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Οι $A\Lambda, BK$ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου και διχοτομούνται, άρα η $A\Gamma$ τέμνει το τμήμα BK στο μέσον του.



1758. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του E , η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

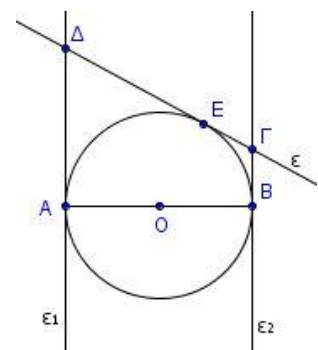
α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

(Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ανάλογα με τη θέση του σημείου E στο ημικύκλιο AB . (Μονάδες 7)



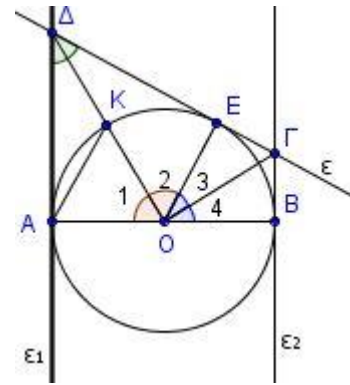
Λύση

α) Επειδή τα $\Gamma E, \Gamma B$ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Γ προς το κύκλο, είναι μεταξύ τους ίσα. Όμοια τα τμήματα $A\Delta$ και ΔE είναι ίσα. Άρα $\Gamma\Delta = \Gamma E + E\Delta = B\Gamma + A\Delta$

β) Επειδή η διακεντρική ευθεία ΔΟ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων που καταλήγουν στα σημεία επαφής, η ΔΟ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΟΕ, άρα $O_1 = O_2 = \omega$ και η ΓΟ είναι διχοτόμος της γωνίας ΕΟΒ, άρα $O_3 = O_4 = \varphi$. Είναι

$$O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega + 2\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \omega + \varphi = 90^\circ$$

Άρα $\Gamma O \Delta = \omega + \varphi = 90^\circ$.



γ) Επειδή τα ΑΔ, ΒΓ είναι εφαπτομένες του κύκλου είναι κάθετες στην ΑΒ, οπότε είναι μεταξύ του παράλληλες.

- Αν το σημείο Ε δεν είναι μέσο του ημικυκλίου ΑΒ τότε οι ΓΔ και ΑΒ δεν είναι παράλληλες οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

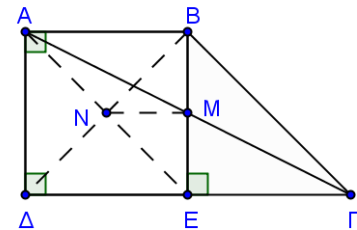
- Αν το Ε είναι μέσο του ημικυκλίου ΑΒ, τότε $\angle BOE = 90^\circ$ (επίκεντρη γωνία που βαίνει σε τεταρτοκύκλιο) και $EG \perp OE$, άρα $EG \parallel AB$. Οπότε ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και αφού έχει μια ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

1767. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\angle A = \angle \Delta = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $B = 3\Gamma$.

Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Μ. Φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο σημείο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Gamma = 45^\circ$ (Μονάδες 7)
 β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
 γ) $AE \perp BD$ (Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή οι γωνίες Β, Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, είναι παραπληρωματικές. Δηλαδή $B + \Gamma = 180^\circ$, όμως $B = 3\Gamma$ άρα $3\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 4\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 45^\circ$.

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο, άρα $AB = DE$. Όμως $\Delta\Gamma = 2AB$, άρα $EG = AB$. Επειδή τα τμήματα ΑΒ και ΓΕ είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ έχουμε:

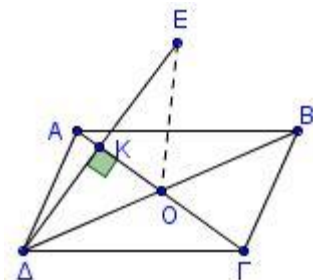
$$\angle EBG + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \angle EBG + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \angle EBG = 45^\circ, \text{ οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ έχει δύο γωνίες ίσες και είναι}$$

ισοσκελές. Άρα $BE = EG$. Όμως $AB = DE = \frac{1}{2}\Gamma\Delta$, οπότε και $EG = \frac{1}{2}\Gamma\Delta = AB$.

Επειδή $EG = BE = AE = \Delta\Delta = AB$, το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι τετράγωνο. Τα ΑΕ, ΒΔ είναι διαγώνιοι του τετραγώνου, οπότε είναι κάθετα.

1770. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΚ κάθετο στην ΑΓ και στην προέκτασή του προς το Κ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε $KE = DK$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $EO = \frac{BD}{2}$ (Μονάδες 8)
 β) $\angle EOB = 90^\circ$ (Μονάδες 8)
 γ) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΔΟΕ το ΟΚ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα

$$EO = OD = \frac{BD}{2}.$$

β) Στο τρίγωνο ΔΕΒ είναι $EO = \frac{BD}{2}$, δηλαδή μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\angle EDB = 90^\circ$.

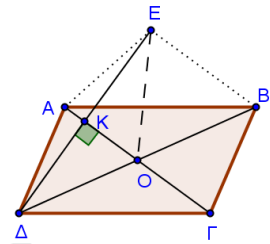
γ) Είναι $EB \perp DE$ και $GA \perp DE$, άρα $EB \parallel AG$ (1).

Στο τρίγωνο ΑΔΕ το ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ισχύει ότι

$AE = AD$. Όμως $AD = BG$, άρα $AE = BG$ (2).

Η ΑΕ τέμνει την ΑΒ, οπότε θα τέμνει και κάθε παράλληλη προς αυτή, άρα και την ΒΓ (3).

Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



1778. Δίνεται ορθή γωνία $\angle xOy = 90^\circ$ και Α,Β σημεία των ημιευθειών Ογ,Οx με $OA = OB$. Η ευθεία (ε) διέρχεται από το Ο και αφήνει τις ημιευθείες Οx, Ογ στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο Α στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο Β στην (ε) την τέμνει στο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΕ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

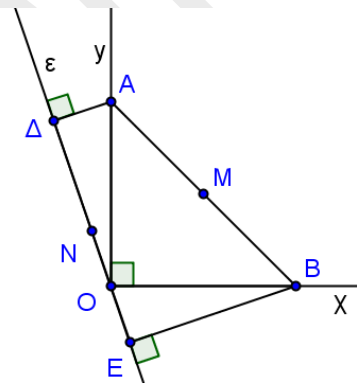
β) $AD + BE = DE$ (Μονάδες 7)

γ) $MN = \frac{DE}{2}$, όπου ΜΝ το ευθύγραμμο τμήμα που

ενώνει τα μέσα των ΔΕ και ΑΒ. (Μονάδες 7)

δ) Το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 4)



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΕ έχουν:

1) $OA = OB$ και 2) $\angle AOD = \angle BOE$ γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΕ είναι ίσα, ισχύει ότι

$AD = OE$ και $OD = BE$. Είναι $AD + BE = OE + OD = DE$.

γ) Είναι $AD \perp \varepsilon$ και $BE \perp \varepsilon$, άρα $AD \parallel BE$.

Αν $\varepsilon \parallel AB$, τότε το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ορθογώνιο και $AD = MN = BE$,

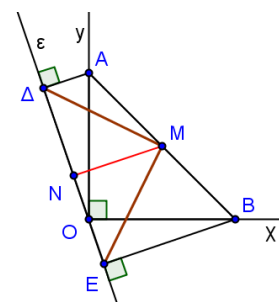
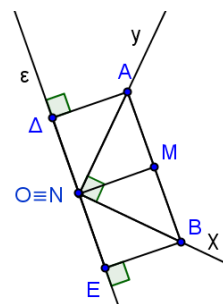
$$\text{οπότε } \frac{AD + BE}{2} = \frac{MN + MN}{2} = \frac{2MN}{2} = MN$$

Αν η ε δεν είναι παράλληλη στο ΑΒ, τότε το τμήμα ΜΝ είναι διάμεσος του τραπέζιου ΑΔΕΒ και ισχύει

$$\text{ότι: } MN = \frac{AD + BE}{2} = \frac{DE}{2}$$

δ) Είναι $DN = NE = MN = \frac{DE}{2}$, δηλαδή στο τρίγωνο ΔΜΕ μια διάμεσός του

ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα αυτή τη πλευρά, δηλαδή



$\angle ME = 90^\circ$. Επειδή $MN \parallel AD$, είναι $MN \perp DE$, οπότε το τμήμα MN είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο $\triangle ME$, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

1783. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ ισχύει ότι $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$. Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει τη $B\Gamma$ στο E και την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\triangle AZ$ είναι ισοσκελές.

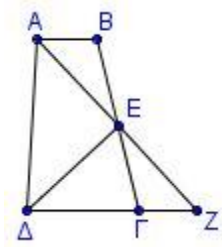
(Μονάδες 7)

β) Το E είναι το μέσο της $B\Gamma$.

(Μονάδες 10)

γ) Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραpezίου.

(Μονάδες 8)



Λύση

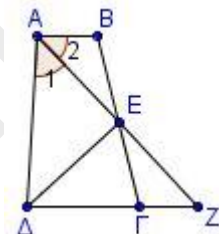
α) Είναι $A_2 = Z$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την AZ και $A_2 = A_1$ γιατί η AZ είναι διχοτόμος της γωνίας A , άρα $A_1 = Z$, οπότε το τρίγωνο $\triangle AZ$ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο $\triangle AZ$ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $A\Delta = \Delta Z$. και $\Delta Z = \Gamma Z + \Gamma\Delta$, άρα $AB = \Gamma Z$. Τα τρίγωνα $\triangle ABE$ και $\triangle \Gamma Z$ έχουν:

1) $AB = \Gamma Z$

2) $A_2 = Z$ και

3) $B = \Gamma Z$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$.



Με βάση το κριτήριο $\Gamma\Pi\Gamma$, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε είναι και $BE = \Gamma E$, δηλαδή το E είναι το μέσο της $B\Gamma$.

γ) Επειδή τα τρίγωνα $\triangle ABE$ και $\triangle \Gamma Z$ είναι ίσα έχουν και $AE = EZ$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AZ$, το ΔE είναι διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος του τριγώνου.

1784. Δίνεται τραπέζιο $A\Delta EB$, με $A\Delta \parallel BE$, στο οποίο ισχύει ότι $AB = A\Delta + BE$, και O το μέσον της ΔE . Θεωρούμε σημείο Z στην AB τέτοιο ώστε $AZ = A\Delta$ και $BZ = BE$. Αν γωνία $\angle AZ\Delta = \varphi$,

α) να εκφράσετε τη γωνία $\angle AZ\Delta$ σε συνάρτηση με τη φ .

(Μονάδες 8)

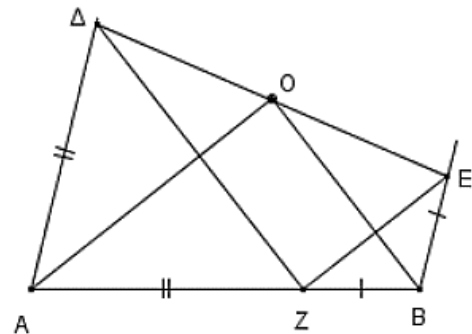
β) να εκφράσετε τη γωνία $\angle EZB$ σε συνάρτηση με τη φ .

(Μονάδες 8)

γ) να αποδείξετε ότι οι OA και OB είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔZ και ZE αντίστοιχα.

(Μονάδες 9)

Λύση



α) Επειδή $A\Delta = AB$ το τρίγωνο $\triangle A\Delta Z$ είναι ισοσκελές με βάση την ΔZ , οπότε $\angle AZ\Delta = \angle A\Delta Z$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\triangle A\Delta Z$ έχουμε:

$$\angle AZ\Delta + \angle AZ\Delta + \angle A\Delta Z = 180^\circ \Leftrightarrow \varphi + 2\angle A\Delta Z = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle A\Delta Z = 180^\circ - \varphi \Leftrightarrow \angle A\Delta Z = \frac{180^\circ - \varphi}{2}$$

β) Οι γωνίες $\angle AZ\Delta$ και $\angle ZBE$ είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A\Delta, BE$ που τέμνονται από την AB , οπότε $\angle ZBE + \angle AZ\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \angle ZBE = 180^\circ - \varphi$.

Επειδή $BZ = BE$ το τρίγωνο $\triangle BZE$ είναι ισοσκελές με βάση την ZE , οπότε $\angle BZE = \angle BEZ$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\triangle BZE$ έχουμε:

$$\angle ZBE + \angle EZB + \angle BEZ = 180^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - \varphi + 2\widehat{EZB} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{EZB} = \frac{\varphi}{2}.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } \angle ZE = 180^\circ - \angle ZA - \angle EZB = \frac{180^\circ - \varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \frac{180^\circ - \cancel{\varphi} + \cancel{\varphi}}{2} = 90^\circ.$$

Η ΖΟ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΖΕ, οπότε

$$ZO = \frac{\Delta E}{2} = \Delta O = OE.$$

Τα σημεία Ο, Α ισαπέχουν από τα Δ, Ζ άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΔΖ. Τα σημεία Ο, Β ισαπέχουν από τα Ζ, Ε, οπότε ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΖΕ. Άρα οι ΟΑ και ΟΒ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα.

1786. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2BG$ και τη γωνία Β αμβλεία. Από την κορυφή Α φέρουμε την ΑΕ κάθετη στην ευθεία ΒΓ και έστω Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

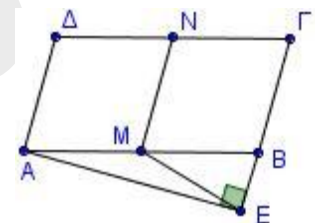
γ) Η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΕΓ. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Επειδή τα ΜΒ και ΝΓ είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΓΔ του παραλληλογράμμου, είναι μεταξύ τους ίσα και παράλληλα, οπότε το ΜΒΓΝ

είναι παραλληλόγραμμο. Είναι $MB = \frac{AB}{2} = \frac{2BG}{2} = BG$, οπότε το

παραλληλόγραμμο ΜΒΓΝ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.



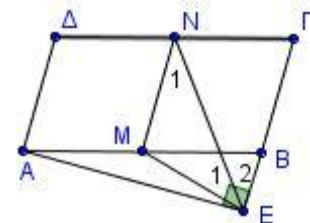
β) Αρχικά είναι $MN \parallel EG$ (1) αφού $MN \parallel BG$.

Η ΕΜ τέμνει την ΑΒ, οπότε θα τέμνει και κάθε παράλληλη προς αυτή, άρα θα τέμνει και την ΓΝ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ η ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$EM = \frac{AB}{2} = \frac{GN}{2} = GN \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



γ) Είναι $EM = \frac{AB}{2} = MB = MN$, οπότε το τρίγωνο ΜΕΝ είναι

ισοσκελές και έχει $\angle E_1 = \angle N_1$. Όμως $\angle E_2 = \angle N_1$ ως εντός εναλλάξ των

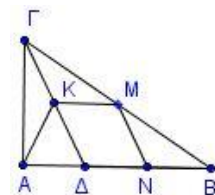
παράλληλων ΜΝ, ΒΓ που τέμνονται από την ΝΕ, άρα $\angle E_1 = \angle E_2$, οπότε η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΕΓ.

1789. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\angle A = 90^\circ$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ, Μ, Ν τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΜΝ είναι ίση με $AB/2$. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Επειδή τα K,M είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΓΔΒ, ισχύει ότι $KM = \parallel \frac{B\Delta}{2}$.

Τα M,N είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΓΔΒ, άρα $MN = \parallel \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Επειδή $KM \parallel \Delta N$ και $MN \parallel K\Delta$, το τετράπλευρο KMNΔ είναι παραλληλόγραμμο.

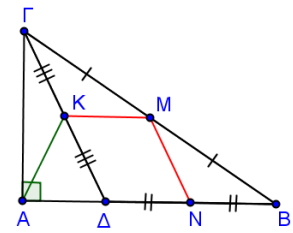
β) Επειδή $KM \parallel \Delta N$ είναι και $KM \parallel AN$ (1).

Η ΑΚ τέμνει την ΚΔ οπότε θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτή, άρα και την MN (2).

Η ΑΚ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα

$$AK = \frac{A\Delta}{2} = K\Delta = MN \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο AKMN είναι ισοσκελές τραπέζιο.



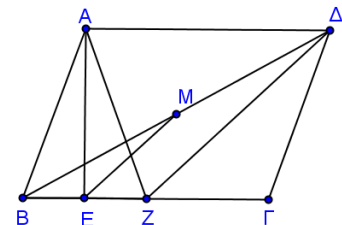
γ) Έστω δ η διάμεσος του τραπέζιου AKMN. Είναι $\delta = \frac{AN + KM}{2} \stackrel{KM = \frac{AB}{2} = NB}{=} \frac{AN + NB}{2} = \frac{AB}{2}$

1790. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη γωνία του Β να είναι ίση με 70° και το ύψος του ΑΕ. Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε $BE = EZ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου ΑΖΓΔ. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι $EM = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 8)



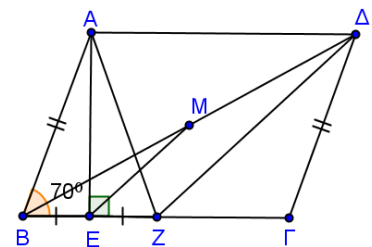
Λύση

α) Στο τρίγωνο ABZ το ΑΕ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα $AB = AZ$. Όμως $AB = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα $\Gamma\Delta = AZ$ (1).

Επειδή $A\Delta \parallel B\Gamma$ είναι και $A\Delta \parallel Z\Gamma$ (2).

Η ευθεία ΑΖ τέμνει την ΑΒ, οπότε θα τέμνει και κάθε παράλληλη προς αυτή, άρα και την ΓΔ (3).

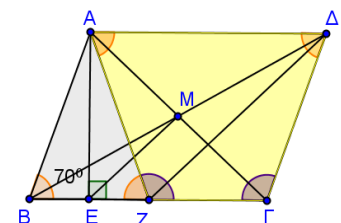
Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



β) Είναι $A\Delta\Gamma = B = 70^\circ$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Επειδή οι γωνίες Β,Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 110^\circ.$$

Επειδή το ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι γωνίες που αντιστοιχούν σε κάθε του βάση είναι ίσες, δηλαδή $AZ\Gamma = \Gamma = 110^\circ$ και $Z\Delta\Delta = \Delta = 70^\circ$



γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ το ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα,

$$\text{άρα } EM = \frac{A\Gamma}{2}.$$

1791. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $\Gamma = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και τη διάμεσό του AM . Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία AM , η οποία την τέμνει στο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.

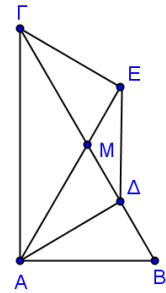
(Μονάδες 8)

β) $ME = MD = \frac{B\Gamma}{4}$.

(Μονάδες 9)

γ) Το $A\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow B = 60^\circ.$$

Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$, άρα

$$AM = MB = MG = \frac{B\Gamma}{2}.$$

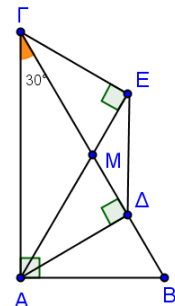
Επειδή $AM = MB$ και $B = 60^\circ$, το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.

β) Το $A\Delta$ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, άρα είναι και διάμεσος,

$$\text{δηλαδή } MD = \frac{MB}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}.$$

Είναι $\angle MGE = \angle AMB = 60^\circ$ ως κατακορυφήν, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο MGE

$$\text{είναι } \angle MGE = 30^\circ, \text{ άρα } ME = \frac{MG}{2} = \frac{B\Gamma}{4}.$$



γ) Είναι $\angle EMD = 180^\circ - \angle AMB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ και $ME = MD = \frac{B\Gamma}{4}$, άρα το τρίγωνο MDE είναι

ισοσκελές και από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$$\angle MED + \angle MDE + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle MDE = 60^\circ \Leftrightarrow \angle MDE = 30^\circ.$$

Οι γωνίες MDE και Γ είναι εντός εναλλάξ των AG , DE που τέμνονται από τη GD και επειδή είναι ίσες, οι ευθείες AG και DE είναι παράλληλες (1).

Είναι $\angle GED + \angle EDA = 120^\circ + 120^\circ = 240^\circ > 180^\circ$, άρα οι ευθείες AD , GE δεν είναι παράλληλες (2).

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $ADE\Gamma$ είναι τραπέζιο και επειδή $\angle GED = \angle EDA = 120^\circ$ το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

1797. α) Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

β) Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το $AB\Gamma\Delta$ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο;

Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

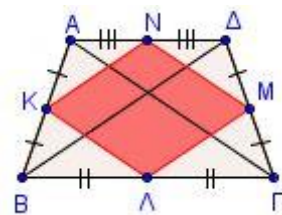
(Μονάδες 12)

Λύση

α) Τα K, Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$.

Τα Λ, M είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$, άρα $\Lambda M = \frac{B\Delta}{2}$.

Τα M, N είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, άρα $MN = \frac{A\Gamma}{2}$.



Τα Κ, Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $KN = \frac{BD}{2}$.

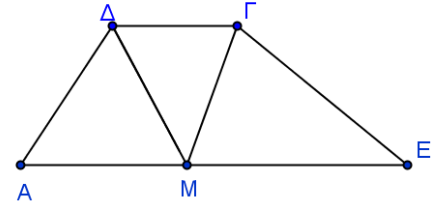
Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι διαγώνιες του ΑΓ, ΒΔ είναι ίσες οπότε $ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΚΝ$ και το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος αφού όλες του οι πλευρές είναι ίσες.

β) Αν το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος, τότε με βάση τα προηγούμενα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει ίσες διαγώνιες. Αυτή η ιδιότητα όμως από μόνη της δεν καθιστά το τετράπλευρο ισοσκελές τραπέζιο.

1815. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και

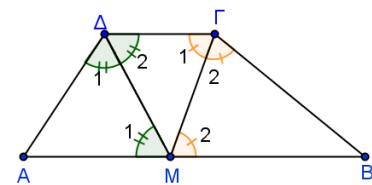
$AB = \Delta\Delta + \text{ΒΓ}$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
 β) Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
 γ) Η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπέζιου. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Είναι $M_1 = \Delta_2$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΜ και $\Delta_1 = \Delta_2$ γιατί η ΔΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ, άρα $M_1 = \Delta_1$. Το τρίγωνο ΑΔΜ έχει δύο γωνίες του ίσες, οπότε είναι ισοσκελές και ισχύει ότι: $\Delta\Delta = \Delta\text{Μ}$.



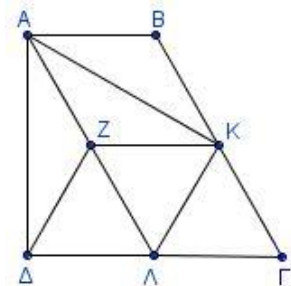
β) Είναι $AB = \Delta\Delta + \text{ΒΓ} \stackrel{\Delta\Delta=\Delta\text{Μ}}{=} \Delta\text{Μ} + \text{ΒΓ}$, όμως $AB = \Delta\text{Μ} + \text{ΜΒ}$, άρα $\text{ΜΒ} = \text{ΒΓ}$, οπότε το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές και έχει $M_2 = \Gamma_2$.

γ) Είναι $M_2 = \Gamma_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΓΜ και επειδή $M_2 = \Gamma_2$ είναι και $\Gamma_1 = \Gamma_2$, άρα η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ.

1821. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ ($\text{Α} = \Delta = 90^\circ$) με

$\text{ΒΓ} = \Gamma\Delta = 2\text{ΑΒ}$ και Κ, Λ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ. Η παράλληλη από το Κ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΔ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\text{ΒΓ} = 2\Delta\text{Ζ}$. (Μονάδες 8)
 β) Το τετράπλευρο ΖΚΓΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)
 γ) $\text{ΑΚΛ} = 90^\circ$. (Μονάδες 8)



Λύση

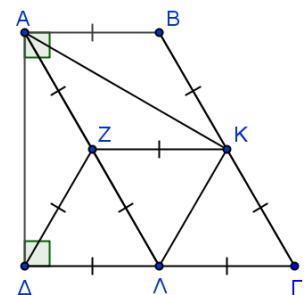
α) Είναι $\Gamma\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{2\text{ΑΒ}}{2} = \text{ΑΒ}$ και $\Gamma\Delta \parallel \text{ΑΒ}$, άρα το τετράπλευρο

ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\text{ΑΛ} = \text{ΒΓ} = \Gamma\Delta = 2\text{ΑΒ}$.

Τα τετράπλευρα ΑΒΚΖ και ΖΚΓΔ είναι παραλληλόγραμμα αφού οι απέναντι πλευρές τους είναι παράλληλες. Άρα $\text{ΒΚ} = \text{ΑΖ}$ και $\text{ΚΓ} = \text{ΖΛ}$, γιατί είναι απέναντι πλευρές στα παραλληλόγραμμα. Όμως $\text{ΒΚ} = \text{ΚΓ}$, άρα και $\text{ΑΖ} = \text{ΖΛ}$, δηλαδή το Ζ είναι μέσο του ΑΛ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΛ η ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

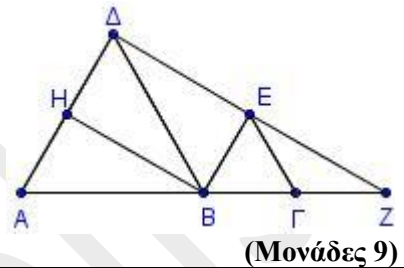
υποτείνουσα, άρα $\Delta\text{Ζ} = \frac{\text{ΑΛ}}{2} \Leftrightarrow \text{ΑΛ} = 2\Delta\text{Ζ} \Leftrightarrow \text{ΒΓ} = 2\Delta\text{Ζ}$.



β) Είναι $ZK = AB = \Lambda\Gamma$, $K\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = AB$, $Z\Lambda = \frac{A\Lambda}{2} = AB$, οπότε το τετράπλευρο $ZK\Gamma\Lambda$ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

γ) Είναι $ZK = Z\Lambda = AZ = \frac{A\Lambda}{2}$, δηλαδή στο τρίγωνο $AK\Lambda$ μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα τη πλευρά αυτή, δηλαδή $\angle K\Lambda A = 90^\circ$.

1829. Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ έτσι ώστε $AB = 2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$. Αν H είναι το μέσο του $A\Delta$ και η ευθεία ΔE τέμνει την (ε) στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι:
 α) Το τετράπλευρο $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)
 β) Το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
 γ) Το τετράπλευρο $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ είναι ισόπλευρα, οι γωνίες τους είναι ίσες με 60° . Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το BH είναι ύψος, άρα είναι διάμεσος και διχοτόμος. Δηλαδή $B_1 = 30^\circ$. Είναι $B_2 = 180^\circ - \angle AB\Delta - B_3 = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, άρα

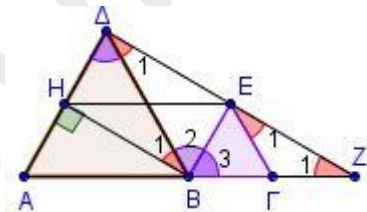
$$\angle HBE = B_1 + B_2 = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

Τα τρίγωνα ΔHB και ΔEB έχουν:

- 1) την πλευρά ΔB κοινή
- 2) $\angle \Delta B H = B_2 = 60^\circ$ και
- 3) $\Delta H = \frac{A\Delta}{2} = \frac{AB}{2} = B\Gamma = BE$

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $\angle E B H = \angle B H \Delta = 90^\circ$.

Το τετράπλευρο $BH\Delta E$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.



β) Επειδή το $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο, είναι $\angle H\Delta E = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \Delta B H + \Delta_1 = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \Delta_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 30^\circ$.

Επειδή $\angle \Delta B A = \angle \Gamma B E = 60^\circ$ και οι γωνίες αυτές είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $\Gamma E, B\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, οι ευθείες $E\Gamma$ και $B\Delta$ είναι παράλληλες.

Είναι $E_1 = \Delta_1 = 30^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $B\Delta, E\Gamma$ που τέμνονται από την ΔE . Η γωνία $E\Gamma Z$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $E\Gamma B$, άρα $\angle E\Gamma Z = \angle B E \Gamma + B_3 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο $E\Gamma Z$, έχουμε

$$\angle Z + E_1 + \angle E\Gamma Z = 180^\circ \Leftrightarrow \angle Z + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle Z = 30^\circ.$$

Επειδή $\angle Z = E_1$ το τρίγωνο $E\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή $\Delta_1 = \angle Z = 30^\circ$, το τρίγωνο $\Delta B Z$ είναι ισοσκελές και το $B E$ είναι διχοτόμος του, άρα είναι και διάμεσος. Δηλαδή το E είναι μέσο του ΔZ .

Τα H, E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $\Delta A Z$, άρα $HE \parallel AZ \Leftrightarrow HE \parallel A\Gamma$ (1)

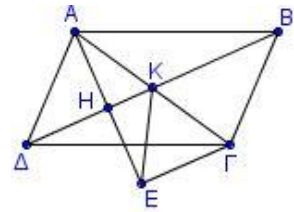
Η $E\Gamma$ τέμνει την $B E$ άρα θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτή, άρα και την AH (2).

$$\text{Είναι } E\Gamma = B\Gamma = \frac{AB}{2} = \frac{A\Delta}{2} = AH \quad (3)$$

Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1830. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και K το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε AH κάθετη στην $B\Delta$ και στην προέκταση της AH (προς το H) θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AH=HE$. Να αποδείξετε ότι:

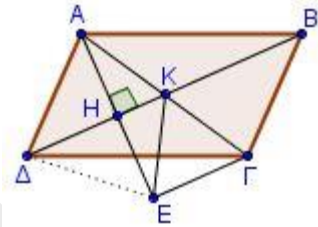
- α) Το τρίγωνο AKE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
 β) Το τρίγωνο AEG είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)
 γ) Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Στο τρίγωνο AKE το KH είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Επειδή $EK = AK = \frac{A\Gamma}{2}$, στο τρίγωνο AEG η διάμεσός του EK ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\angle AEG = 90^\circ$.



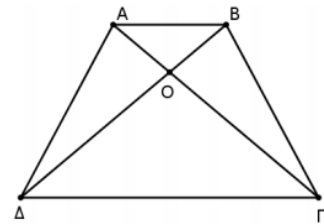
γ) Είναι $HK \perp AE$ και $EG \perp AE$, άρα $HK \parallel EG \Leftrightarrow B\Delta \parallel E\Gamma$ (1).

Στο τρίγωνο $A\Delta E$ το ΔH είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $\Delta E = A\Delta$. Όμως $A\Delta = B\Gamma$, άρα $\Delta E = B\Gamma$ (2).

Η ΔE τέμνει την $A\Delta$, άρα θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτή, άρα και την $B\Gamma$ (3). Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1834. Στο διπλανό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν: $A\Delta = B\Gamma$, $A\Gamma = B\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και ΔOG είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)
 β) Να αποδείξετε ότι $\Delta AB = AB\Gamma$. (Μονάδες 8)
 γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ έχουν:

- 1) $A\Delta = B\Gamma$
- 2) τη πλευρά $\Delta\Gamma$ κοινή και
- 3) $A\Gamma = B\Delta$, οπότε με βάση το κριτήριο ΠΠΠ είναι ίσα και έχουν $\angle O\Delta\Gamma = \angle O\Gamma\Delta$

Επειδή $\angle O\Delta\Gamma = \angle O\Gamma\Delta$ το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές και $O\Delta = O\Gamma$.

Επειδή $A\Gamma = B\Delta$ και $O\Gamma = O\Delta$ είναι και $A\Gamma - O\Gamma = B\Delta - O\Delta \Leftrightarrow OA = OB$, οπότε το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και ΓAB έχουν:

- 1) τη πλευρά AB κοινή
- 2) $A\Delta = B\Gamma$ και
- 3) $A\Gamma = B\Delta$, οπότε με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα και έχουν $\angle A\Delta B = \angle \Gamma AB$.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ έχουμε:

$$\angle A\Delta B + \angle AB\Gamma + \angle A\Delta\Gamma + \angle B\Gamma\Delta = 360^\circ \Leftrightarrow 2\angle A\Delta B + 2\angle A\Delta\Gamma = 360^\circ \Leftrightarrow \angle A\Delta B + \angle A\Delta\Gamma = 180^\circ.$$

Οι γωνίες $\angle A\Delta B$ και $\angle A\Delta\Gamma$ είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $A\Delta$, επειδή είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες $AB, \Gamma\Delta$ είναι παράλληλες (1).

Αν οι $A\Delta, B\Gamma$ ήταν και αυτές παράλληλες τότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ θα ήταν παραλληλόγραμμο και θα είχε $AB = \Gamma\Delta$ που είναι άτοπο. Άρα οι $AB, \Gamma\Delta$ τέμνονται (2).

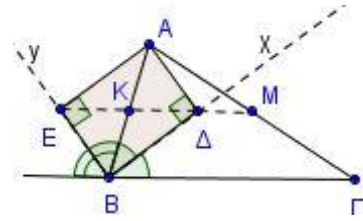
Επειδή $A\Delta = B\Gamma$, από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1838. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος του Bx της γωνίας B του τριγώνου $AB\Gamma$ και η διχοτόμος By της εξωτερικής γωνίας B . Αν Δ και E είναι οι προβολές της κορυφής A του τριγώνου $AB\Gamma$ στην Bx και By αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Delta BE$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) Η ευθεία $E\Delta$ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$ και διέρχεται από το μέσο M της AG . (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου $\alpha = B\Gamma$. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Επειδή οι Bx και By είναι διχοτόμοι των γωνιών B και $B_{\text{εξ}}$, είναι

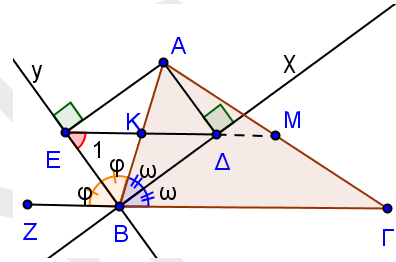
$\Gamma B\Delta = \Delta B A = \omega$ και $A B E = E B Z = \varphi$. Είναι

$$\Gamma B\Delta + \Delta B A + A B E + E B Z = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\omega + \omega + \varphi + \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega + 2\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\omega + \varphi = 90^\circ, \text{ άρα } E B \Delta = \omega + \varphi = 90^\circ.$$

Το τετράπλευρο $A\Delta BE$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.



β) Οι $AB, \Delta E$ είναι διαγώνιες του ορθογώνιου και είναι ίσες, άρα και $KE = KB$ ως μισά των διαγωνίων. Το τρίγωνο KEB είναι ισοσκελές με βάση τη BE , άρα $KEB = KBE = \varphi$, άρα και $KEB = EBZ = \varphi$.

Οι γωνίες όμως KEB και EBZ είναι εντός εναλλάξ των $\Delta E, B\Gamma$ που τέμνονται από την EB , άρα οι $\Delta E, B\Gamma$ είναι παράλληλες. Οι $AB, \Delta E$ είναι διαγώνιες του ορθογώνιου οπότε διχοτομούνται στο K . Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το K είναι μέσο της AB και η ΔE είναι παράλληλη στη $B\Gamma$, άρα η ΔE διέρχεται από το μέσο M της AG .

γ) Επειδή τα K, M είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι $KM \parallel B\Gamma$ (1) και $KM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Επειδή οι $BK, \Gamma M$ τέμνονται στο A , από την (1) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι τραπέζιο. Αν

$$\delta \text{ η διάμεσος του τραpezίου, τότε: } \delta = \frac{KM + B\Gamma}{2} = \frac{\frac{\alpha}{2} + \alpha}{2} = \frac{\frac{3\alpha}{2}}{2} = \frac{3\alpha}{4}.$$

1841. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων AG και BD . Φέρνουμε την AE κάθετη στη διαγώνιο BD . Αν Z είναι το συμμετρικό του A ως προς τη διαγώνιο BD , τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) $Z\Gamma = 2OE$ (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο με κορυφές B, Δ, Z και Γ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

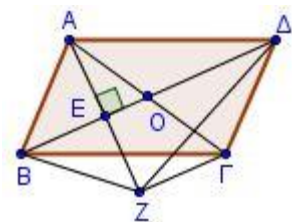
Λύση

α) Το ΔE είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο $A\Delta Z$, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Τα O, E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AZ\Gamma$, άρα

$$EO = \frac{Z\Gamma}{2} \Leftrightarrow Z\Gamma = 2EO.$$

γ) Επειδή τα O, E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AZ\Gamma$, ισχύει ακόμη ότι $OE \parallel Z\Gamma$ άρα και $B\Delta \parallel Z\Gamma$ (1).



Στο τρίγωνο ABZ το BE είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, δηλαδή $BZ = AB$.
 Όμως $AB = \Gamma\Delta$, άρα $BZ = \Gamma\Delta$ (2).
 Η BZ τέμνει την AB, άρα θα τέμνει και κάθε παράλληλη προς αυτή, άρα και την $\Gamma\Delta$ (3).
 Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο BΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1842. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς AB παίρνουμε τμήμα $BE = AB$ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα $\Delta Z = \Delta\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα BΔΓΕ και BΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα.

(Μονάδες 7)

ii. Τα σημεία Ε,Γ και Ζ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 9)

β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των BE και ΔZ αντίστοιχα, τότε $ΚΛ \parallel \Delta B$ και $ΚΛ = \frac{3}{2} \Delta B$.

(Μονάδες 9)

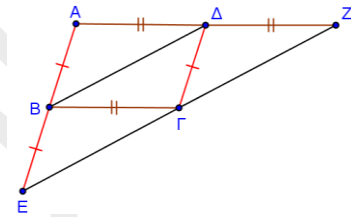
Λύση

α) i. Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$ είναι και $BE \parallel \Gamma\Delta$.

Επιπλέον είναι $BE = AB = \Gamma\Delta$, οπότε στο τετράπλευρο BΔΓΕ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή $\Delta\Delta \parallel B\Gamma$ είναι και $\Delta Z \parallel B\Gamma$.

Επιπλέον είναι $\Delta Z = \Delta\Delta = B\Gamma$, οπότε το τετράπλευρο BΔΖΓ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



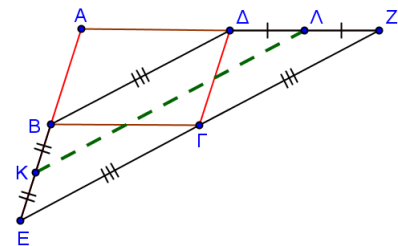
ii. Επειδή το BΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι $E\Gamma \parallel B\Delta$ (1).

Επειδή το BΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι: $\Gamma Z \parallel B\Delta$ (2).

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $E\Gamma \parallel \Gamma Z$, οπότε τα σημεία Ε,Γ,Ζ είναι συνευθειακά.

β) Επειδή οι BE και ΔZ τέμνονται και $B\Delta \parallel EZ$, το τετράπλευρο BΔZE είναι τραπέζιο. Η ΚΛ είναι διάμεσος του τραπεζίου, άρα $ΚΛ \parallel \Delta B$ και

$$ΚΛ = \frac{B\Delta + EZ}{2} = \frac{B\Delta + E\Gamma + \Gamma Z}{2} = \frac{B\Delta + B\Delta + B\Delta}{2} = \frac{3B\Delta}{2}$$



1845. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $B = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρνουμε ΚΖ διχοτόμο της γωνίας ΕΗΑ και ΘΗ κάθετο στο ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ZH = 2ZE$

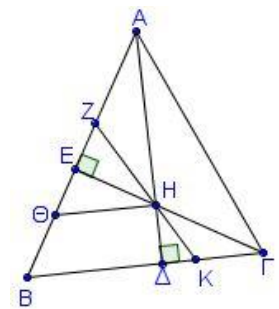
(Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)



Λύση

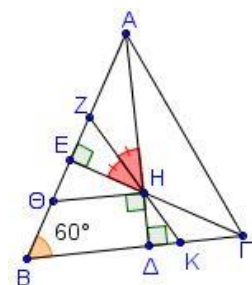
α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ABΔ έχουμε:

$$B\Delta\Delta + B = 90^\circ \Leftrightarrow B\Delta\Delta + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B\Delta\Delta = 30^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τρίγωνο AEH έχουμε:

$$E\Delta\Delta + E\Delta H = 90^\circ \Leftrightarrow E\Delta\Delta + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow E\Delta\Delta = 60^\circ.$$

Επειδή η ΖΗ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΗΕ, είναι $E\Delta Z = 30^\circ$, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο EHZ



ισχύει ότι $EZ = \frac{ZH}{2} \Leftrightarrow ZH = 2EZ$

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΘΗ έχουμε:

$$BA\Delta + A\Theta H = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + A\Theta H = 90^\circ \Leftrightarrow A\Theta H = 60^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου Ε έχουμε:

$$A\Theta H + EH\Theta = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + EH\Theta = 90^\circ \Leftrightarrow EH\Theta = 30^\circ$$

Επειδή $EH\Theta = EHZ = 30^\circ$, η ΗΕ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΘΗΖ και επειδή είναι και ύψος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Όμως $A\Theta H = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΘΗΖ είναι ισόπλευρο.

γ) Είναι $\Theta H \perp A\Delta$ και $BK \perp A\Delta$, οπότε $\Theta H \parallel BK$ (1).

$\Delta HK = AHE = 30^\circ$ ως κατακορυφήν, οπότε από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΗΔΚ

είναι: $\Delta HK + HK\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + HK\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow HK\Delta = 60^\circ$.

Επειδή οι ΗΚ, ΒΘ τέμνονται στο Ζ, το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι τραπέζιο.

Επειδή $HK\Delta = B = 60^\circ$, οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση ΒΚ του τραpezίου είναι ίσες, οπότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

1853. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $B = 2\Gamma$ και

$$AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}. \text{ Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Β, η οποία}$$

τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς τη ΒΓ το τέμνει στο Μ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)

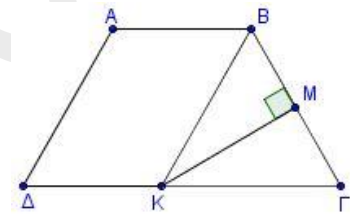
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος.

ii. Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ.

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 7)



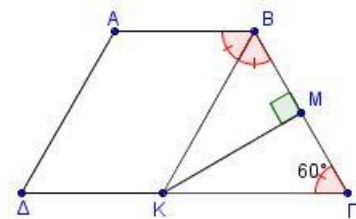
Λύση

α) Επειδή οι γωνίες Β και Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από τη ΒΓ, είναι

παραπληρωματικές, δηλαδή $B + \Gamma = 180^\circ$. Όμως $B = 2\Gamma$, άρα

$$2\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 3\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 60^\circ \text{ και } B = 120^\circ.$$

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι γωνίες που αντιστοιχούν σε κάθε του βάση είναι ίσες, άρα $A = B = 120^\circ$ και $\Delta = \Gamma = 60^\circ$.



β)i. Επειδή η ΒΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, είναι $ABK = KB\Gamma = 60^\circ$.

Στο τρίγωνο ΒΚΓ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60° , οπότε και η τρίτη γωνία του είναι 60° και το τρίγωνο

είναι ισόπλευρο. Τότε $K\Gamma = B\Gamma = AB = A\Delta$ και επειδή $B\Gamma = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, είναι και $\Delta K = B\Gamma = AB$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΚΔ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

ii. Το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισόπλευρο και το ΚΜ είναι ύψος του, άρα θα είναι και διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

1854. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΑ.

Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΑ (προς την πλευρά του Α) κατά τμήμα

$$AN = \frac{AD}{2}. \text{ Φέρουμε τα τμήματα ΓΜ και ΒΝ και θεωρούμε τα μέσα}$$

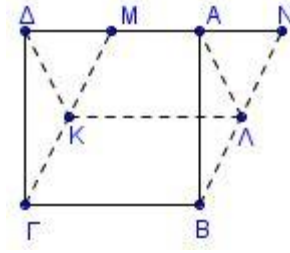
τους Κ και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Είναι $MN = MA + AN = \frac{AD}{2} + \frac{AD}{2} = AD = BG$ και $MN \parallel BG$, αφού

$AD \parallel BG$, άρα το τετράπλευρο ΜΝΒΓ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τμήματα ΜΓ και ΝΒ είναι ίσα και παράλληλα γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΜΝΒΓ, άρα και τα ΜΚ και

ΝΛ είναι ίσα και παράλληλα, γιατί $MK = \frac{MG}{2}$ και $NL = \frac{NB}{2}$. Το

τετράπλευρο ΜΚΝΛ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Είναι $MN \parallel KL$ και $MN = KL$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, όμως $MN = AD$, άρα τα τμήματα ΑΔ και ΚΛ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο.

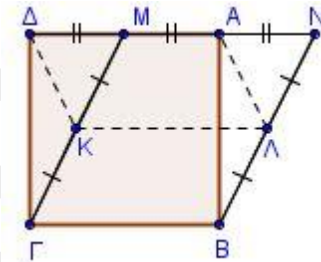
γ) Το ΑΛ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτεινούσα του ορθογωνίου τριγώνου ΝΑΒ,

άρα $AL = \frac{BN}{2} = \frac{MG}{2} = MK$ (1)

Είναι $MA \parallel KL$ (2) αφού $MN \parallel KL$.

Η ΜΚ τέμνει τη ΔΚ άρα θα τέμνει και κάθε παράλληλή της, άρα θα τέμνει και την ΑΛ (3).

Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



1856. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > BG$ και $B < 90^\circ$ θεωρούμε σημείο Ζ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) τέτοιο ώστε $GZ = BG$. Αν Ε είναι σημείο της ΑΒ, τέτοιο ώστε $EG = GB$, να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΒΕΖ είναι ορθή. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Αφού $GZ = BG$ το Γ μέσο της ΒΖ.

$EG = BG = \frac{BZ}{2}$ (διάμεσος ίση με το μισό απέναντι πλευράς),

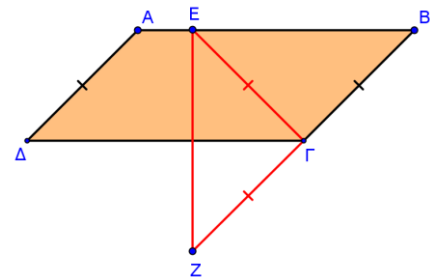
οπότε το τρίγωνο ΖΕΒ είναι ορθογώνιο.

β) $AE \parallel \Delta\Gamma$ και η ΕΓ τέμνει την ΒΓ άρα θα τέμνει και την παράλληλη της ΑΔ. Οπότε το ΑΕΓΔ είναι τραπέζιο.

Αλλά $AD = BG$ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου) και

$BG = GE$, άρα $AD = GE$, οπότε το ΑΕΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) $AD \parallel GZ$ άρα το ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.



1860. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Z της $\Gamma\Delta$, ώστε $\Delta Z = AB$. Αν η γωνία Γ είναι 60° και BE το ύψος του τραpezίου, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

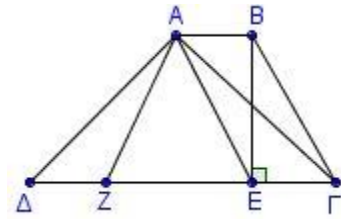
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ZAE είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 8)

γ) Τα τρίγωνα ΔAZ και ΓAE είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

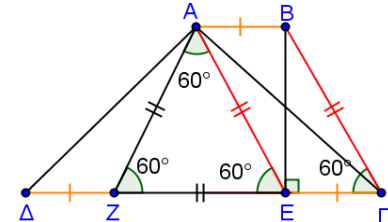


Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma E$ από το άθροισμα των γωνιών του

έχουμε: $E\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow E\Gamma = 30^\circ$ άρα $E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = AB$.

Επειδή τα τμήματα AB και $E\Gamma$ είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.



β) Είναι $ZE = \Delta\Gamma - \Delta Z - E\Gamma = 4AB - AB - AB = 2AB$.

Όμως $B\Gamma = 2AB$ και $B\Gamma = AE$, άρα $ZE = AE$, οπότε το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές.

Είναι $\angle AEZ = \Gamma = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AE, B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Gamma\Delta$, οπότε το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, ως ισοσκελές με μία γωνία του ίση με 60° .

γ) Τα τρίγωνα ΔAZ και ΓAE έχουν:

1) $\Delta Z = \Gamma E$

2) $AZ = AE$ γιατί το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο και

3) $\angle AZ\Delta = \angle A\Gamma E = 120^\circ$, οπότε με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

1861. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Delta\Delta = B\Gamma = AB$. Φέρουμε τμήματα AE και BZ κάθετα στις διαγωνίους $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Z και E είναι μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

β) $AE = BZ$.

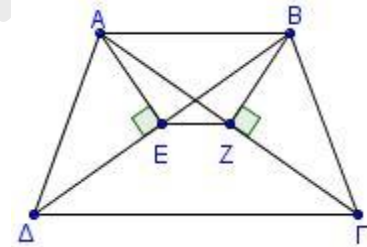
(Μονάδες 7)

γ) Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 7)

δ) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Επειδή $\Delta\Delta = B\Gamma = AB$, τα τρίγωνα $\Delta\Delta B$ και $AB\Gamma$ είναι ισοσκελή με βάσεις $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Τα AE, BZ είναι ύψη που αντιστοιχούν στις βάσεις των ισοσκελών τριγώνων $\Delta\Delta B$ και $AB\Gamma$, οπότε είναι και διάμεσοί τους, δηλαδή τα σημεία E, Z είναι τα μέσα των $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και ABZ έχουν:

1) την πλευρά AB κοινή και

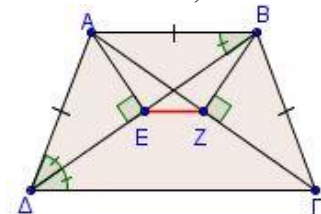
2) $\angle AZ = \angle AE$ γιατί είναι μισά των ίσων διαγωνίων $A\Gamma, B\Delta$ του ισοσκελούς τραpezίου

Άρα τα τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες και είναι ίσα. Οπότε έχουν και $AE = BZ$ (1).

γ) Τα σημεία E και Z είναι μέσα των διαγωνίων του τραpezίου, άρα $EZ \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$ (2).

Είναι $\angle AEZ + \angle BZE = 90^\circ + \angle BEZ + 90^\circ + \angle AZE > 180^\circ$, άρα οι AE και BZ τέμνονται προς το μέρος των E και Z (3).

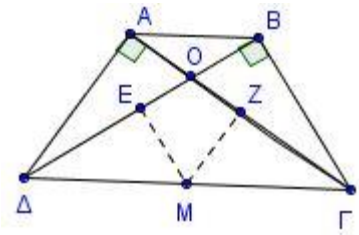
Από τις σχέσεις (1),(2),(3), προκύπτει ότι το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



δ) Επειδή το τρίγωνο $\Delta B \Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $B \Delta$, ισχύει ότι: $\Delta B \Delta = \Delta B \Delta$. Όμως $\Delta B \Delta = \Delta B \Gamma$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma \Delta$ που τέμνονται από την $B \Delta$, άρα $\Delta B \Delta = \Delta B \Gamma$, δηλαδή η $B \Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

1867. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB \Gamma \Delta$ ($AB \parallel \Gamma \Delta$) και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η $A \Gamma$ είναι κάθετη στην $A \Delta$ και η $B \Delta$ είναι κάθετη στη $B \Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα M, E και Z των $\Gamma \Delta, B \Delta$ και $A \Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $ME = MZ$. (Μονάδες 6)
 β) Η MZ είναι κάθετη στην $A \Gamma$. (Μονάδες 6)
 γ) Τα τρίγωνα $M \Delta E$ και $M Z \Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
 δ) Η OM είναι μεσοκάθετος του EZ . (Μονάδες 6)



Λύση

α) Τα M, E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $\Delta B \Gamma$, οπότε $EM = \frac{B \Gamma}{2}$ (1).

Τα Z, M είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $\Gamma A \Delta$, άρα $MZ = \frac{A \Delta}{2}$ και

$MZ \parallel A \Delta$ (2).

Επειδή το $AB \Gamma \Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο ισχύει ότι $B \Gamma = A \Delta$ οπότε από τις (1), (2) προκύπτει ότι $ME = MZ$.

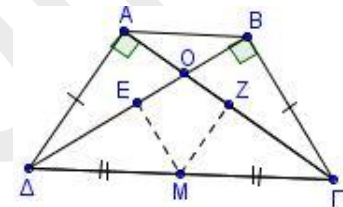
β) Επειδή $MZ \parallel A \Delta$ και $A \Delta \perp A \Gamma$ είναι και $MZ \perp A \Gamma$.

γ) Τα τρίγωνα $M \Delta E$ και $M Z \Gamma$ έχουν:

- 1) $ME = MZ$
- 2) $M \Delta = M \Gamma$ γιατί το M είναι μέσο του $\Gamma \Delta$ και
- 3) $\Delta E = \frac{\Delta B}{2} = \frac{A \Gamma}{2} = Z \Gamma$ γιατί οι $A \Gamma, B \Delta$ είναι διαγώνιες του ισοσκελούς τραpezίου.

Από το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΠΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα.

δ) Επειδή τα τρίγωνα $M \Delta E$ και $M Z \Gamma$ είναι ίσα έχουν και $O \Delta \Gamma = O \Gamma \Delta$. Τότε όμως το τρίγωνο $O \Delta \Gamma$ είναι ισοσκελές και $O \Delta = O \Gamma$. Επειδή όμως είναι $\Delta E = Z \Gamma$, θα είναι και $O E = O Z$. Αλλά $ME = MZ$, δηλαδή η OM είναι μεσοκάθετος του EZ .



1884. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB \Gamma$ ($AB = A \Gamma$) και $A \Delta$ διάμεσος. Στο τμήμα $A \Delta$ θεωρούμε τυχαίο σημείο K από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα KZ και KE κάθετα στις AB και $A \Gamma$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $K B \Gamma$ και $K Z E$ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $Z E \Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)
 γ) Ένας μαθητής στο α) i. ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

« Το τμήμα $A \Delta$ είναι διάμεσος στη βάση του ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου $AB \Gamma$ και μεσοκάθετος του $B \Gamma$. Οπότε το τρίγωνο $B K \Gamma$ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $A B K$ και $A \Gamma K$ έχουν

1. $B K = K \Gamma$
2. $B A K = \Gamma A K$ επειδή $A K$ διχοτόμος της γωνίας A
3. $A B K = A \Gamma K$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.>>

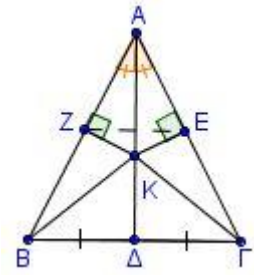
Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία- Πλευρά- Γωνία διατηρώντας τις πλευρές $B K$ και $K \Gamma$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, οπότε είναι ύψος και διάμεσος του.

Επειδή το Κ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας Α ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, άρα $ZK = KE$, οπότε το τρίγωνο ΖΚΕ είναι ισοσκελές.

Επειδή το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ ισαπέχει από τα Β, γ, δηλαδή $KB = KG$, οπότε το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισοσκελές.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΚ και ΑΕΚ έχουν την πλευρά ΑΚ κοινή και $KZ = KE$, δηλαδή έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, οπότε είναι ίσα. Άρα $AZ = AE$ και το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές και έχει $\angle AZE = \angle AEZ$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΖΕ, έχουμε:

$$\angle AZE + \angle AEZ + \angle A = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle AZE = 180^\circ - \angle A \Leftrightarrow \angle AZE = \frac{180^\circ - \angle A}{2}$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$\angle A + \angle B + \angle \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle B = 180^\circ - \angle A \Leftrightarrow \angle B = \frac{180^\circ - \angle A}{2}.$$

Είναι $\angle AZE = \angle B$ και επειδή οι γωνίες αυτές είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΖΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ, οι ευθείες ΖΕ και ΒΓ είναι παράλληλες (2).

Επειδή οι ΒΖ, ΓΕ τέμνονται στο Α, από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΒΖΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες,

δηλαδή $\angle AKB = \angle AKG$. Τώρα τα τρίγωνα $\triangle ABK$ και $\triangle AGK$ έχουν

1. $BK = KG$

2. $\angle AKB = \angle AKG$

3. $\angle ABK = \angle AGK$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων και εφαρμόζεται πλέον το κριτήριο ΓΠΓ.

1885. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)

β) οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

γ) οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$ άρα και $\Delta E \parallel HZ$ (1).

Επειδή τα Ε, Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι: $EZ \parallel AB$

και $EZ = \frac{AB}{2}$ (2).

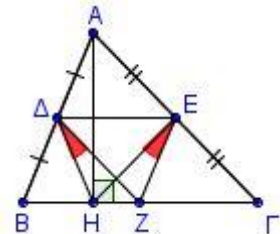
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ η ΗΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

υποτείνουσα, άρα $H\Delta = \frac{AB}{2}$ (3).

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει ότι $EZ = H\Delta$ (4).

Η ΗΒ τέμνει την ΑΒ, οπότε θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτή, άρα και την ΕΖ (5).

Από τις (1), (4), (5) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



β) Τα τρίγωνα ΗΔΖ και ΗΕΖ έχουν:

1) $EZ = H\Delta$

2) τη πλευρά HZ κοινή και

3) $\Delta HZ = EZH$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τραπεζίου

Βάση του κριτηρίου ΠΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα και $H\Delta Z = HEZ$.

γ) Είναι $\Delta EH = EZH$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Delta E, HZ$ που τέμνονται από την EH .

Επίσης $E\Delta H = \Delta EZ$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τραπεζίου και

$H\Delta Z = HEZ$ άρα και $E\Delta H - H\Delta Z = \Delta EZ - HEZ \Leftrightarrow E\Delta Z = \Delta EH = EZH$.

1893. Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ τέτοιο, ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60° . Από το Δ φέρουμε ΔM κάθετη στην AG .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο M είναι μέσο του AO όπου O το κέντρο του ορθογωνίου. (Μονάδες 8)

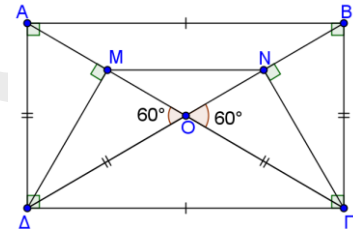
ii. $AM = \frac{1}{4} AG$. (Μονάδες 7)

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓN κάθετη στη BA , να αποδείξετε ότι το $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

Λύση

α) i. Οι $AG, B\Delta$ είναι διαγώνιοι του ορθογωνίου, άρα είναι ίσες και διχοτομούνται στο O , δηλαδή $AO = OD$ και το τρίγωνο $O\Delta\Delta$ είναι ισοσκελές. Όμως $AO\Delta = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $O\Delta\Delta$ είναι ισόπλευρο. Το ΔM είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε είναι και διάμεσος, δηλαδή το M είναι μέσο του OA .

ii. Είναι $AM = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AG = \frac{1}{4} AG$.



β) Το τρίγωνο $O\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο και το ΓN είναι ύψος του, οπότε είναι και διάμεσος του. Στο τρίγωνο OAB τα M, N είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $MN \parallel AB \Leftrightarrow MN \parallel \Gamma\Delta$ (1).

Τα ορθογώνια τρίγωνα $OM\Delta$ και $ON\Gamma$ είναι ίσα γιατί έχουν:

1) $MO\Delta = NO\Gamma = 60^\circ$ σαν κατακορυφών γωνίες

2) $OD = OG$ (μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου).

Οπότε $\Delta M = \Gamma N$ (2).

Έχουμε $M\Delta\Gamma + N\Delta\Gamma < \hat{A} + \hat{A} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, άρα οι ευθείες $\Delta M, \Gamma N$ τέμνονται (3).

Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

13519. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$. Στην AB θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = A\Delta$. Από το μέσο M της ΔE φέρουμε παράλληλη προς την $\Delta\Gamma$ που τέμνει την $B\Gamma$ στο K .

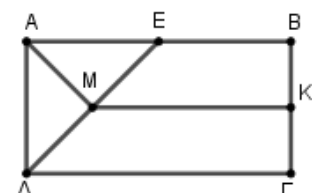
α) Να αποδείξετε $AM \perp \Delta E$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $2MK = 2AB - A\Delta$. (Μονάδες 9)

γ) Φέρνουμε την $E\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z . Να αποδείξετε ότι $\Gamma Z = AB - A\Delta$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Επειδή $AE = A\Delta$ το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου, άρα είναι και ύψος του, δηλαδή $AM \perp \Delta E$.



β) Αν η ΔΕ ήταν παράλληλη στην ΒΓ, θα είχαμε από το Δ δύο παράλληλες, τις ΔΑ και ΔΕ προς την ΒΓ, που είναι άτοπο. Επομένως, η ΔΕ δεν είναι παράλληλη προς την ΒΓ, οπότε το ΕΒΓΔ είναι τραπέζιο. Από το μέσο Μ της ΔΕ φέραμε ΜΚ//ΔΓ, άρα το Κ είναι το μέσο πλευράς ΒΓ. Η διάμεσος ΜΚ του τραπέζιου ΕΒΓΔ θα ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων, δηλαδή

$$MK = \frac{EB + \Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow 2MK = EB + \Gamma\Delta \quad (1)$$

Όμως $\Gamma\Delta = AB$ (2), ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και $AD = AE$ (3), από υπόθεση. Επίσης, $EB = AB - AE$ (4).

Από (1), (2), (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι $2MK = AB + AB - AE = 2AB - AD$ (5).

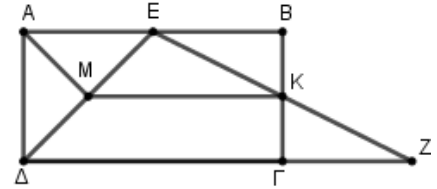
γ) Στο τρίγωνο ΔΕΖ το Μ είναι μέσο της ΔΕ και ΜΚ//ΔΖ, άρα η ΜΚ διέρχεται από το μέσο Κ της ΕΖ.

Επειδή τα Μ, Κ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΕΔΖ είναι

$$MK = \frac{\Delta Z}{2} \Leftrightarrow 2MK = \Delta Z \Leftrightarrow 2AB - AD = \Delta\Gamma + \Gamma Z \Leftrightarrow$$

$$2AB - AD = AB + \Gamma Z \Leftrightarrow$$

$$2AB - AB - AD = \Gamma Z \Leftrightarrow AB - AD = \Gamma Z$$



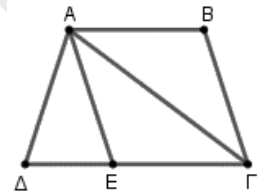
13539. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\angle A = 108^\circ$. Στη βάση ΓΔ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε οι ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία Α.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

ii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Επειδή οι ΑΕ, ΑΓ τριχοτομούν την Α, είναι $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ$.

Οι γωνίες Α και Δ του τραπέζιου είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ, οπότε:

$$\angle A + \angle \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 108^\circ + \angle \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \angle \Delta = 72^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:

$$\angle A_1 + \angle \Delta + \angle AED = 180^\circ \Leftrightarrow 36^\circ + 72^\circ + \angle E_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \angle E_1 = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

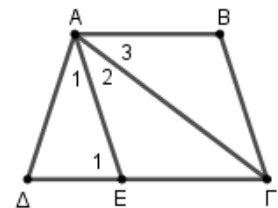
β) i. Επειδή $\angle E_1 = \angle \Delta$, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

ii. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, ισχύει ότι $\angle BGE = \angle \Delta = 72^\circ$.

Είναι $\angle BGE = \angle E_1$ και οι γωνίες αυτές είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΒΓ, ΑΕ που τέμνονται από την ΓΔ, άρα $BG \parallel AE$.

Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή $\angle A_2 = \angle A_3$, η διαγώνιος ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ διχοτομεί μια γωνία του, οπότε το ΑΒΓΕ είναι ρόμβος.



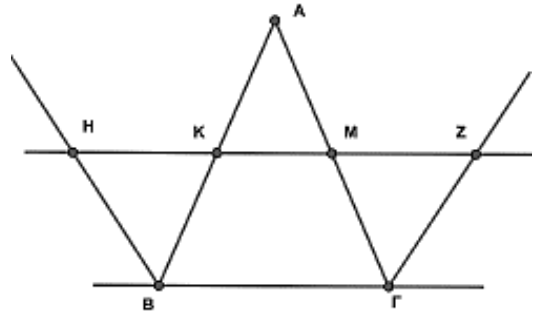
13838. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$), με K , M τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία K και M τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών B και Γ στα σημεία H και Z αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $KMG\beta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma ZH$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 14)

Λύση



α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα σημεία K και M είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, συνεπώς $KM \parallel B\Gamma$. Το τετράπλευρο $KMG\beta$ είναι τραπέζιο αφού έχει 2 πλευρές παράλληλες (KM , $B\Gamma$) και οι άλλες δύο πλευρές του (BK και ΓM) τέμνονται ως μέρη των πλευρών AB και AG , αντίστοιχα, του τριγώνου $AB\Gamma$.

Από υπόθεση έχουμε ότι $AB=AG$ και τα σημεία K , M είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, συνεπώς $KB=MG$ (ως μισά των ίσων τμημάτων AB και AG), άρα το τετράπλευρο $KMG\beta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο αφού οι μη παράλληλες πλευρές του KB και MG είναι ίσες μεταξύ τους.

β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα σημεία K , M είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα και ισχύει $KM \parallel B\Gamma$, άρα και $HZ \parallel B\Gamma$ (αφού τα σημεία H και Z βρίσκονται στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία K , M). Επιπλέον οι BH και ΓZ τεμνόμενες από τη $B\Gamma$ σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες τους (ΓBx και $B\Gamma y$) με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, αφού:

$$\Gamma Bx = HBt \text{ (ως κατακορυφήν)} \text{ και } HBt = \frac{B_{εξ}}{2}$$

$$B\Gamma y = Z\Gamma p \text{ (ως κατακορυφήν)} \text{ και } Z\Gamma p = \frac{\Gamma_{εξ}}{2}$$

αλλά επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές οι ίσες γωνίες B και Γ είναι οξείες άρα οι εξωτερικές τους

$$B_{εξ} \text{ και } \Gamma_{εξ} \text{ είναι αμβλείες δηλαδή ισχύει: } B_{εξ} < 180^\circ \Leftrightarrow \frac{B_{εξ}}{2} < 90^\circ \text{ και } \Gamma_{εξ} < 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\Gamma_{εξ}}{2} < 90^\circ$$

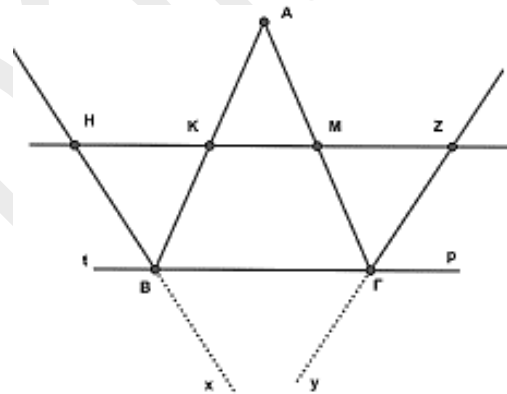
$$\frac{B_{εξ}}{2} + \frac{\Gamma_{εξ}}{2} < 180^\circ \Leftrightarrow HBt + Z\Gamma p < 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma Bx + B\Gamma y < 180^\circ.$$

Οι BH και ΓZ τέμνονται συνεπώς το τετράπλευρο $B\Gamma ZH$ είναι τραπέζιο με βάσεις $B\Gamma$ και ZH . Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ οι γωνίες B και Γ είναι προσκείμενες στη βάση $B\Gamma$ συνεπώς είναι ίσες, δηλαδή

$$B = \Gamma \text{ άρα και } B_{εξ} = \Gamma_{εξ} \Leftrightarrow \frac{B_{εξ}}{2} = \frac{\Gamma_{εξ}}{2} \Leftrightarrow KBH = M\Gamma Z.$$

Επίσης ισχύει $\Gamma BH = B\Gamma Z$ (ως άθροισμα ίσων γωνιών $B + KBH$ και $\Gamma + M\Gamma Z$).

Το τραπέζιο $B\Gamma ZH$ είναι ισοσκελές, αφού έχει τις προσκείμενες στη βάση $B\Gamma$ γωνίες του ΓBH και $B\Gamma Z$ ίσες.



14885. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε το ύψος του AH κατά τμήμα $H\Delta = AH$ και τη διάμεσό του AM κατά τμήμα $ME = AM$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) i. $AB = GE$
ii. $AB = B\Delta$

β) $\Gamma B\Delta = B\Gamma E$

γ) i. Εξετάστε αν το τμήμα $B\Delta$ μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα ΓE .

ii. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου $B\Gamma E\Delta$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma E$ έχουν:

- 1) $AM = ME$
- 2) $BM = M\Gamma$ (M μέσο του $B\Gamma$)
- 3) $\angle AMB = \angle M\Gamma E$ ως κατακορυφήν

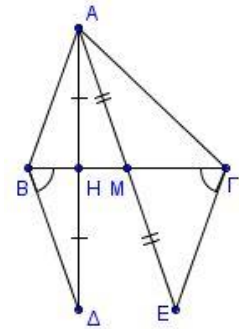
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma E$ είναι ίσα, οπότε έχουν και $AB = GE$.

ii. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το BH είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = B\Delta$.

β) Το τμήμα BH είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Delta$ (αφού είναι ύψος και διάμεσος του), άρα $B_1 = B_2$. Όμως $B_2 = B\Gamma E$ αφού τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma E$ είναι ίσα, άρα $B_1 = B\Gamma E$.

γ) i. Τα H, M είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $A\Delta E$, άρα $HM \parallel \Delta E$, οπότε και $B\Gamma \parallel \Delta E$ (3).

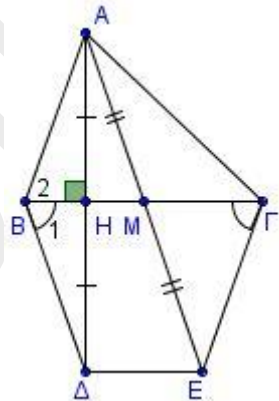
ii. Οι γωνίες B_2 και $B\Gamma E$ είναι εντός εναλλάξ των $AB, \Gamma E$ που τέμνονται από την $B\Gamma$ και αφού είναι ίσες, οι ευθείες AB και ΓE είναι παράλληλες. Επειδή από το (β) σκέλος είναι $B\Delta = \Gamma E$ (5), από τις σχέσεις (3), (5) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



(Μονάδες 8)

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 5)



14888. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\angle A = 90^\circ$.

Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K, M, Λ ώστε

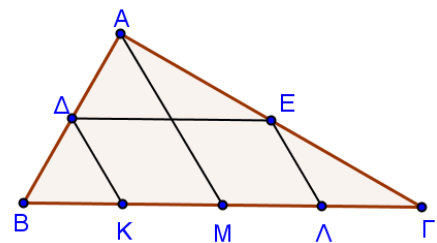
$BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο $K\Delta AM$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με $\frac{3}{8} B\Gamma$.

(Μονάδες 12)



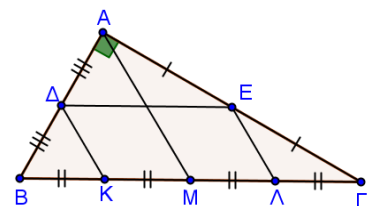
Λύση

α) Επειδή τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, ισχύει

ότι $\Delta E \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \Delta E \parallel K\Lambda$ και $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$. Όμως

$$K\Lambda = KM + M\Lambda = \frac{BK}{2} + \frac{M\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = \Delta E, \text{ δηλαδή στο}$$

τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



β) Στο τρίγωνο BAM τα Κ,Δ είναι μέσα δύο πλευρών, οπότε $K\Delta \parallel AM$ και $K\Delta = \frac{AM}{2}$.

Επειδή οι ΑΔ και ΚΜ τέμνονται στο Β, το τετράπλευρο ΚΔΑΜ είναι τραπέζιο.

Η ΑΜ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $AM = \frac{BG}{2}$.

Αν δ η διάμεσος του τραπέζιου ΚΔΑΜ, ισχύει ότι:

$$\delta = \frac{K\Delta + AM}{2} = \frac{\frac{AM}{2} + AM}{2} = \frac{\frac{3}{2}AM}{2} = \frac{3}{4}AM = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}BG = \frac{3}{8}BG$$

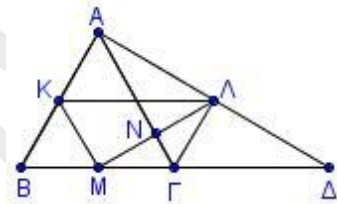
14882. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα, τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του είναι

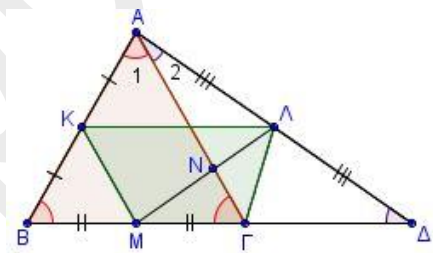
ίσες με 60° , άρα $B = A_1 = A_1GB = 60^\circ$.

Επειδή $GD = BG = AG$, το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ, άρα $A_2 = \Delta$.

Η γωνία ΑΓΒ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΓΔ, άρα

$$A_1GB = A_2 + \Delta \Leftrightarrow 60^\circ = 2\Delta \Leftrightarrow \Delta = 30^\circ = A_2$$

$$\text{Είναι } B\Delta = A_1 + A_2 = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$



β) i. Επειδή τα σημεία Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, είναι

$$K\Lambda \parallel B\Delta \Leftrightarrow K\Lambda \parallel M\Gamma \quad (1) \text{ και } K\Lambda = \frac{B\Delta}{2} = \frac{2BG}{2} = BG = 2M\Gamma.$$

Τα σημεία Λ,Γ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $\Lambda\Gamma \parallel AB$ και $\Lambda\Gamma = \frac{AB}{2}$

Επειδή η ΚΜ τέμνει την ΑΒ θα τέμνει και κάθε παράλληλη προς αυτή, άρα και την ΓΛ (2).

Τα σημεία Κ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $KM = \frac{AG}{2}$.

$$\text{Είναι } AB = AG \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{AG}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Lambda = KM \quad (3).$$

Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ii. Είναι $\Gamma\Lambda = KM = \frac{AB}{2} = KB = \frac{BG}{2} = BM = M\Gamma$, άρα το τρίγωνο ΚΜΒ είναι ισόπλευρο,

οπότε $KMB = 60^\circ$.

Οι γωνίες ΜΓΛ και Β είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΛ που τέμνονται από την ΒΓ, οπότε είναι παραπληρωματικές. Δηλαδή

$$M\Gamma\Lambda + B = 180^\circ \Leftrightarrow M\Gamma\Lambda + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow M\Gamma\Lambda = 120^\circ.$$

Επειδή $M\Gamma = \Gamma\Lambda$, το τρίγωνο ΜΓΛ είναι ισοσκελές με βάση την ΜΛ, άρα $\Gamma M\Lambda = \Gamma \Lambda M$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΜΓΛ έχουμε:

$$\Gamma M\Lambda + \Gamma \Lambda M + M\Gamma\Lambda = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma M\Lambda + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma M\Lambda = 60^\circ \Leftrightarrow \Gamma M\Lambda = 30^\circ.$$

Είναι $\angle BMK + \angle KML + \angle GLM = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \angle KML + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle KML = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο KML είναι ορθογώνιο.

3^ο Θέμα

12418. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με $AB > \Gamma\Delta$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο AEB με βάση AB . Αν M είναι το μέσο της βάσης $\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AED και BEG είναι ίσα.

(Μονάδες 11)

β) Η διάμεσος EM του τριγώνου $E\Delta\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας AEB .

(Μονάδες 14)

Λύση

α) Τα τρίγωνα AED και BEG έχουν:

- $EA = EB$ γιατί το τρίγωνο EAB είναι ισοσκελές
- $AD = BG$ γιατί το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές
- $\angle EAD = \angle EBG$ γιατί είναι αθροίσματα ίσων γωνιών

($A_1 = B_1$ και $A_2 = B_2$)

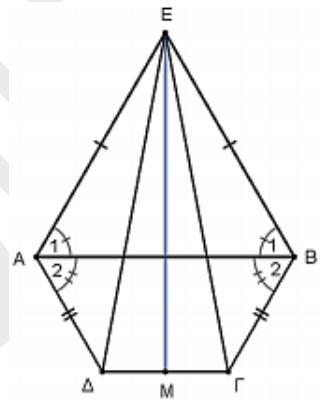
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα AED και BEG είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα AED και BEG είναι ίσα έχουν $\angle AED = \angle BEG$ (1) και $ED = EG$.

Επειδή το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές η διάμεσος EM που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και διχοτόμος του, δηλαδή $\angle DEM = \angle MEG$ (2).

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει:

$\angle AED + \angle DEM = \angle BEG + \angle MEG \Leftrightarrow \angle AEM = \angle MEB$ άρα η διάμεσος EM του τριγώνου $E\Delta\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας AEB .



Εγγεγραμμένη-επίκεντρη-υπό χορδής και εφαπτομένης

2^ο Θέμα

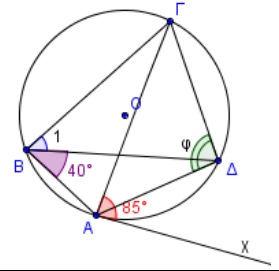
1530. Στο διπλανό σχήμα η Αχ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο,ρ) σε σημείο του Α και επιπλέον $\Gamma A\chi = 85^\circ$ και $\Delta B A = 40^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $B_1 = 45^\circ$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία φ .

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Η γωνία $\Delta A\chi$ είναι υπό χορδής και εφαπτομένης

στο τόξο ΑΔ και η $\Delta B A = 40^\circ$ είναι εγγεγραμμένη στο

ίδιο τόξο, άρα $\Delta A\chi = \Delta B A = 40^\circ$. Τότε $\Gamma A\Delta = 85^\circ - 40^\circ = 45^\circ$.

Οι γωνίες B_1 και $\Gamma A\Delta$ είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο, το $\Delta\Gamma$, άρα είναι ίσες, δηλαδή $B_1 = \Gamma A\Delta = 45^\circ$.

β) Είναι $AB\Gamma = 40^\circ + 45^\circ = 85^\circ$ και $AB\Gamma + A\Delta\Gamma = 180^\circ$, αφού τα αντίστοιχα τόξα τους έχουν άθροισμα 360° , άρα $85^\circ + \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \varphi = 95^\circ$

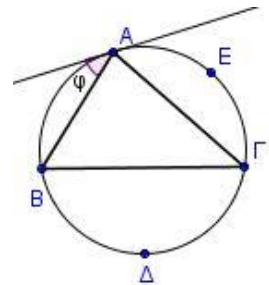
1561. Στο διπλανό σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την πλευρά ΑΒ. Αν το μέτρο του τόξου ΒΔΓ είναι 160° ,

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 18)

β) να βρείτε το μέτρο του τόξου ΑΕΓ.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Η γωνία φ είναι υπό χορδής και εφαπτομένης με αντίστοιχο

τόξο το ΑΒ, οπότε ισούται με κάθε εγγεγραμμένη γωνία στο ίδιο τόξο, άρα $\Gamma = \varphi = 30^\circ$.

Η γωνία Α είναι εγγεγραμμένη στο τόξο ΒΔΓ, άρα $A = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του

τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε: $A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + B + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 70^\circ$

β) Επειδή η γωνία Β είναι εγγεγραμμένη στο τόξο ΑΕΓ, είναι

$$B = \frac{AE\Gamma}{2} \Leftrightarrow 70^\circ = \frac{AE\Gamma}{2} \Leftrightarrow AE\Gamma = 140^\circ.$$

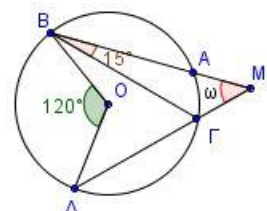
1580. Στο διπλανό σχήμα η επίκεντρη γωνία ΒΟΔ είναι 120° και η γωνία ΓΒΑ είναι 15° .

α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΓΔ.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45° .

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Η γωνία $B\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένη και η $BO\Delta$ επίκεντρο

με το ίδιο αντίστοιχο τόξο, άρα $B\Gamma\Delta = \frac{BO\Delta}{2} = 60^\circ$.

β) Η γωνία $B\Gamma\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $B\Gamma M$, άρα $B\Gamma\Delta = \Gamma BM + M \Leftrightarrow 60^\circ = 15^\circ + \omega \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$

1581. Σε κύκλο κέντρον O δίνονται οι χορδές AB και AD τέτοιες ώστε η γωνία $BA\Delta$ να είναι 44° . Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta O$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία x .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136° .

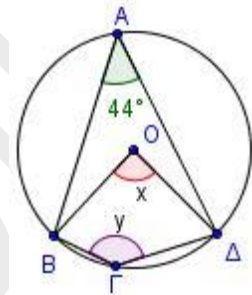
(Μονάδες 13)

Λύση

α) Η γωνία x είναι επίκεντρο και η $BA\Delta$ εγγεγραμμένη που έχει

το ίδιο αντίστοιχο τόξο, άρα $BA\Delta = \frac{BO\Delta}{2} \Leftrightarrow 44^\circ = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 88^\circ$.

β) Επειδή η γωνία x είναι 88° και το τόξο $B\Gamma\Delta$ θα έχει μέτρο 88° . Τότε για το τόξο $BA\Delta$ ισχύει: $BA\Delta = 360^\circ - 88^\circ = 272^\circ$. Η γωνία y είναι εγγεγραμμένη στο τόξο $BA\Delta$, άρα $y = \frac{272^\circ}{2} = 136^\circ$.



1626. Δίνεται κύκλος (O,R) διαμέτρου AB και χορδή $A\Gamma$ τέτοια, ώστε $BA\Gamma = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) στο σημείο Δ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $O\Gamma\Delta$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Επειδή η $O\Gamma$ είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής με την εφαπτομένη, είναι κάθετη στην $\Gamma\Delta$, άρα $O\Gamma\Delta = 90^\circ$.

Το τρίγωνο $AO\Gamma$ είναι ισοσκελές ($OA=O\Gamma=R$). Άρα $\hat{\Gamma}_1 = A = 30^\circ$.

Η γωνία ΓOB είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AO\Gamma$, άρα

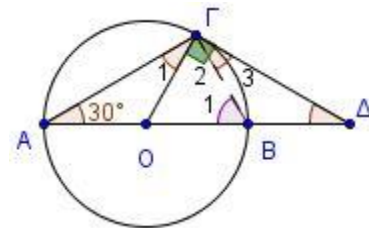
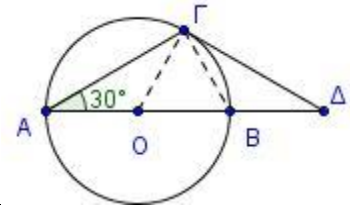
$$\Gamma OB = \hat{\Gamma}_1 + A = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου $O\Gamma\Delta$ έχουμε:

$$BO\Gamma + \Delta = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta = 30^\circ.$$

β) Είναι $\Gamma_3 = \hat{A} = 30^\circ$ γωνία που σχηματίζεται από τη χορδή $B\Gamma$ και την εφαπτομένη $\Delta\Gamma$.

Άρα $\Gamma_3 = \Delta$ οπότε το τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ είναι ισοσκελές.



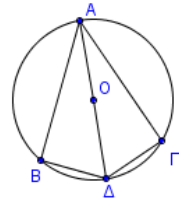
1663. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Αν η διάμετρος $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΒΑΓ$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τόξα $ΒΔ$ και $ΔΓ$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΔ$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Επειδή η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΒΑΓ$ είναι

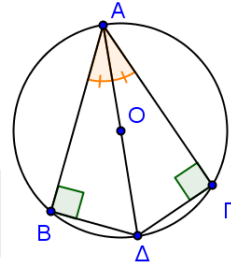
$ΒΑΔ = ΔΑΓ$. Όμως οι γωνίες $ΒΑΔ$ και $ΔΑΓ$ είναι εγγεγραμμένες στα τόξα $ΒΔ$ και $ΔΓ$, οπότε και τα τόξα αυτά είναι ίσα.

β) Επειδή οι γωνίες $ΑΒΔ$ και $ΑΓΔ$ είναι εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο είναι ορθές.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΔ$ έχουν:

1) τη πλευρά $ΑΔ$ κοινή και

2) $ΒΑΔ = ΔΑΓ$, δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα.



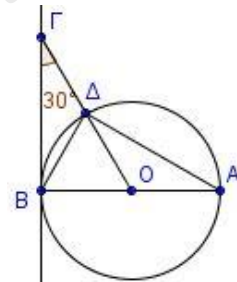
1665. Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και διάμετρό του $ΑΒ$. Στην εφαπτομένη του κύκλου στο $Β$ θεωρούμε σημείο $Γ$ τέτοιο, ώστε η γωνία $ΒΓΟ$ να είναι ίση με 30° . Αν η $ΟΓ$ τέμνει τον κύκλο στο $Δ$, να αποδείξετε ότι:

α) $ΟΓ = 2ΟΑ$

(Μονάδες 12)

β) $ΒΓ = ΑΔ$

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Επειδή η $ΒΓ$ είναι εφαπτομένη του κύκλου, είναι κάθετη στην ακτίνα στο σημείο επαφής, άρα $ΓΒΑ = 90^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΒΓ$ είναι $Γ = 30^\circ$, άρα

$$ΟΒ = \frac{ΟΓ}{2} \Leftrightarrow ΟΓ = 2ΟΒ. \text{ Όμως } ΟΒ = ΟΑ = \rho, \text{ άρα } ΟΓ = 2ΟΑ.$$

β) Η γωνία $ΒΔΑ$ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.

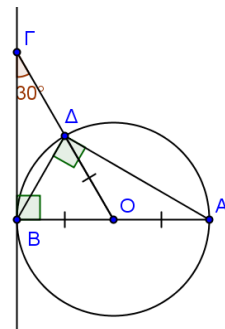
Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΟΒΓ$ και $ΑΒΔ$ έχουν:

1) $ΟΒ = ΒΔ = \rho$ και

2) $ΟΓ = 2ΟΑ = 2\rho = ΑΒ$,

δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη

τους πλευρά μία προς μία ίσες, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και έχουν $ΒΓ = ΑΔ$.



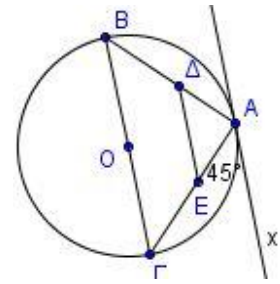
1672. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΒΓ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Α ώστε να σχηματίζει με τη χορδή ΑΓ γωνία 45° . Φέρουμε επίσης μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

(Μονάδες 15)



α) Η γωνία Β είναι εγγεγραμμένη στο τόξο ΑΓ και η γωνία ΓΑx είναι υπό χορδής και εφαπτομένης με το ίδιο αντίστοιχο τόξο, άρα $B = \Gamma A x = 45^\circ$.

Είναι $BAG = 90^\circ$ γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 45^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 45^\circ$$

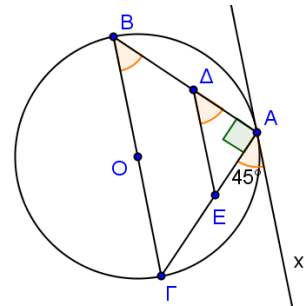
β) Είναι $B = \angle EDA = 45^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των

παράλληλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ και $\Gamma = \angle DEA = 45^\circ$ ως

εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παράλληλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ, άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με $AD = AE$.

Επειδή $B = \Gamma$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα $AB = AG$. Τότε είναι και

$AB - AD = AG - AE \Leftrightarrow BD = GE$. Επειδή ακόμη είναι $DE \parallel BG$ και οι ΒΔ, ΓΕ τέμνονται, το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



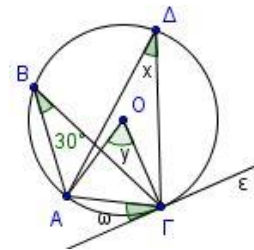
1695. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (Ο, ρ) στο σημείο Γ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες χ, γ και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές.

(Μονάδες 10)



α) Οι γωνίες χ και Β είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο ΑΓ, οπότε είναι ίσες, δηλαδή $\chi = 30^\circ$.

Η γωνία γ είναι επίκεντρη με αντίστοιχο τόξο το ΑΓ στο οποίο η αντίστοιχη εγγεγραμμένη είναι η Β,

$$\text{άρα } B = \frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow \gamma = 60^\circ.$$

Τέλος η γωνία ω είναι υπό χορδής και εφαπτομένης, οπότε ισούται με κάθε εγγεγραμμένη που έχει το ίδιο αντίστοιχο τόξο, δηλαδή $\omega = B = 30^\circ$.

β) Επειδή $OA = OG = \rho$, το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές. Όμως έχει $\gamma = 60^\circ$, άρα είναι ισόπλευρο.

1696. Έστω κύκλος κέντρου K , μια διάμετρος του $B\Gamma$ και σημείο A του κύκλου τέτοιο, ώστε $BA = K\Gamma$. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των B και Γ ,

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο.

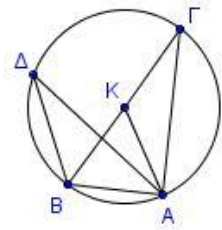
(Μονάδες 7)

β) να υπολογίσετε τη γωνία $B\Delta A$.

(Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Είναι $BA = K\Gamma = \rho = BK = KA$, άρα το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο.

β) Επειδή το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του είναι ίσες με 60° , άρα $BKA = KBA = KAB = 60^\circ$.

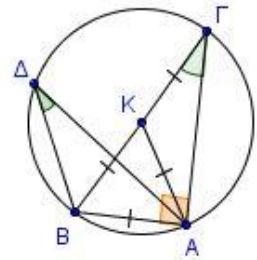
Η γωνία $B\Delta A$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AB με αντίστοιχη

επίκεντρη τη γωνία BKA , άρα $B\Delta A = \frac{BKA}{2} = 30^\circ$.

γ) Η γωνία $B = 60^\circ$ επειδή είναι γωνία του ισοπλεύρου BKA .

Η γωνία Γ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AB , όπως και η $B\Delta A$, άρα $\Gamma = B\Delta A = 30^\circ$.

Τέλος η γωνία $BA\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, οπότε είναι ορθή.



1703. Έστω κύκλος κέντρου O και διαμέτρου $B\Gamma$. Θεωρούμε τα σημεία A και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της $B\Gamma$, τέτοια ώστε το τόξο $B\Delta$ να είναι διπλάσιο του τόξου $\Delta\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο x του τόξου $\Gamma\Delta$,

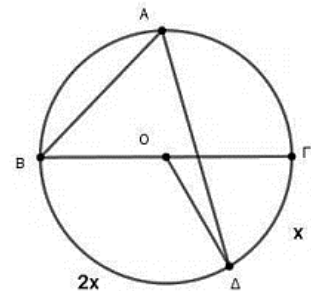
(Μονάδες 8)

β) τη γωνία $BO\Delta$,

(Μονάδες 9)

γ) τη γωνία $BA\Delta$.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Επειδή το τόξο $B\Delta\Gamma$ είναι ημικύκλιο, ισχύει ότι: $2x + x = 180^\circ \Leftrightarrow 3x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$

β) Η γωνία $BO\Delta$ είναι επίκεντρη με αντίστοιχο τόξο το $B\Delta$, άρα $BO\Delta = 2x = 120^\circ$

γ) Η γωνία $BA\Delta$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο $B\Delta$, άρα $BA\Delta = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

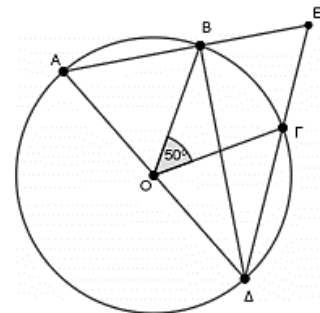
12642. Σε κύκλο με κέντρο το O , παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία A , B , Γ και Δ , ώστε η $A\Delta$ να είναι διάμετρος και η γωνία $BO\Gamma$ να ισούται με 50° . Αν η προέκταση της AB προς το B , τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ προς το Γ στο E , αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνίας $B\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) το μέτρο της γωνία $AE\Delta$.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Η γωνία $B\Delta\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει στο τόξο $B\Gamma$, οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης. Άρα $B\Delta\Gamma = \frac{B\Omega\Gamma}{2} = 25^\circ$

β) Επειδή η $A\Delta$ είναι διάμετρος, η γωνία $AB\Delta$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, θα είναι ορθή, άρα $AB\Delta = \Delta BE = 90^\circ$.

Στο τρίγωνο EBA είναι $\Delta BE + B\Delta\Gamma + A\epsilon\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 25^\circ + A\epsilon\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow A\epsilon\Delta = 65^\circ$

12637. Στο διπλανό σχήμα η xx' είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A και επιπλέον ισχύουν:

$B\Delta x = 35^\circ$ και $B\Gamma = 110^\circ$.

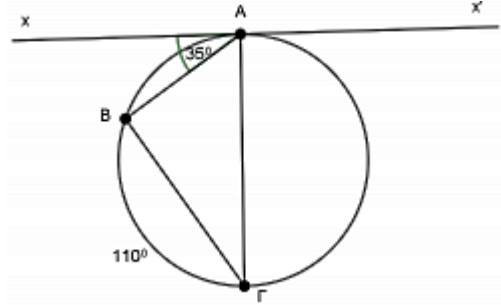
α) Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας Γ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

Λύση



α) Η γωνία Γ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AB και η γωνία $B\Delta x$ είναι υπό χορδής και εφαπτομένης στο ίδιο τόξο, άρα $\Gamma = B\Delta x = 35^\circ$.

β) Είναι $\Gamma = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 70^\circ$. Είναι $AB + B\Gamma = 70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$, δηλαδή το τόξο $AB\Gamma$ είναι ημικύκλιο, οπότε $AB\Gamma = 90^\circ$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

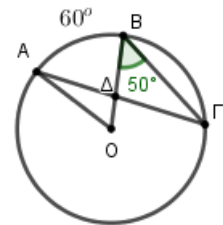
12638. Στον κύκλο του σχήματος, το O είναι το κέντρο του, το τόξο AB ισούται με 60° και η γωνία B ισούται με 50° . Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

α) πόσες μοίρες είναι η γωνία Γ .

(Μονάδες 10)

β) πόσες μοίρες είναι η γωνία $A\Delta O$

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Η γωνία Γ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AB , οπότε $\Gamma = \frac{AB}{2} = 30^\circ$.

β) Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι $B + \Gamma + B\Delta\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 30^\circ + B\Delta\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow B\Delta\Gamma = 100^\circ$.

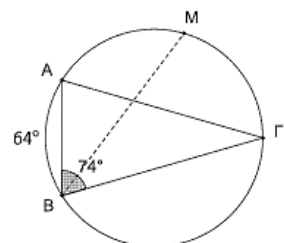
Όμως οι γωνίες $B\Delta\Gamma$ και $A\Delta O$ είναι κατακορυφήν, οπότε και $A\Delta O = 100^\circ$.

13441. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο, $B = 74^\circ$, το μέτρο του τόξου AB που δεν περιέχει το σημείο Γ ισούται με 64° και M είναι το μέσο του τόξου $A\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Γ και A του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η BM είναι διχοτόμος της γωνίας B . (Μονάδες 5)



Λύση

α) Η γωνία Γ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AB οπότε $\Gamma = \frac{64^\circ}{2} = 32^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A + 74^\circ + 32^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - 106^\circ = 74^\circ$$

β) Επειδή $A = B = 74^\circ$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις $B\Gamma$, $A\Gamma$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες.

γ) Το σημείο M είναι το μέσο του τόξου $A\Gamma$, άρα τα τόξα AM και $M\Gamma$ είναι ίσα. Οι γωνίες ABM και ΓBM είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στα ίσα τόξα AM και $M\Gamma$ αντίστοιχα.

Από την ισότητα $ABM = \Gamma BM$ συμπεραίνουμε ότι η BM είναι διχοτόμος της γωνίας B .

13740. Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε μια τυχαία χορδή του AB , την οποία προεκτείνουμε προς το μέρος του B κατά ίσο τμήμα $B\Gamma$. Φέρουμε κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο της B που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta A = \Delta \Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Η $A\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.

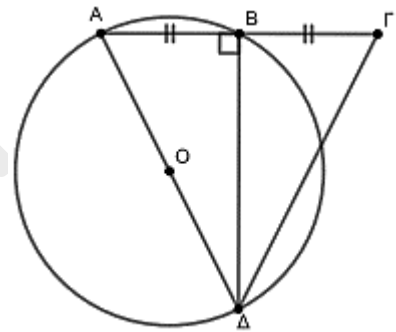
(Μονάδες 13)

Λύση

α) Στο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$, το τμήμα ΔB είναι διάμεσος της πλευράς $A\Gamma$, αφού $AB = B\Gamma$ από την υπόθεση. Επίσης το τμήμα ΔB είναι και ύψος, αφού $\Delta B \perp A\Gamma$ από την υπόθεση.

Στο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ το τμήμα ΔB είναι διάμεσος και ύψος, άρα το $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Gamma$, επομένως $\Delta A = \Delta \Gamma$.

β) Τα σημεία A , B και Δ είναι σημεία του κύκλου, άρα η γωνία $AB\Delta$ είναι εγγεγραμμένη και επειδή είναι ορθή, θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η $A\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.



13747. Από σημείο M εξωτερικό ενός κύκλου κέντρου O φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε το τμήμα AM προς το μέρος του M και παίρνουμε τμήμα $M\Gamma = AM$. Από το σημείο Γ φέρουμε την τέμνουσα $\Gamma B\Delta$ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

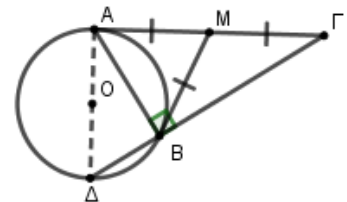
(Μονάδες 13)

β) Τα σημεία A και Δ είναι αντιδιαμετρικά.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Τα τμήματα MA και MB είναι ίσα γιατί είναι εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός του κύκλου. Από την υπόθεση έχουμε ότι $M\Gamma = AM$, άρα $MA = MB = M\Gamma$. Δηλαδή η BM , που είναι διάμεσος προς την πλευρά $A\Gamma$ στο τρίγωνο $BA\Gamma$, ισούται με το μισό της $A\Gamma$. Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα την πλευρά $A\Gamma$ και $AB\Gamma = 90^\circ$.



β) Επειδή $AB\Gamma = 90^\circ$ είναι και $AB\Delta = 90^\circ$. Τα σημεία A , B , Δ είναι σημεία του κύκλου, άρα η $AB\Delta$ είναι εγγεγραμμένη γωνία και επειδή είναι ορθή θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η $A\Delta$ είναι διάμετρος επομένως τα σημεία A , Δ είναι αντιδιαμετρικά.

13753. Δίνεται κύκλος (O, ρ) με διάμετρο $B\Gamma$. Έστω A και Δ σημεία του κύκλου τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά ημικύκλια ως προς τη διάμετρο $B\Gamma$. Τα μέτρα των τόξων $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ είναι $2x$ και x αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το μέτρο:

α) της γωνίας $BA\Gamma$.

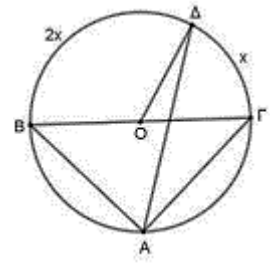
(Μονάδες 7)

β) x του τόξου $\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 8)

γ) της γωνίας $BO\Delta$.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Η γωνία $BA\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο οπότε είναι ορθή, δηλαδή $BA\Gamma = 90^\circ$.

β) Η $B\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου, επομένως $B\Delta + \Delta\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2x + x = 180^\circ \Leftrightarrow 3x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$

γ) Η γωνία $BO\Delta$ είναι επίκεντρη η οποία βαίνει στο τόξο $B\Delta$. Άρα το μέτρο της γωνίας $BO\Delta$ είναι ίσο με το μέτρο του τόξου $B\Delta$, δηλαδή $2x = 120^\circ$.

13754. Δίνεται κύκλος (O, ρ) με διάμετρο $B\Gamma$ και τα σημεία A, Δ του κύκλου εκατέρωθεν της διαμέτρου $B\Gamma$ έτσι ώστε $BA\Delta = 50^\circ$. Φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) στον κύκλο στο σημείο Δ . Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας :

α) $BA\Gamma$.

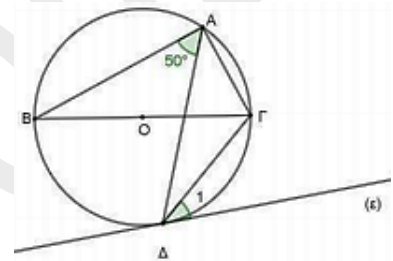
(Μονάδες 6)

β) $B\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 9)

γ) Δ_1 .

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Η γωνία $BA\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, επομένως $BA\Gamma = 90^\circ$.

β) Οι γωνίες $BA\Delta$, $B\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στο ίδιο τόξο $B\Delta$ οπότε είναι ίσες.

Άρα $BA\Delta = B\Gamma\Delta = 50^\circ$.

γ) Η γωνία Δ_1 σχηματίζεται από τη χορδή $\Delta\Gamma$ του κύκλου και την εφαπτομένη του στο σημείο Δ . Επομένως η γωνία Δ_1 ισούται με κάθε εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο $\Delta\Gamma$.

Η γωνία $\Delta A\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\Delta\Gamma$, οπότε $\Delta_1 = \Delta A\Gamma$.

Για τη γωνία $\Delta A\Gamma$ έχουμε: $\Delta A\Gamma = BA\Gamma - BA\Delta = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$. Άρα $\Delta_1 = 40^\circ$.

13756. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο Σε κύκλο (K, ρ) . Να αποδείξετε ότι:

α) $\angle AKB = 2\angle A\Gamma B$.

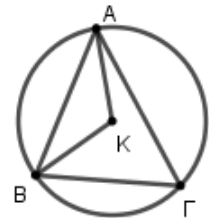
(Μονάδες 7)

β) το τρίγωνο AKB είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)

γ) $\angle KAB + \angle A\Gamma B = 90^\circ$.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Η γωνία $\angle AKB$ είναι επίκεντρη και βαίνει στο τόξο AB .

Η γωνία $\angle A\Gamma B$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο AB .

Άρα η επίκεντρη γωνία $\angle AKB$ είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης γωνίας $\angle A\Gamma B$, δηλαδή $\angle AKB = 2\angle A\Gamma B$.

β) Είναι $KA = KB$ διότι είναι ακτίνες του κύκλου (K, ρ) , άρα το τρίγωνο AKB είναι ισοσκελές.

γ) Στο τρίγωνο KAB για το άθροισμα των γωνιών του έχουμε : $KAB + ABK + AKB = 180^\circ$ (1).

Από το ερώτημα (α) έχουμε $AKB = 2\alpha$ (2).

Από το ερώτημα (β), έχουμε $KAB = ABK$ (3), γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου AKB.

Λόγω των σχέσεων (2), (3) η (1) γράφεται $2KAB + 2\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow KAB + \alpha = 90^\circ$.

4^ο Θέμα

1717. Δύο κύκλοι (K, ρ) , (Λ, R) τέμνονται σε δύο σημεία A, B. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\angle AB\Gamma = 90^\circ$

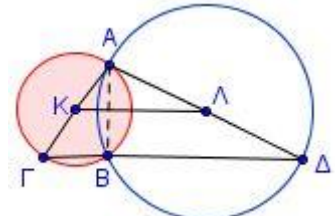
(Μονάδες 5)

β) τα σημεία Γ, B, Δ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

γ) το τετράπλευρο ΚΛΓΔ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 10)



Λύση

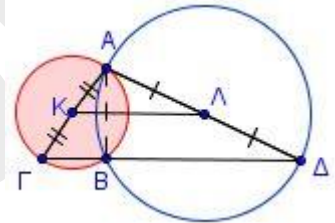
α) Η γωνία ABΓ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.

β) Η γωνία ABD είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.

Είναι $\angle B\Delta = \angle AB\Gamma + \angle ABD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, άρα τα σημεία Γ, B, Δ είναι συνευθειακά.

γ) Τα K, Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΓΔ, άρα $K\Lambda \parallel \Gamma\Delta$ (1).

Επειδή οι ευθείες ΚΓ, ΔΛ τέμνονται στο Α, λόγω της (1) το τετράπλευρο ΚΛΓΔ είναι τραπέζιο.



1720. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ. Τα τμήματα ΓΖ και ΒΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘΗ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΖ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισόπλευρο.

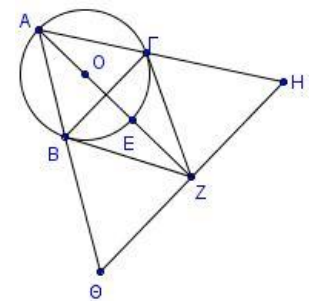
(Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΑΓΖΒ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο,.

(Μονάδες 10)



α) Τα ΖΒ, ΖΓ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ζ προς το κύκλο, άρα είναι ίσα. Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, τα τόξα AB, ΒΓ, ΑΓ θα είναι ίσα με 120° .

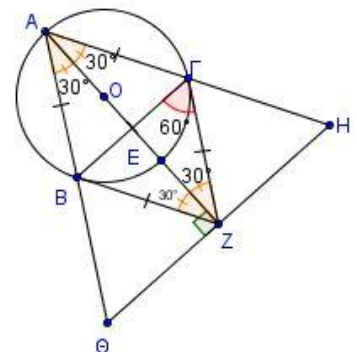
Η γωνία ΒΓΖ είναι υπό χορδής και εφαπτομένης στο τόξο ΒΓ,

άρα $\angle B\Gamma Z = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$. Το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές και έχει μια γωνία

60° , οπότε είναι ισόπλευρο.

β) Επειδή τα τρίγωνα ABΓ και ΒΓΖ είναι ισόπλευρα, ισχύει ότι

$AB = B\Gamma = A\Gamma$ και $B\Gamma = BZ = \Gamma Z$, άρα το τετράπλευρο ΑΓΖΒ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.



γ) Οι AZ , $B\Gamma$ είναι κάθετες γιατί είναι διαγώνιες του ρόμβου. Όμως και οι AZ , ΘH είναι κάθετες, άρα $B\Gamma \parallel \Theta H$. Επειδή οι $H\Gamma$ και ΘB τέμνονται στο A , το τετράπλευρο $B\Gamma H\Theta$ είναι τραπέζιο.

Είναι $\Theta = AB\Gamma = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $B\Gamma, \Theta H$ που τέμνονται από την $A\Theta$ και $H = A\Gamma B = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $B\Gamma, \Theta H$ που τέμνονται από την AH .

Είναι $\Gamma ZH = \Theta = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\Gamma Z, B\Theta$ που τέμνονται από την ΘH και $BZ\Theta = H = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $BZ, \Gamma H$ που τέμνονται από την ΘH . Τα τρίγωνα $B\Theta Z$ και ΓZH έχουν τις γωνίες τους ίσες με 60° , οπότε είναι ισόπλευρα και ισχύει ότι $B\Theta = BZ$, $\Theta H = \Theta Z + ZH = B\Gamma + B\Gamma = 2B\Gamma$

1739. Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τα ίσα τόξα AB και $A\Gamma$, το καθένα ίσο με 120° . Έστω Δ και E τα μέσα των τόξων AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

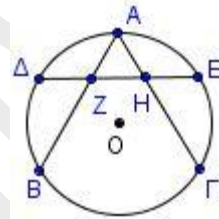
(Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και AHE είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.

(Μονάδες 10)

γ) Η χορδή ΔE τριχοτομείται από τις χορδές AB και $A\Gamma$.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Επειδή καθένα από τα τόξα AB και $A\Gamma$ είναι 120° , τότε $B\Gamma = 360^\circ - 2 \cdot 120^\circ = 120^\circ$.

Επειδή τα τόξα AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ είναι ίσα και οι αντίστοιχες χορδές τους θα είναι ίσες, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

β) Επειδή τα Δ, E είναι μέσα των τόξων AB , $A\Gamma$, τα τόξα $A\Delta$, ΔB , AE , $E\Gamma$ θα είναι ίσα με 60° .

Είναι $\Delta AZ = A\Delta Z = HAE = HEA = 30^\circ$ γιατί είναι εγγεγραμμένες στα

τόξα των 60° . Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AZ\Delta$, έχουμε:

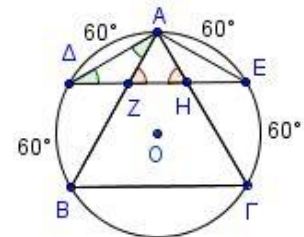
$$\Delta AZ + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta AZ = 120^\circ \text{ και } \text{όμοια } AHE = 120^\circ.$$

Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και AHE έχουν:

1) $A\Delta = AE$ γιατί τα αντίστοιχα τόξα τους είναι ίσα

2, 3) $\Delta AZ = A\Delta Z = HAE = HEA = 30^\circ$,

οπότε με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα.



γ) Επειδή $\Delta AZ = AHE = 120^\circ$, είναι $AZH = AHZ = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο AZH είναι

ισόπλευρο και έχει $AZ = ZH = AH$. Όμως $AZ = Z\Delta$ και $AH = HE$ αφού τα τρίγωνα $AZ\Delta$

και AHE είναι ισοσκελή, άρα και $\Delta Z = ZH = HE$.

1768. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και μια επίκεντρη γωνία AOB ίση με

120° . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο P . Θεωρούμε σημείο M του τόξου AB και φέρουμε τις χορδές AM και BM , οι οποίες προεκτείνόμενες τέμνουν τις PB και PA στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο APB είναι ισόπλευρο.

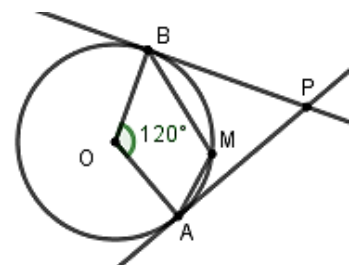
(Μονάδες 8)

β) $\angle MAB + \angle MBA = 60^\circ$.

(Μονάδες 8)

γ) Για ποια θέση του M είναι $AM \perp BP$;

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν

είναι ίσα, άρα $PA=PB$ και το τρίγωνο PAB είναι ισοσκελές.

Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΟΒΡ έχουμε:

$$P + 120^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow P = 60^\circ.$$

Το τρίγωνο PAB είναι ισοσκελές με μία γωνία του ίση με 60° , άρα είναι ισόπλευρο.

β) Επειδή $\angle AOB = 120^\circ$, το τόξο AMB είναι 120° , οπότε το μη κυρτογώνιο τόξο AB είναι ίσο με 240° . Η γωνία AMB είναι εγγεγραμμένη στο μη κυρτογώνιο τόξο AB , άρα

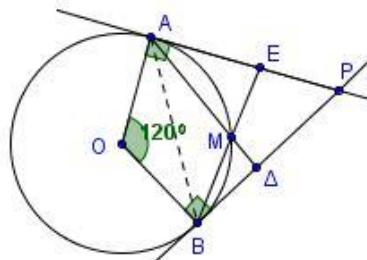
$$\angle AMB = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ. \text{ Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου MAB}$$

έχουμε: $\text{MAB} + \text{MBA} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \text{MAB} + \text{MBA} = 60^\circ$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta B \Gamma$ είναι $B = 60^\circ$ οπότε $MAB = 30^\circ$.

Από το ερώτημα β προκύπτει ότι $\text{MBA} = 30^\circ$. Άρα $\text{MA} = \text{MB}$.

Τελικά $AM \perp BP$ στην περίπτωση που το M είναι μέσο του τόξου AB .



1772. Έστω κύκλος (O, ρ) και E το μέσον του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στο κύκλο στο E . Οι προεκτάσεις των OB, OG τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Z και H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ || ΖΗ (Μονάδες 5)

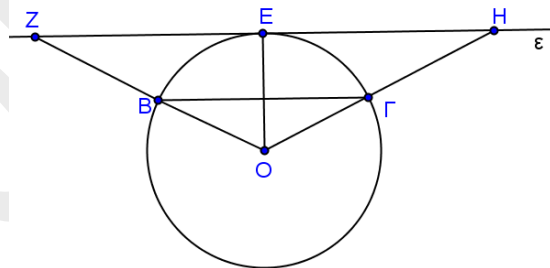
β) $OZ = OH$ (Μονάδες 5)

γ) Αν Β το μέσον του ΟΖ

ι. να αποδείξετε ότι $BEZ = \frac{ZO\Gamma}{4}$. (Μονάδες 8)

ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZOH .

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Επειδή η ΟΕ είναι ακτίνα και η ΖΗ εφαπτομένη του

κύκλου στο Ε, ισχύει ότι $OE \perp ZH$ (1).

Επειδή το Ε είναι μέσον του τόξου ΒΓ, το ΟΕ είναι

απόστημα της χορδής, άρα $OE \perp BG$ (2).

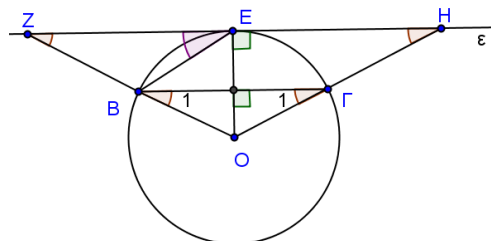
Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $B\Gamma \parallel ZH$.

β) Επειδή $OB = OG = \rho$, το τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι ισοσκελές

και έχει $B_1 = \Gamma_1$. Όμως $B_1 = Z$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $B\Gamma$ και ZH που τέμνονται από την OZ

και $\Gamma_1 = H$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $B\Gamma$ και ZH που τέμνονται από την OH , άρα.

$Z = H$, οπότε το τρίγωνο OZH είναι ισοσκελές, δηλαδή $OZ = OH$.



γ) i. Η γωνία BEZ είναι υπό χορδής και εφαπτομένης, οπότε ισούται με κάθε εγγεγραμμένη γωνία που έχει το ίδιο αντίστοιχο τόξο, δηλαδή $BEZ = \frac{BE}{2}$. Η γωνία ZOH είναι επίκεντρη άρα το μέτρο της είναι

ίσο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου, δηλαδή $ZOE = BE$ άρα $BEZ = \frac{ZOE}{2}$.

Επειδή $BE = EG$, είναι και $BOE = GOE$, δηλαδή στο ισοσκελές τρίγωνο OZH το OE είναι διχοτόμος,

δηλαδή $ZOE = EOH = \frac{ZOH}{2}$, άρα $BEZ = \frac{ZOE}{2} = \frac{\frac{ZOH}{2}}{2} = \frac{ZOH}{4}$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ZEO η EB είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$EB = ZB = BO = \frac{ZO}{2}$. Τότε το τρίγωνο OBE είναι ισόπλευρο ($OB = BE = EO = \rho$).

Άρα $BOE = 60^\circ$ και $EOH = 2BOE = 120^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου OZH έχουμε:

$$OZE + OHE + ZOH = 180^\circ \Leftrightarrow 2OZE + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2OZE = 60^\circ \Leftrightarrow OZE = 30^\circ = OHE$$

1848. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε τις χορδές

$AD = BG$. Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

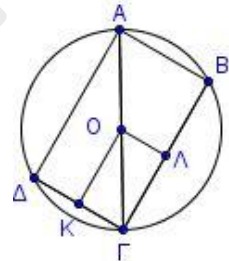
- α) Οι χορδές AB και ΔΓ είναι παράλληλες.
- β) Το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ορθογώνιο.
- γ) Η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου.
- δ) Το τετράπλευρο ΟΛΓΚ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 7)

(Μονάδες 6)



Λύση

α) Οι γωνίες ABΓ και ΑΔΓ είναι ορθές γιατί είναι εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο.

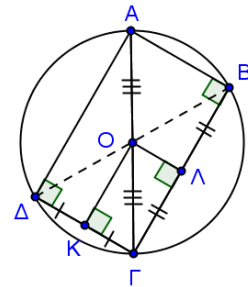
Τα ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και ΑΔΓ έχουν :

- $AD = BG$
- ΑΓ κοινή

Επειδή τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, είναι ίσα. Επομένως $AB = ΔΓ$.

Το τετράπλευρο ABΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

Επομένως είναι παραλληλόγραμμο και $AB \parallel ΔΓ$.



β) Το παραλληλόγραμμο ABΓΔ έχει $\Delta = 90^\circ$, άρα είναι ορθογώνιο.

γ) Η γωνία Α είναι εγγεγραμμένη και ορθή, άρα η ΒΔ είναι διάμετρος αφού το τόξο ΒΓΔ είναι ημικύκλιο.

δ) Επειδή Κ, Λ μέσα των ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα, τα ΟΚ, ΟΛ είναι αποστήματα των χορδών, οπότε οι γωνίες Κ και Λ είναι ορθές. Το τετράπλευρο ΟΛΓΚ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.

1883. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ ($A = 90^\circ$). Με διάμετρο την πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την ΑΒ στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΓΑΔ = Β$

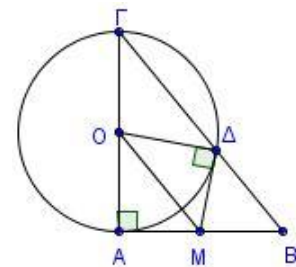
(Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

γ) Το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Η γωνία ΓΔΑ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, από το άθροισμα των γωνιών του ισχύει ότι:

$$\Gamma A\Delta + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma A\Delta = 90^\circ - \Gamma.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το άθροισμα των γωνιών του ισχύει ότι:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow B = 90^\circ - \Gamma. \text{ Άρα } \Gamma A \Delta = B = 90^\circ - \Gamma.$$

β) Είναι $ΟΓ = ΟΔ = ρ$, οπότε το τρίγωνο $ΟΓΔ$ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι:

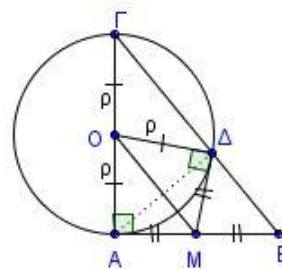
$$\Gamma = \mathbf{O} \Delta \Gamma.$$

Εἶναι $M\Delta B + M\Delta O + O\Delta \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow M\Delta B + 90^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\angle M\Delta B = 90^\circ - \Gamma = B$, άρα το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή $MA \perp OA$ και $MD \perp OD$, τα MA, MD είναι εφαπτόμενα τμήματα,

οπότε $MA = MD$. Όμως $MD = MB$ αφού το τρίγωνο MDB είναι ισοσκελές, άρα $MD = MA = MB$, δηλαδή το M είναι μέσο του AB .



1892. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O . Θεωρούμε το μέσο M του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ και το ύψος AA' του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ διχοτόμος της γωνίας ΔΑΟ.

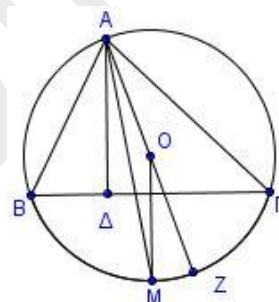
(Μονάδες 8)

β) $OA\Gamma = \Delta AB$

(Μονάδες 8)

$$\gamma) \Delta \mathbf{AO} = \mathbf{B} - \Gamma$$

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή το Μ είναι το μέσο του τόξου ΒΓ, το ΟΜ είναι απόστημα της χορδής ΒΓ, δηλαδή $ΟΜ \perp ΒΓ$.

Όμως $A\Delta \perp B\Gamma$, άρα $A\Delta \parallel OM$.

Είναι $\Delta AM = \Delta MO$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων OM, AD που

τέμνονται από την ΑΜ και $MAO = MO(2)$ γιατί το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές γιατί οι πλευρές του ΟΑ,ΟΜ είναι ακτίνες του κύκλου.

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $\Delta AM = MAO$ (3) , άρα η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΟ.

β) Επειδή τα τόξα ΒΜ και ΜΓ είναι ίσα είναι και $\widehat{BAM} = \widehat{MAG}$ (4)

γιατί είναι εγγεγραμμένες στα τόξα αυτά.

Αφαιρώντας από την (4) τη (3) έχουμε:

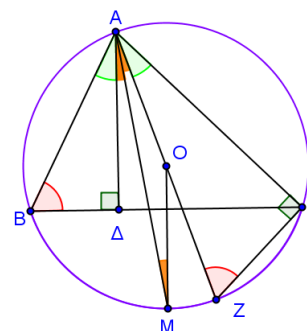
$$\text{BAM} - \Delta \text{AM} = \text{MA}\Gamma - \text{MAO} \Leftrightarrow \Delta \text{AB} = \text{OA}\Gamma.$$

γ) Είναι $B = Z$ ως εγγεγραμμένες στο τόξο $ΑΓ$. Η γωνία $ΑΓΖ$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο άρα είναι ορθή.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΓΖ έχουμε: $\angle \text{ΑΓΖ} + \angle \text{Ζ} = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \text{ΑΓΖ} = 90^\circ - \text{Β}.$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ έχουμε ότι: $\Delta \text{ΑΓ} + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta \text{ΑΓ} = 90^\circ - \Gamma$.

$$\text{Είναί } \Delta \text{ΑΟ} = \Delta \text{ΑΓ} - \text{ΖΑΓ} = 90^\circ - \Gamma - (90^\circ - \text{Β}) = 90^\circ - \Gamma - 90^\circ + \text{Β} = \text{Β} - \Gamma.$$



1897. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Έστω σημείο Δ του τόξου AB τέτοιο, ώστε $\Delta B \perp B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \perp A\Gamma$.

(Μονάδες 8)

β) Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta B\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

γ) Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OM = \frac{AH}{2}$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Επειδή οι γωνίες $\Delta B\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι εγγεγραμμένες στα τόξα $\Delta A\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ αντίστοιχα, ισχύει ότι:

$$\Delta B\Gamma + \Delta A\Gamma = \frac{(\Delta A\Gamma)}{2} + \frac{(\Delta B\Gamma)}{2} = \frac{(\Delta A\Gamma) + (\Delta B\Gamma)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Delta B\Gamma + \Delta A\Gamma = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \Delta A\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Delta A\Gamma = 90^\circ. \text{ Άρα } A\Delta \perp A\Gamma.$$

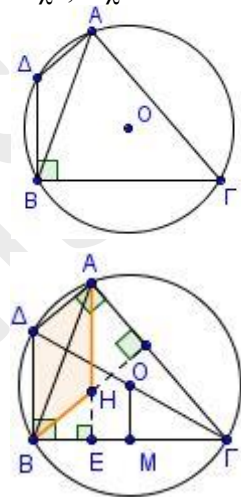
β) Είναι $AH \perp B\Gamma$ και $\Delta B \perp B\Gamma$, άρα $AH \parallel \Delta B$ (1)

Είναι $BH \perp A\Gamma$ και $A\Delta \perp A\Gamma$, άρα $BH \parallel A\Delta$ (2).

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $A\Delta B\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.

γ) Τα O, M είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$, οπότε $OM = \frac{\Delta B}{2} = \frac{AH}{2}$,

αφού τα $\Delta B, AH$ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.



12419. Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R > r$, τέμνονται στα σημεία A και B . Από το σημείο A φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διάκεντρο των κύκλων, η οποία τέμνει τους κύκλους (K, R) και (Λ, r) στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\Delta = 2K\Lambda$

(Μονάδες 15)

β) Τα σημεία B και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Έστω KH και $\Lambda\Theta$ τα αποστήματα των χορδών $A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.

Είναι $KH \perp \Gamma\Delta$, $\Lambda\Theta \perp \Gamma\Delta$, οπότε $KH \parallel \Lambda\Theta$.

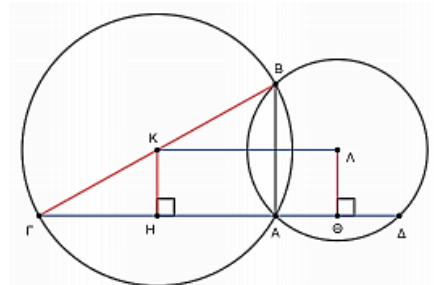
Όμως είναι και $K\Lambda \parallel \Gamma\Delta$, οπότε το τετράπλευρο $KH\Theta\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή έχει και $\angle H = 90^\circ$ το $KH\Theta\Lambda$ είναι ορθογώνιο, οπότε $K\Lambda = H\Theta$.

Επειδή το KH είναι απόστημα της χορδής $A\Gamma$, το H είναι μέσο της χορδής, οπότε $HA = \frac{A\Gamma}{2}$ (1).

Επειδή το $\Lambda\Theta$ είναι απόστημα της χορδής $A\Delta$, το Θ είναι μέσο της χορδής, οπότε $A\Theta = \frac{A\Delta}{2}$ (2)

$$\text{Είναι } K\Lambda = H\Theta = HA + A\Theta \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{A\Gamma}{2} + \frac{A\Delta}{2} = \frac{A\Gamma + A\Delta}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 2K\Lambda.$$

β) Η διάκεντρος $K\Lambda$ των δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους AB , οπότε $AB \perp K\Lambda$. Επίσης, $K\Lambda \parallel \Gamma\Delta$. Άρα, $AB \perp \Gamma\Delta$. Επομένως, η γωνία BAG είναι ορθή και εγγεγραμμένη στον κύκλο (K, R) , οπότε η $B\Gamma$ είναι διάμετρος. Συνεπώς, τα σημεία B και Γ είναι αντιδιαμετρικά.



3^ο Θέμα

12460. Στον κύκλο (O, ρ) δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ έτσι ώστε $AB \parallel \Gamma\Delta$. Στο σημείο A φέρνουμε εφαπτομένη στον κύκλο, η οποία τέμνει την προέκταση της $\Gamma\Delta$ προς το Δ , στο σημείο P . Αν η

γωνία $\Delta PA = 25^\circ$ και το τόξο $\Gamma\Delta$ (στο οποίο δεν ανήκουν τα A, B) είναι τριπλάσιο του τόξου AB (στο οποίο δεν ανήκουν τα Γ, Δ) να αποδείξετε ότι:

α) τα τόξα ΔAB και $AB\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

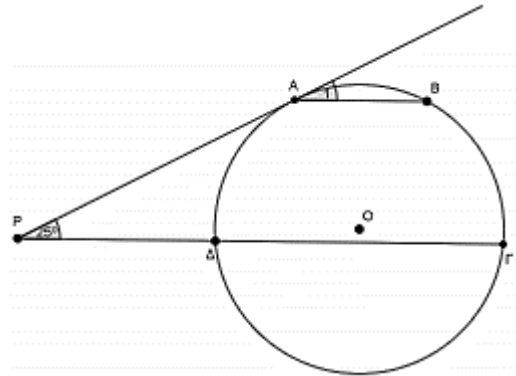
β) το τόξο AB που είναι μικρότερο του ημικυκλίου ισούται με 50° .

(Μονάδες 6)

γ) το τόξο ΔA στο οποίο δεν ανήκουν τα B, Γ ισούται με 80° . (Μονάδες 6)

δ) το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

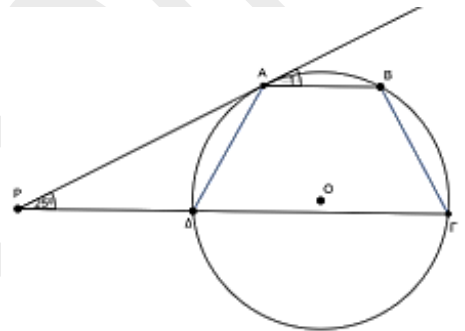
(Μονάδες 6)



Λύση

α) Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$ είναι $\Delta A = B\Gamma$ γιατί τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών είναι ίσα, επομένως
 $\Delta A + AB = B\Gamma + AB \Leftrightarrow \Delta AB = AB\Gamma$

β) Είναι $\Delta PA = A_1$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την PA . Όμως η γωνία A_1 είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης, επομένως είναι ίση με οποιαδήποτε εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής. Όμως η εγγεγραμμένη, ισούται με το μισό του τόξου στο οποίο βαίνει. Άρα το τόξο έχει μέτρο διπλάσιο της εγγεγραμμένης, οπότε το τόξο της χορδής θα έχει μέτρο διπλάσιο της γωνίας χορδής και εφαπτομένης. Άρα $AB = 2 \cdot 25^\circ = 50^\circ$.



γ) Είναι $\Gamma\Delta = 3AB = 150^\circ$, και

$$AB + \Gamma\Delta + \Delta A + B\Gamma = 360^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 150^\circ + 2\Delta A = 360^\circ \Leftrightarrow 2\Delta A = 160^\circ \Leftrightarrow \Delta A = 80^\circ.$$

δ) Είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB < \Gamma\Delta$, γιατί $AB < \Gamma\Delta$. Οι $\Delta A, B\Gamma$ δεν είναι παράλληλες γιατί αν ήταν το $AB\Gamma\Delta$ θα ήταν παραλληλόγραμμα και τότε $AB = \Gamma\Delta$ που είναι άτοπο. Άρα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο. Ακόμη $\Delta A = B\Gamma$ γιατί τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα, οπότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ**2^ο Θέμα**

12641. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα 4 cm . Από σημείο P εκτός του κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB προς τον κύκλο. Επίσης η γωνία APB ισούται με 60° .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $PAOB$ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας APB . (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος OP . (Μονάδες 9)

Λύση

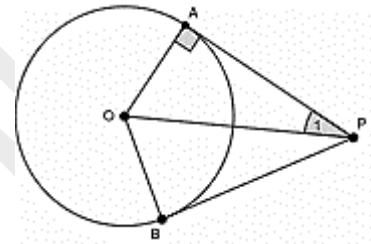
α) Επειδή τα PA, PB είναι εφαπτόμενα του κύκλου, οι ακτίνες OA, OB είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτομένες, άρα $\angle A = \angle B = 90^\circ$.

Στο τετράπλευρο $PAOB$ ισχύει ότι $\angle A + \angle B = 180^\circ$
οπότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

β) Γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των

εφαπτόμενων τμημάτων άρα $\angle P_1 = \frac{\angle APB}{2} = 30^\circ$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAP η γωνία P_1 ισούται λόγω του (β) ερωτήματος με 30° , οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $OA = \frac{OP}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{OP}{2} \Leftrightarrow OP = 8\text{ cm}$.



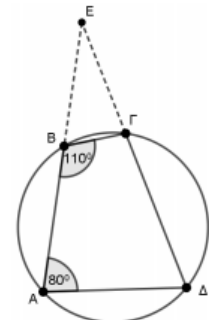
12643. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$ προεκτενόμενες τέμνονται στο σημείο E . Αν η γωνία A του τετραπλεύρου ισούται με 80° και η γωνία B ισούται με 110° , να υπολογίσετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) το μέτρο της γωνία $E\Gamma B$.

(Μονάδες 12)

β) το μέτρο της γωνία BEG .

(Μονάδες 13)

**Λύση**

α) Η γωνία $E\Gamma B$ είναι εξωτερική στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, άρα θα ισούται με την απέναντι εσωτερική. Δηλαδή $E\Gamma B = \angle A = 80^\circ$.

β) Η γωνία $E\Gamma B$ είναι παραπληρωματική της γωνίας B του τετραπλεύρου, οπότε θα ισούται με $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $E\Gamma B$ έχουμε:

$$\angle BE\Gamma + \angle E\Gamma B + \angle E\Gamma B = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BE\Gamma + 70^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BE\Gamma = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

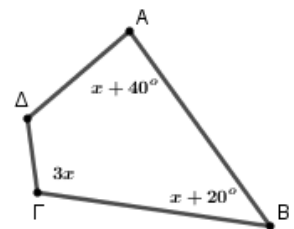
13818. Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ το οποίο είναι εγγράψιμο. Οι γωνίες A, B, Γ έχουν αντίστοιχα μέτρα $x + 40^\circ, x + 20^\circ, 3x$. Να υπολογίσετε :

α) πόσες μοίρες είναι το x .

(Μονάδες 12)

β) τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 13)

**Λύση**

α) Επειδή το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο, οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
 Άρα $A + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow x + 40^\circ + 3x = 180^\circ \Leftrightarrow 4x = 140^\circ \Leftrightarrow x = 35^\circ$.

β) Έχουμε $A = 35^\circ + 40^\circ = 75^\circ$, $B = 35^\circ + 20^\circ = 55^\circ$, $\Gamma = 3 \cdot 35^\circ = 105^\circ$.

Οι γωνίες B και Δ είναι απέναντι γωνίες του εγγράψιμου τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, άρα είναι παραπληρωματικές. Οπότε $B + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 55^\circ + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta = 125^\circ$

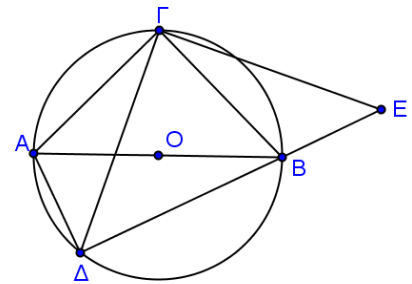
4^ο Θέμα

1712. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και έστω AB μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E ώστε $BE = AD$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)
- Η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη στην ΓE . (Μονάδες 8)

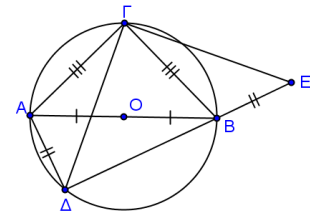
β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ , η ΓE είναι εφαπτομένη του κύκλου. (Μονάδες 9)



Λύση

α) i. Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ έχουν:

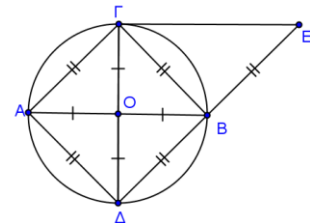
- $AG = BG$ γιατί τα τόξα AG και $B\Gamma$ είναι ίσα
- $BE = AD$ και
- $\angle A\Delta\Gamma = \angle BE\Gamma$ γιατί το τετράπλευρο $A\Delta B\Gamma$ είναι εγγράψιμο και κάθε γωνία του ισούται με την απέναντί της εξωτερική.
 Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



ii. Επειδή τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$, $BE\Gamma$ είναι ίσα, είναι και $\angle A\Gamma\Delta = \angle B\Gamma E$.

Όμως $\angle A\Gamma\Delta + \angle \Gamma B\Delta = 90^\circ$, άρα

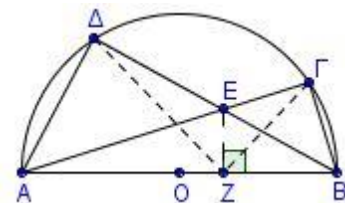
$$\angle B\Gamma E + \angle \Gamma B\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \Delta\Gamma E = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\Delta \perp \Gamma E.$$



β) Όταν το Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ , τότε η OG που είναι κάθετη στη ΓE είναι ακτίνα του κύκλου, οπότε η ΓE είναι εφαπτομένη του κύκλου.

1769. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB και δύο χορδές του AG και BA , οι οποίες τέμνονται στο σημείο E . Φέρουμε $EZ \perp AB$. Να αποδείξετε ότι:

- $\angle A\Gamma = \angle B\Gamma$ (Μονάδες 7)
- Τα τετράπλευρα $A\Delta EZ$ και $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 9)
- Η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta Z\Gamma$. (Μονάδες 9)



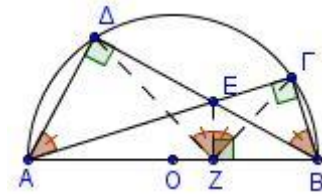
Λύση

α) Οι γωνίες $\Delta A\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ είναι εγγεγραμμένες στο τόξο $\Delta\Gamma$, οπότε είναι ίσες.

β) Είναι $\angle A\Delta B = \angle A\Gamma B = 90^\circ$ γιατί είναι εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο. Στο τετράπλευρο $A\Delta EZ$ είναι $\angle A\Delta B + \angle EZA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, άρα

το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

Στο τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι $\angle \Gamma B + \angle E Z B = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, άρα το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.



γ) Στο εγγράψιμο ΑΔΕΖ η πλευρά ΔΕ φαίνεται από τις κορυφές Α, Ζ υπό τις γωνίες ΔΑΓ και ΔΖΕ, άρα οι γωνίες αυτές είναι ίσες.

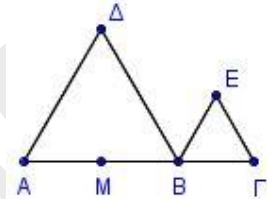
Στο εγγράψιμο ΕΖΒΓ η πλευρά ΕΓ φαίνεται από τις κορυφές Ζ και Β υπό τις γωνίες ΔΒΓ και ΕΖΓ, άρα οι γωνίες αυτές είναι ίσες. Επειδή $\angle Z E = \angle Z \Gamma$, η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΖΓ.

1774. Έστω Α,Β,Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2BG$. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο ($AD \parallel BE$). (Μονάδες 9)

β) Τα τρίγωνα ΔΜΒ, ΔΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΔΜΒΕ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 8)



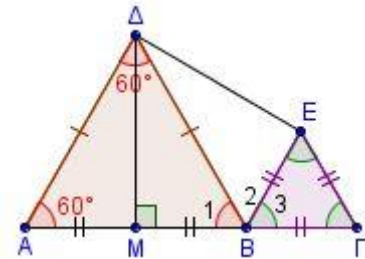
Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΓ είναι ισόπλευρα, οι γωνίες τους είναι ίσες με 60° .

Επειδή οι γωνίες Α και Β₃ είναι ίσες, είναι και εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΔ, ΒΕ που τέμνονται από την ΑΒ, οι ευθείες ΑΔ και ΒΕ είναι παράλληλες (1).

Έστω ότι οι ΔΕ, ΑΒ είναι παράλληλες. Τότε το τετράπλευρο ΑΔΕΒ θα έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και θα είναι παραλληλόγραμμο. Τότε όμως $AD = BE$, που είναι άτοπο αφού $AD = AB$ και $BE = BG$. Άρα οι ΔΕ, ΑΒ τέμνονται (2).

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο.



β) Τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ έχουν:

1) τη πλευρά ΔΒ κοινή

2) $BM = BE = \frac{AB}{2}$ και

3) $B_1 = 60^\circ = B_2$, γιατί $B_2 = 180^\circ - B_1 - B_3 = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Το ΔΜ είναι διάμεσος στο ισόπλευρο τρίγωνο, άρα θα είναι και ύψος του.

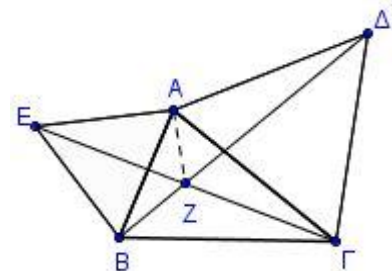
Επειδή τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ είναι ίσα, είναι και $\angle E B = \angle M = 90^\circ$. Τότε $\angle E B + \angle M = 180^\circ$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου ΔΜΒΕ είναι παραπληρωματικές, άρα το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

1776. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΓΔ. Ονομάζουμε Ζ το σημείο τομής των τμημάτων ΒΔ, ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών. (Μονάδες 10)

β) Τα τετράπλευρα ΑΖΓΔ, ΑΖΒΕ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 10)

γ) $\angle B Z \Gamma = 120^\circ$. (Μονάδες 5)

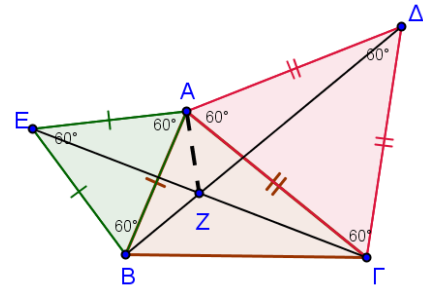


Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ έχουν:

- 1) $AE = AB$ πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΕΒ
- 2) $AG = AD$ πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΓΔ και
- 3) $\angle EAG = \angle BAD = \angle BAG + 60^\circ$

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\angle AEG = \angle ABD$, $\angle ADB = \angle AGE$.



β) Επειδή $\angle ADB = \angle AGE$, στο τετράπλευρο ΑΖΓΔ η πλευρά του ΑΖ φαίνεται από τις κορυφές Γ και Δ υπό ίσες γωνίες, οπότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

Επειδή $\angle AEG = \angle ABD$, στο τετράπλευρο ΑΖΒΕ η πλευρά ΑΖ φαίνεται από τις κορυφές Ε και Β υπό ίσες γωνίες, οπότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

γ) Γνωρίζουμε ότι στα εγγράψιμα οι απέναντι γωνίες τους είναι παραπληρωματικές, οπότε στο εγγράψιμο ΑΖΓΔ είναι: $\angle AZG + \angle D = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AZG + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AZG = 120^\circ$.

Στο εγγράψιμο ΑΖΒΕ είναι $\angle AZB + \angle E = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AZB + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AZB = 120^\circ$.

Είναι $\angle BZG = 360^\circ - \angle AZG - \angle AZB = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$

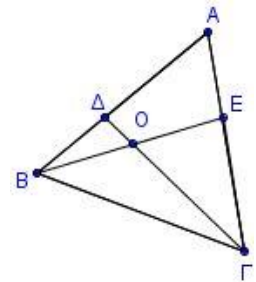
1779. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε να είναι $AD = AE$. Έστω Ο το σημείο τομής των ΓΔ και ΒΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $\angle BEG = \angle GDA$. (Μονάδες 10)
- ii. $\angle BOG = 120^\circ$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΕΟΔ είναι εγγράψιμο.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΔΓ έχουν:

- 1) $AD = EG$ υπόθεση
- 2) $AG = BG$ πλευρές του ισόπλευρου και
- 3) $\angle G = \angle A = 60^\circ$ γιατί είναι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου.

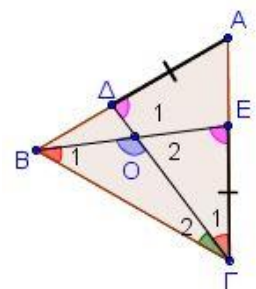
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\angle BEG = \angle GDA$.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΔΓ είναι ίσα, είναι και $\angle B_1 = \angle G_1$.

Όμως $\angle G_2 = \angle G - \angle G_1 = 60^\circ - \angle B_1 \Leftrightarrow \angle G_2 + \angle B_1 = 60^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΟΓ έχουμε:

$$\angle BOG + \angle G_2 + \angle B_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BOG + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BOG = 120^\circ$$



β) Είναι $\angle DOE = \angle BOG = 120^\circ$ ως κατακορυφήν και $\angle A = 60^\circ$ γιατί είναι γωνία του ισόπλευρου τριγώνου, άρα $\angle DOE + \angle A = 180^\circ$, δηλαδή στο τετράπλευρο ΑΔΟΕ δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

1799. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και AD, BE τα ύψη του.

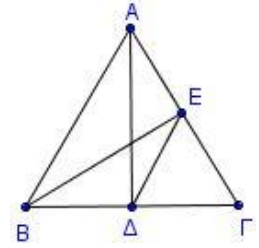
Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = 2ED$. (Μονάδες 6)

β) $\angle BED = \frac{A}{2}$. (Μονάδες 7)

γ) Το τετράπλευρο $AEDB$ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 7)

δ) $\angle ABE = \angle ADE$. (Μονάδες 7)



Λύση

α) Το ED είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα

του ορθογωνίου τριγώνου BEG , άρα $ED = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2ED$.

β) Είναι $ED = BD = DG = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα το τρίγωνο EDB είναι ισοσκελές και έχει $\angle BED = \angle EBD$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου BEG , έχουμε:

$$\angle EBD + \angle G = 90^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \angle BED = 90^\circ - \angle G$$

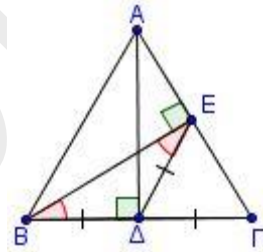
Από το άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \stackrel{B=\Gamma}{\Rightarrow} A + 2\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma = 180^\circ - A \Leftrightarrow \Gamma = \frac{180^\circ - A}{2}.$$

$$\text{Τότε } \angle BED = 90^\circ - \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ - 90^\circ + \frac{A}{2} = \frac{A}{2}$$

γ) Επειδή $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$, η πλευρά AB φαίνεται από τις κορυφές D, E υπό ίσες γωνίες, οπότε το τετράπλευρο $AEDB$ είναι εγγράψιμο.

δ) Επειδή το $AEDB$ είναι εγγράψιμο, η πλευρά του AE φαίνεται από τις κορυφές B, D υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $\angle ABE = \angle ADE$.

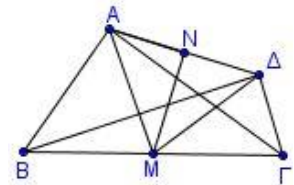


1807. Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ με $\angle A = \angle \Delta = 90^\circ$ και M, N τα μέσα των $B\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $AM = MD$ (Μονάδες 10)

β) Η MN είναι κάθετη στην $A\Delta$. (Μονάδες 10)

γ) $\angle B\Delta = \angle A\Delta$. (Μονάδες 5)



Λύση

α) Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του

ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ (1).

Η DM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του

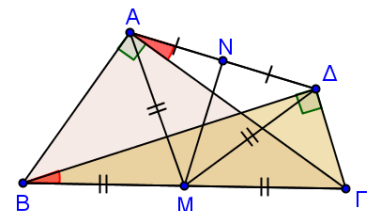
ορθογωνίου τριγώνου $\Delta B\Gamma$, άρα $DM = \frac{B\Gamma}{2}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $AM = DM$.

β) Το τρίγωνο AMD είναι ισοσκελές και η MN είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή $MN \perp A\Delta$.

γ) Επειδή $\angle B\hat{A}\Gamma = \angle B\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ στο τετράπλευρο $BA\Delta\Gamma$ η πλευρά του $B\Gamma$ φαίνεται από τις κορυφές A και Δ υπό ίσες γωνίες, άρα το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο. Η πλευρά $\Delta\Gamma$ του τετραπλεύρου $BA\Delta\Gamma$ φαίνεται από τις κορυφές B και A υπό τις γωνίες $\angle B\hat{\Delta}A$ και $\angle A\hat{\Delta}A$.

Επειδή το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο, οι γωνίες αυτές είναι ίσες.



1847. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Έστω σημείο A εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG ώστε να ισχύει $\angle BAG = 60^\circ$. Έστω ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει τις AB και AG στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABOG$ είναι εγγράψιμο με $OA = 2OB$.

(Μονάδες 6)

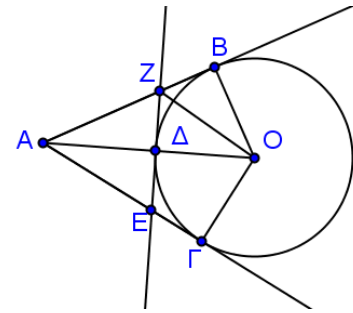
β) Το τρίγωνο AEZ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 6)

γ) $2ZB = AZ$.

(Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο $EZBG$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 6)



Λύση

α) Τα OA , OB είναι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής με τις εφαπτομένες AB και AG αντίστοιχα, άρα $OB \perp AB$ και $OG \perp AG$.

Στο τετράπλευρο $ABOG$ είναι $B + G = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, οπότε είναι εγγράψιμο.

Γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία AO διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων, δηλαδή $\angle A_1 = \angle A_2 = 30^\circ$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB είναι $\angle A_2 = 30^\circ$, άρα

$$OB = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow OA = 2OB.$$

β) Η ZE είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Δ , άρα τα ZE και $O\Delta$ είναι κάθετα.

Στο τρίγωνο AZE το $A\Delta$ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Επειδή όμως $\angle BAG = 60^\circ$, το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

γ) Τα τμήματα $ZB, Z\Delta$ είναι εφαπτόμενα τμήματα οπότε $ZB = Z\Delta$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο

$$AZ\Delta \text{ είναι } \angle A_2 = 30^\circ, \text{ άρα } Z\Delta = \frac{AZ}{2} \Leftrightarrow AZ = 2Z\Delta \Leftrightarrow AZ = 2ZB.$$

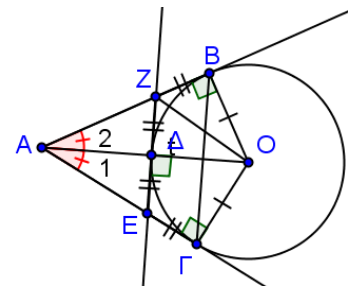
δ) Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν, είναι ίσα, ισχύει ότι $AB = AG$ και το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές. Το AO είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής στο ισοσκελές τρίγωνο ABG , άρα είναι και ύψος, δηλαδή $AO \perp BG$. Όμως $AO \perp EZ$, άρα $EZ \parallel BG$ (1).

Είναι $AB = AG$ και $AE = AZ$, άρα και

$$AB - AE = AG - AZ \Leftrightarrow BE = ZG \text{ (2).}$$

Επειδή οι BZ και EG τέμνονται στο A , από τις (1),(2)

προκύπτει ότι το τετράπλευρο $EZBG$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



1864. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (O, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔB να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία B είναι διπλάσια της Δ και οι πλευρές AB και $B\Gamma$ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη $B\Delta$ στο O , η οποία τέμνει τις πλευρές $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ στα E και Z αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 6)

β) Να συγκρίνεται τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta \Gamma B$.

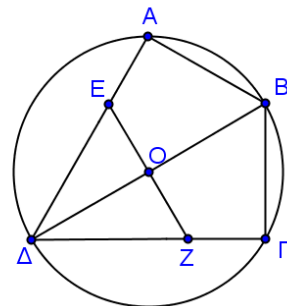
(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma O$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABOE$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

(Μονάδες 6)



Λύση

α) Οι γωνίες Α και Δ είναι ορθές γιατί είναι εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο.

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο άρα οι γωνίες Β και Δ είναι παραπληρωματικές. Δηλαδή $\Delta + B = 180^\circ$, όμως $B = 2\Delta$, άρα $2\Delta + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 3\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta = 60^\circ$ και $B = 120^\circ$

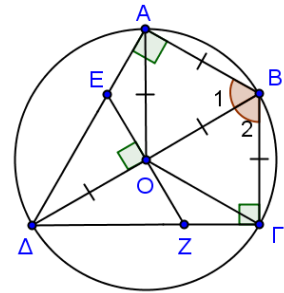
β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ έχουν:

1) την πλευρά ΒΔ κοινή και 2) $AB = BG$,
δηλαδή έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, έχουν και

$$B_1 = B_2 = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ. \text{ Τα τρίγωνα } \triangle AOB \text{ και } \triangle BOG \text{ είναι ισοσκελή}$$

($OA = OB = OG = \rho$) και έχουν μια γωνία ίση με 60° , άρα είναι ισόπλευρα, οπότε $AB = OA = OB = OG = BG = \rho$. Το τετράπλευρο ΑΒΓΟ έχει τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.



δ) Επειδή $A + EOB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΕ είναι παραπληρωματικές, άρα είναι εγγράφιμο σε κύκλο.

1886. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) και ΔΒΓ ($\Delta = 90^\circ$) (όπου Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ) και το μέσο Μ της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές.

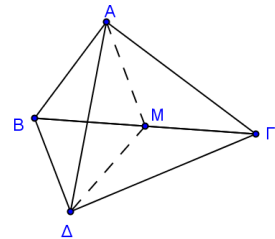
(Μονάδες 9)

β) $AM\Delta = 2A\Gamma\Delta$

(Μονάδες 9)

γ) $\Gamma B\Delta = \Gamma A\Delta$

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Το ΑΜ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα

$$\text{του, άρα } AM = \frac{BG}{2}.$$

Το ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΒΔΓ, άρα $\Delta M = \frac{BG}{2}$.

Επειδή $AM = \Delta M$, το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές.

β) Είναι $AM = \frac{BG}{2} = MG$, άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές

και ισχύει ότι: $MA\Gamma = M\Gamma A$.

Η γωνία ΑΜΒ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΓ άρα

$$AMB = MA\Gamma + M\Gamma A = 2M\Gamma A \quad (1)$$

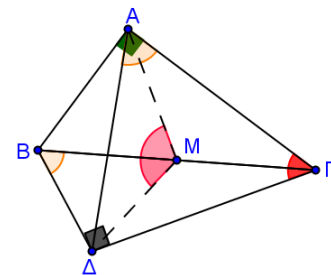
Είναι $\Delta M = \frac{BG}{2} = MG$, άρα το τρίγωνο ΔΜΓ είναι ισοσκελές και

ισχύει: $M\Gamma\Delta = M\Delta\Gamma$.

Η γωνία ΒΜΔ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ, άρα $BM\Delta = M\Gamma\Delta + M\Delta\Gamma = 2M\Gamma\Delta \quad (2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2) έχουμε:

$$AMB + BM\Delta = 2M\Gamma A + 2M\Gamma\Delta \Leftrightarrow AM\Delta = 2A\Gamma\Delta.$$



γ) Επειδή $BA\Gamma + B\Delta\Gamma = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι εγγράφιμο, οπότε η

πλευρά του $\Gamma\Delta$ φαίνεται από τις κορυφές A και B υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $\Gamma B\Delta = \Gamma A\Delta$.

1896. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) έχουμε ότι $B = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος AH και τη διάμεσο AM του τριγώνου $AB\Gamma$. Από την κορυφή B φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο AM , η οποία την τέμνει στο σημείο E όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \frac{AB}{2}$.

(Μονάδες 7)

β) $AH = BE$.

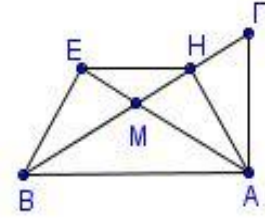
(Μονάδες 7)

γ) το τετράπλευρο $AHEB$ είναι εγγραψιμο.

(Μονάδες 6)

δ) $EH \parallel AB$.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $AM = BM = MG = \frac{BG}{2}$, οπότε το τρίγωνο MBA είναι ισοσκελές με βάση την AB και $\angle A_1 = \angle MBA = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο EAB είναι $\angle A_1 = 30^\circ$, άρα $BE = \frac{AB}{2}$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο BHA είναι $\angle MBA = 30^\circ$, άρα $AH = \frac{AB}{2}$, οπότε $AH = BE$.

γ) Επειδή $\angle BEA = \angle BHA = 90^\circ$, στο τετράπλευρο $AHEB$ η πλευρά του AB φαίνεται από τις κορυφές E και H υπό ίσες γωνίες, άρα το τετράπλευρο είναι εγγραψιμο.

δ) Τα ορθογώνια τρίγωνα MEB και MHA έχουν:

1) $AH = BE$

2) $\angle EMB = \angle HMA$ ως κατακορυφήν, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ME = MH$.

Τότε το τρίγωνο MEH είναι ισοσκελές με βάση την EH και έχει $\angle MEH = \angle MHE$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου MBA έχουμε:

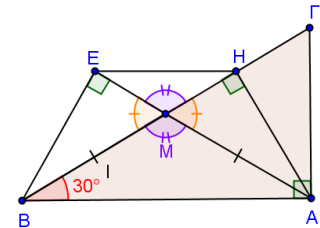
$$\angle BMA + \angle MBA + \angle A_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BMA + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BMA = 120^\circ.$$

Επειδή οι γωνίες $\angle BMA$ και $\angle EMH$ είναι κατακορυφήν, είναι και $\angle EMH = 120^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου EMH έχουμε:

$$\angle EMH + \angle MEH + \angle MHE = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2\angle MEH = 180^\circ \Leftrightarrow \angle MEH = 30^\circ = \angle MHE$$

Επειδή οι γωνίες $\angle MEH$ και $\angle A_1$ είναι εντός εναλλάξ των EH και AB που τέμνονται από την EA , είναι και ίσες, οι ευθείες EH και AB είναι παράλληλες.



13538. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ με $AB = A\Gamma = E\Gamma = E\Delta$, όπου Δ είναι το μέσο της $A\Gamma$ και $B\Gamma = \frac{AB}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

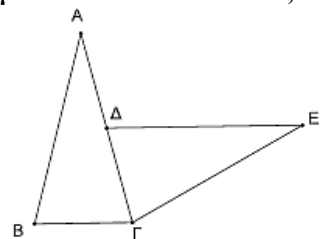
β) Αν η προέκταση της $E\Delta$ προς το Δ τέμνει την AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Z είναι το μέσο της AB .

(Μονάδες 8)

ii. $\angle E\Gamma = \angle EZ\Gamma$

(Μονάδες 7)

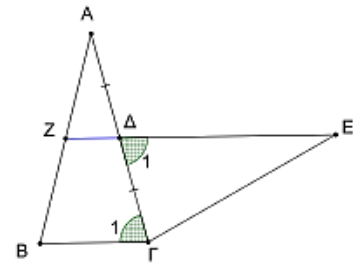


Λύση

α) Τα τρίγωνα ABΓ και ΕΓΔ έχουν:

- $AB = EG$, από τα δεδομένα
- $AG = ED$, από τα δεδομένα
- $BΓ = ΓΔ$, γιατί $BΓ = \frac{AB}{2} = \frac{AG}{2} = ΔΓ$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα ABΓ και ΕΓΔ είναι ίσα.

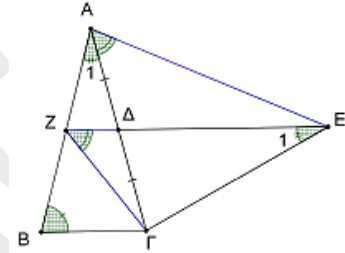


β) i. Επειδή τα τρίγωνα ABΓ και ΕΓΔ είναι ίσα έχουν και $Γ_1 = Δ_1$. Όμως οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ των ΕΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ, οπότε $EZ // BΓ$.

Στο τρίγωνο ABΓ το Δ είναι μέσο της ΑΓ και η ΔΖ είναι παράλληλη στη ΒΓ, άρα το Ζ είναι μέσο της ΑΒ.

ii. Από την ισότητα των τριγώνων ABΓ και ΕΓΔ προκύπτει ότι

$A_1 = E_1$, γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα. Άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι εγγραψιμο, αφού η πλευρά του ΓΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Α και Ε υπό ίσες γωνίες. Έτσι στο εγγραψιμο ΑΕΓΖ η πλευρά ΓΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Α και Ζ υπό ίσες γωνίες, άρα θα είναι $EAΓ = EZΓ$.

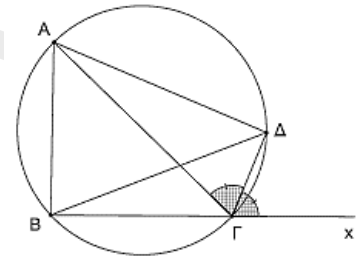


13444. Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ. Η γωνία ΔΓx είναι εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου και η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΓx.

α) Να αποδείξετε ότι $BAΔ = \frac{1}{2} ΑΓx$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές και να προσδιορίσετε τις ίσες πλευρές του. (Μονάδες 10)

γ) Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, να αποδείξετε ότι οι γωνίες ΑΓΒ και ΒΔΓ είναι συμπληρωματικές. (Μονάδες 5)

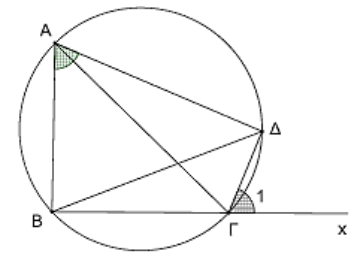


Λύση

α) Η γωνία $Γ_1$ είναι εξωτερική του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ABΓΔ, συνεπώς ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του, δηλαδή $Γ_1 = BAΔ$ (1).

Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΓx, άρα $Γ_1 = \frac{1}{2} ΑΓx$ (2).

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $BAΔ = \frac{1}{2} ΑΓx$.



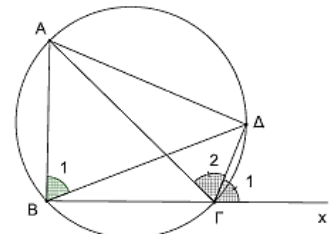
β) Είναι $B_1 = Γ_2$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΔ.

Όμως $Γ_2 = \frac{1}{2} ΑΓx$, οπότε $B_1 = \frac{1}{2} ΑΓx$. Όμως από το α σκέλος είναι

$BAΔ = \frac{1}{2} ΑΓx$, οπότε $BAΔ = B_1$ και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές

αφού έχει δύο ίσες γωνίες. Ίσες

πλευρές του τριγώνου είναι οι ΔΒ και ΔΑ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες του ΒΑΔ και B_1 αντίστοιχα.

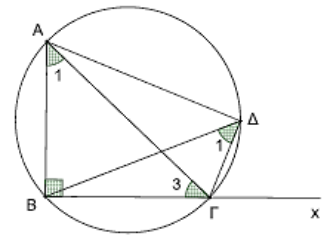


γ) Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, τότε το τόξο ΑΔΓ είναι ημικύκλιο, οπότε η γωνία ΑΒΓ είναι ορθή ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $\Gamma_3 + A_1 = 90^\circ$ (3).

Οι γωνίες A_1, Δ_1 είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΓ,

άρα $A_1 = \Delta_1$ (4).

Από τις σχέσεις (3), (4) προκύπτει ότι $\Gamma_3 + \Delta_1 = 90^\circ$, δηλαδή οι γωνίες ΑΓΒ και ΒΔΓ είναι συμπληρωματικές.



13670. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma = 2AB$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΖΑΔΕ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 5)

γ) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΕΑΓ. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο προς την πλευρά ΑΓ και το Δ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ. Επομένως, το Ζ θα είναι μέσο της πλευράς ΑΒ.

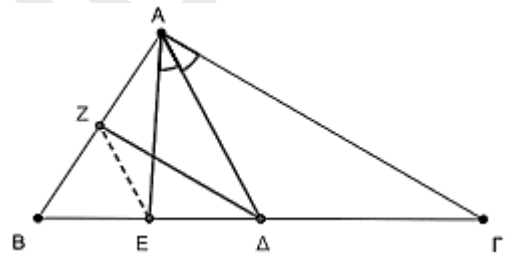
Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ έχουν:

- $AB = BD$, ως μισά του ΒΓ, αφού $B\Gamma = 2AB$ (υπόθεση) και $B\Gamma = 2BD$ (το Δ είναι μέσο του ΒΓ).

- $BE = BZ$, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΔ και ΑΒ αντίστοιχα.

- Β κοινή γωνία.

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π)



β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΒΖΔ προκύπτει ότι $\angle BAE = \angle B\Delta Z$ (1), ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΒΖ αντίστοιχα.

Το τετράπλευρο ΖΑΔΕ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ΖΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Α και Δ υπό τις ίσες γωνίες $\angle BAE$ και $\angle B\Delta Z$ αντίστοιχα.

γ) Το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές με $AB = BD$, οπότε $\angle B\Delta A = \angle B\Delta A$ (2), ως προσκείμενες στη βάση ΑΔ. Αφαιρώντας τις ισότητες (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\angle B\Delta A - \angle BAE = \angle B\Delta A - \angle B\Delta Z \Leftrightarrow \angle E\Delta A = \angle Z\Delta A \text{ (3)}.$$

Επίσης, $\angle Z\Delta A = \angle \Delta A\Gamma$ (4), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΖ και ΑΓ τεμνόμενων από την ΑΔ.

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε $\angle E\Delta A = \angle \Delta A\Gamma$, άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΕΑΓ.

13671. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($B < \Gamma$) θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Η η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) $HE = EG$ και $HZ = ZG$. (Μονάδες 10)

β) $\angle \Delta E = \angle ZHE$. (Μονάδες 10)

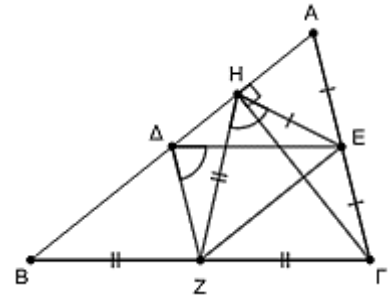
γ) Το τετράπλευρο ΖΔΗΕ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΑΓ ($\angle \text{ΗΑ} = 90^\circ$), η ΗΕ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΑΓ, οπότε $\text{ΗΕ} = \text{ΕΓ} = \text{ΕΑ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2}$.

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΒΓ ($\angle \text{ΗΒ} = 90^\circ$), η ΗΖ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ, οπότε $\text{ΗΖ} = \text{ΖΓ} = \text{ΖΒ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2}$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, τα σημεία Δ και Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Επομένως, $\Delta\text{Ζ} \parallel \text{ΑΓ}$ και $\Delta\text{Ζ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2} = \text{ΕΓ}$.



Άρα, το τετράπλευρο ΖΔΕΓ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ΔΖ και ΕΓ ίσες και παράλληλες, οπότε $\angle \text{ΔΕ} = \angle \text{ΕΖ}$ (1).

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΗΕΓ είναι $\angle \text{ΗΕ} = \angle \text{ΗΓ}$ (2), αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΓ και ΗΕ αντίστοιχα. Επίσης, στο ισοσκελές τρίγωνο ΗΖΓ είναι $\angle \text{ΖΗΓ} = \angle \text{ΗΓΖ}$ (3), αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΖΓ και ΗΖ αντίστοιχα.

Προσθέτοντας τις ισότητες (2) και (3) κατά μέλη, έχουμε: $\angle \text{ΖΗΓ} + \angle \text{ΗΕ} = \angle \text{ΗΓΖ} + \angle \text{ΗΓΕ} \Leftrightarrow \angle \text{ΖΗΕ} = \angle \text{ΕΓΖ}$ (4). Από τις ισότητες (1) και (4) προκύπτει τελικά ότι $\angle \text{ΔΕ} = \angle \text{ΖΗΕ}$.

γ) Το τετράπλευρο ΖΔΗΕ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ΖΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ και Η υπό τις ίσες γωνίες $\angle \text{ΔΕ}$ και $\angle \text{ΖΗΕ}$ αντίστοιχα.

13521. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\text{ΑΒ} < \text{ΑΓ}$) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\text{ΚΛ} \parallel \text{ΒΓ}$.

(Μονάδες 5)

β) i. $\text{ΜΛ} = \text{ΚΔ}$

(Μονάδες 6)

ii. $\text{ΚΜ} = \text{ΔΛ}$.

(Μονάδες 6)

γ) Το ΚΛΜΔ είναι ένα εγγράψιμο τετράπλευρο.

(Μονάδες 8)

Λύση

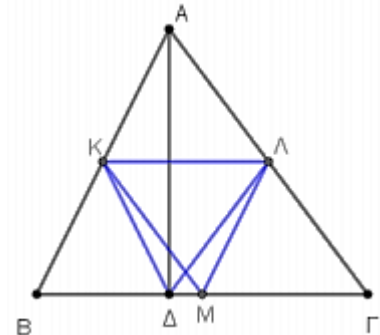
α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Κ είναι μέσο του ΑΒ και το Λ είναι μέσο του ΑΓ. Άρα, $\text{ΚΛ} \parallel \text{ΒΓ}$ (1), επειδή το ΚΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Λ είναι μέσο του ΑΓ και το Μ είναι μέσο του ΒΓ. Άρα, $\text{ΛΜ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$ (2), επειδή το ΛΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, είναι $\text{ΔΚ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$ (3), επειδή η ΔΚ είναι

διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του ΑΒ.

Από (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι $\text{ΛΜ} = \text{ΔΚ}$. (4)



ii. Τα σημεία Δ και Μ δεν ταυτίζονται γιατί αν το μέσο της ΒΓ Μ ταυτιζόταν με το ίχνος του ύψους ΑΔ, τότε το ύψος ΑΔ θα ήταν και διάμεσος, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ θα ήταν ισοσκελές με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$, πράγμα άτοπο από την υπόθεση $\text{ΑΒ} < \text{ΑΓ}$. Επομένως το ΚΛΜΔ είναι τετράπλευρο.

Από το ερώτημα β) i. Το τραπέζιο ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές. Επομένως $\text{ΚΔ} = \text{ΜΛ}$ (6) και $\text{ΚΜ} = \text{ΔΛ}$. Από (1), (4) και επειδή οι ΚΔ και ΜΛ δεν είναι παράλληλες, το ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, επομένως οι διαγώνιοι του είναι ίσες, δηλαδή $\text{ΚΜ} = \text{ΔΛ}$. (5)

γ) Από το β) ερώτημα $\text{ΚΔ} = \text{ΜΛ}$ (6) και $\text{ΚΜ} = \text{ΔΛ}$.

Τα τρίγωνα ΚΔΛ και ΛΜΔ έχουν:

- $\text{ΚΔ} = \text{ΜΛ}$, από (6)

- $KM = \Delta\Lambda$ από (5)

- $K\Lambda$ κοινή πλευρά.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες.

Άρα και οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές θα είναι αντίστοιχα ίσες, $\angle K\Delta\Lambda = \angle K\Lambda\Delta$.

Επομένως το τετράπλευρο $K\Lambda M\Delta$ είναι εγγραψίμο γιατί η πλευρά $K\Lambda$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ και M υπό ίσες γωνίες.

13847. Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το B κατά τμήμα BZ . Επίσης προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma M = AZ$. Στη συνέχεια, θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔMEZ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΔAZ και $\Gamma\Delta M$ είναι ίσα.

(Μονάδες 5)

β) το τετράπλευρο ΔMEZ είναι τετράγωνο.

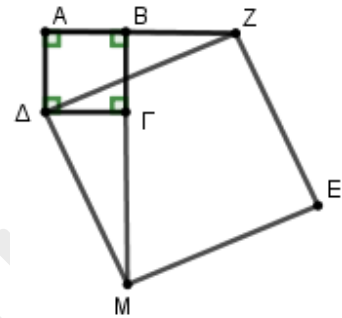
(Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο $BZEM$ είναι εγγραψίμο.

(Μονάδες 6)

δ) οι γωνίες $\angle BMZ$ και $\angle BEZ$ είναι ίσες.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Για τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAZ και $\Gamma\Delta M$ έχουμε:

- $\Delta\Delta = \Delta\Gamma$, ως πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$

- $AZ = \Gamma M$, από τα δεδομένα

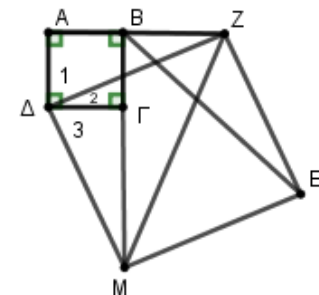
Άρα έχουν μία προς μία ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε είναι ίσα.

β) Για να είναι το τετράπλευρο ΔMEZ τετράγωνο, γνωρίζοντας ότι είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Έχουμε $\Delta_1 = \Delta_3$ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AZ και ΓM των ίσων τριγώνων ΔAZ και $\Gamma\Delta M$. Άρα $\angle M\Delta Z = \Delta_2 + \Delta_3 = \Delta_1 + \Delta_2 = 90^\circ$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΔMEZ είναι και ορθογώνιο διότι έχει μία ορθή γωνία.

Επειδή τα τρίγωνα $\Delta\Delta H$ και $\Gamma\Delta M$ είναι ίσα θα έχουν και τις υποτείνουσες αντίστοιχα ίσες, οπότε

$\Delta Z = \Delta M$. Άρα το ορθογώνιο ΔMEH είναι και ρόμβος, διότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. Άρα είναι τετράγωνο.



γ) Για να είναι το τετράπλευρο $BZEM$ εγγραψίμο αρκεί να αποδείξουμε ότι οι απέναντι γωνίες $\angle Z\hat{B}M$ και $\angle Z\hat{E}M$ είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\angle ZBM + \angle ZEM = 180^\circ$.

Από το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε $\angle AB\Gamma = 90^\circ$ άρα και $\angle ZBM = 90^\circ$ ως παραπληρωματική της.

Από το τετράγωνο ΔMEZ έχουμε $\angle ZEM = 90^\circ$. Άρα $\angle ZBM + \angle ZEM = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

δ) Επειδή το τετράπλευρο $BZEM$ είναι εγγραψίμο η πλευρά BZ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του M και E υπό ίσες γωνίες, δηλαδή

$\angle BMZ = \angle BEZ$.

13840. Δίνεται κύκλος (O,R) και μία ευθεία $\chi'\chi$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A . Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της ημιευθείας $A\chi$. Αν για κάποιο σημείο B του κύκλου ισχύει η

σχέση $MA = MB$, να αποδείξετε ότι:

α) το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R) .

(Μονάδες 7)

β) η διχοτόμος της γωνίας $\angle BM\chi$ είναι κάθετη στη MO .

(Μονάδες 6)

γ) το τετράπλευρο $AOBM$ είναι εγγραψίμο.

(Μονάδες 6)

δ) το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $\angle BM\chi$.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Η ευθεία $x'x$ έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Επομένως, η ευθεία $x'x$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Άρα $OA \perp MA$.

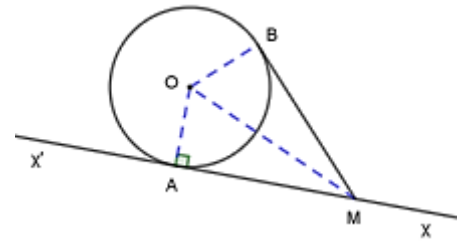
Τα τρίγωνα MOB και MOA έχουν:

- MO , κοινή πλευρά
- $OB = OA$, ως ακτίνες του κύκλου (O, R)
- $MB = MA$, από την υπόθεση

Επομένως, τα τρίγωνα από το κριτήριο ισότητας Π-Π-Π είναι ίσα.

Απέναντι από την πλευρά OM βρίσκονται αντίστοιχα ίσες γωνίες, οπότε $A = B$.

Επειδή $A = 90^\circ$ συμπεραίνουμε ότι $B = 90^\circ$. Άρα, το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O, R) .



β) Έστω $M\delta$ η διχοτόμος της γωνίας BMx .

Τα τμήματα MA και MB είναι εφαπτόμενα του κύκλου (O, R) .

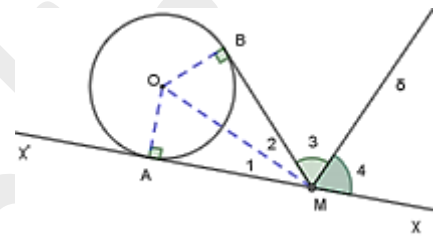
Η MO είναι διχοτόμος της γωνίας AMB , οπότε $M_1 = M_2$.

Επειδή $M\delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας BMx έχουμε $M_3 = M_4$.

Είναι $AMx = 180^\circ \Leftrightarrow M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 180^\circ \Leftrightarrow$

$2M_2 + 2M_3 = 180^\circ \Leftrightarrow M_2 + M_3 = 90^\circ$, δηλαδή $OM\delta = 90^\circ$.

Άρα η $M\delta$ είναι κάθετη στη MO .



γ) Στο τετράπλευρο $AOBM$ έχουμε $A = B = 90^\circ$ οπότε $A + B = 180^\circ$. Επομένως δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές οπότε το $AOBM$ είναι εγγράψιμο.

δ) Το ευθύγραμμο τμήμα OB και η διχοτόμος $M\delta$ τέμνονται από το ευθύγραμμο τμήμα OM . Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180° , οπότε το OB και η $M\delta$ θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας OM που βρίσκονται οι γωνίες.

Το ευθύγραμμο τμήμα OB σχηματίζει με το OM τη γωνία $\widehat{BOM}$.

Το ευθύγραμμο τμήμα OM σχηματίζει με τη διχοτόμο $M\delta$ τη γωνία $\widehat{OM\delta}$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\widehat{BOM} + \widehat{OM\delta} < 180^\circ$.

Η γωνία $\widehat{BOM}$ είναι οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου OBM , οπότε $\widehat{BOM} < 90^\circ$.

Η γωνία $\widehat{OM\delta}$ είναι ίση με το άθροισμα των γωνιών M_2 και M_3 , άρα $\widehat{OM\delta} = M_2 + M_3 = 90^\circ$

Έχουμε $\widehat{BOM} + \widehat{OM\delta} = \widehat{BOM} + 90^\circ < 90^\circ + 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{BOM} + \widehat{OM\delta} < 180^\circ$.

14878. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο M εξωτερικό του. Από το M φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB του κύκλου και έστω ότι το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του O ως προς την ευθεία MB .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AMBO$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $AMBO$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $BA \parallel M\Gamma$. (Μονάδες 9)

Λύση

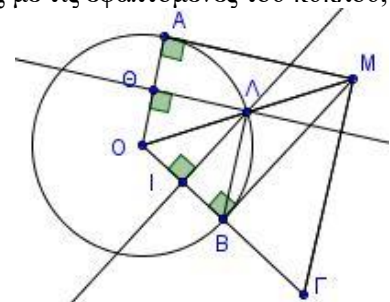
α) Επειδή τα OA , OB είναι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής με τις εφαπτομένες του κύκλου, είναι $OA \perp AM$ και $OB \perp BM$. Στο τετράπλευρο $AMBO$ είναι

$A + B = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

β) Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του $AMBO$

είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του.

Έστω $\Theta\Lambda$ η μεσοκάθετος του OA (Θ μέσο του OA) και $\Gamma\Lambda$ η μεσοκάθετος του OB .



Επειδή $\Theta\Lambda \perp OA$ και $AM \perp OA$, είναι $\Theta\Lambda \parallel AM$.

Επειδή $ΛΙ \perp OB$ και $MB \perp OB$ είναι $ΛΙ \parallel MB$.

Στο τρίγωνο OAM το Θ είναι μέσο της OA και η $\Theta\Lambda$ είναι παράλληλη στην AM , άρα το Λ είναι μέσο της OM . Όμως $ΛΑ = ΛO$ και $ΛO = ΛB$ αφού το Λ ανήκει στις μεσοκαθέτους των OA και OB , άρα

$ΛΑ = ΛO = ΛB = ΛM$, οπότε το Λ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $AMBO$.

Επομένως το Λ είναι το μέσο του OM .

γ) Τα B, Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AMΓ$, άρα $B\Lambda \parallel MΓ$.

Το 1^ο Θέμα της τράπεζας

- 11895. α)** Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
- Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.
 - Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.
 - Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.
 - Η διάμεσος ενός τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των δύο βάσεων του τραπεζίου.
 - Αν γνωρίζουμε ότι δύο κύκλοι που έχουν ακτίνες R και ρ με $R > \rho$, εφάπτονται, τότε συμπεραίνουμε ότι η απόσταση των κέντρων τους είναι $R + \rho$.

(Μονάδες 10)

- β)** Να δείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα, ότι κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

(Μονάδες 15)

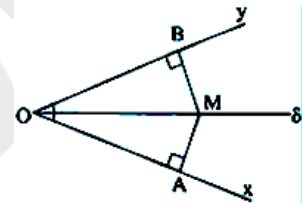
Λύση

- α)** i. Σ ii. Σ iii. Σ iv. Λ v. Λ

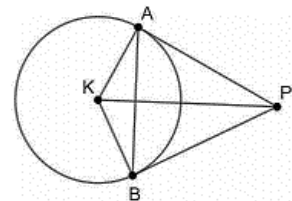
β) Έστω μια γωνία χOy και M ένα σημείο της διχοτόμου της $O\delta$. Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα AOM και BOM είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OM κοινή και $\hat{MOA} = \hat{MOB}$, επομένως $MA = MB$.

Αντίστροφα

Έστω M ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$ και υποθέτουμε ότι $MA = MB$. Τότε τα τρίγωνα AOM και BOM είναι πάλι ίσα, αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OM κοινή και $MA = MB$ και επομένως $\hat{MOA} = \hat{MOB}$, οπότε το M είναι σημείο της διχοτόμου $O\delta$.



- 11898. α)** Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
- Οι μεσοκάθετες των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
 - Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
 - Σε κάθε τρίγωνο βαρύκεντρο ονομάζεται το σημείο τομής των διχοτόμων του.
 - Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που άγεται από οποιαδήποτε κορυφή είναι διχοτόμος της αντίστοιχης γωνίας και διάμεσος της απέναντι πλευράς.
 - Αν στο παρακάτω σχήμα η PK είναι η διακεντρική ευθεία του σημείου P , τότε η ίδια ευθεία είναι μεσοκάθετος της χορδής AB .



(Μονάδες 10)

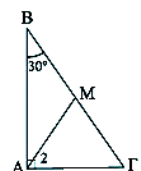
- β)** Να δείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά της είναι το μισό της υποτείνουσας.

(Μονάδες 15)

Λύση

- α)** i. Σ ii. Σ iii. Λ iv. Λ v. Σ

β) Επειδή $\hat{B} = 30^\circ$, είναι $\hat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσο AM και είναι Έτσι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο. Επομένως $AG = MG = \frac{BG}{2}$.



12066. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.
- Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου.
- Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ε , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
- Αν ένα τετράπλευρο έχει όλες τις γωνίες του ίσες, τότε είναι τετράγωνο.
- Αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

(Μονάδες 10)

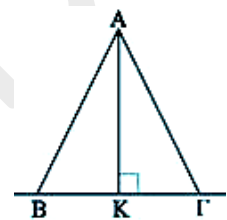
β) Από ένα σημείο Α εκτός ευθείας ε φέρουμε το κάθετο τμήμα ΑΚ προς την ε και τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι, αν τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους Β και Γ ισαπέχουν από το ίχνος Κ της καθέτου.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) i. Λ ii. Λ iii. Σ iv. Λ v. Σ

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και το ΑΚ ύψος του, επομένως θα είναι και διάμεσος, δηλαδή ΚΒ = ΚΓ.



11964. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.
- Υπάρχουν σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος που δεν ισαπέχουν από τα άκρα του.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
- Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση είναι ίσες.

(Μονάδες 15)

Λύση

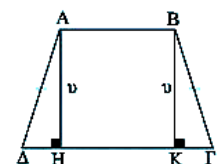
α) i. Λ ii. Λ iii. Σ iv. Σ v. Σ

β) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ).

Φέρουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΚΓ είναι ίσα

($\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$, $AD = BG$ και $AH = BK = v$), οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.

Επειδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{A} = \hat{B}$.



12070. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- Από κάθε σημείο Ρ που είναι εξωτερικό ενός κύκλου διέρχεται μόνο μία εφαπτόμενη ευθεία προς τον κύκλο.
- Σε όλα τα κυρτά πολύγωνα το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών τους είναι 4 ορθές.
- Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.

iv. Σε κάθε τραπέζιο οι διαγώνιές του είναι ίσες.

v. Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου, είναι ίσες.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου ανά δύο είναι ίσες.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) i. Λ ii. Σ iii. Σ iv. Λ v. Σ

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$. Έχουμε:

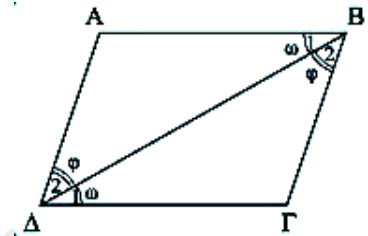
$$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{\omega} \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

$B\Delta$ κοινή πλευρά.

$$\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \hat{\phi} \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

Άρα τα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.

Επίσης έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \hat{\phi} + \hat{\omega}$.



12106. α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.

ii. Από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται άπειρες κάθετες στην ευθεία.

iii. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

iv. Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγωνίους είναι ορθογώνιο.

v. Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη του κύκλου στο άκρο της χορδής ισούται με την επίκεντρη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

(Μονάδες 10)

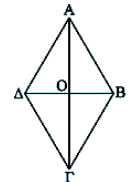
β) Να αποδείξετε ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) i. Σ ii. Λ iii. Σ iv. Λ v. Λ

β) Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $A\Gamma \perp B\Delta$. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ η AO είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η AO είναι και ύψος, επειδή $A\Gamma \perp B\Delta$. Άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε $AB = A\Delta$. Επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.



12416. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη της διαμέτρου.

ii. Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα.

iii. Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου είναι ίσες και κάθετες, τότε το τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

iv. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.

v. Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

(Μονάδες 10)

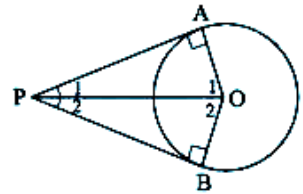
β) Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που μπορούμε να φέρουμε από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) i. Λ ii. Σ iii. Λ iv. Σ v. Σ

β) Τα τρίγωνα AOP και BOP έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OP κοινή και OA = OB (= ρ), άρα είναι ίσα, οπότε PA = PB.



- 11892.α)** Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμία από αυτές το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και κάποια γωνία ίση, τότε είναι ίσα.
 - Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
 - Κάθε τετράγωνο είναι και ρόμβος.
 - Κάθε επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο.
 - Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου η απόσταση από το μέσο κάθε πλευράς είναι τα 2/3 της αντίστοιχης διαμέσου. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές. (Μονάδες 15)

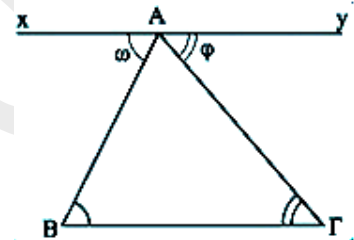
Λύση

α) i. Λ ii. Σ iii. Σ iv. Σ v. Λ

β) Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία $xy \parallel BG$. Τότε $\hat{\omega} = \hat{B}$ (1) και $\hat{\phi} = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και BG με τέμνουσες AB και AG αντίστοιχα.

Αλλά $\hat{\omega} + \hat{A} + \hat{\phi} = 2\text{L}$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\text{L}$



13704.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.
- Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών του και μικρότερη από τη διαφορά τους.
- Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.
- Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα την πλευρά αυτή.

(Μονάδες 15)

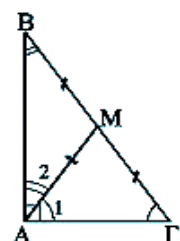
Λύση

α) i. Σ ii. Λ iii. Λ iv. Σ v. Σ

β) Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ και τη διάμεσό του AM.

Αν $AM = \frac{BG}{2}$ θα αποδείξουμε ότι η γωνία Α είναι ορθή.

Επειδή έχουμε $AM = MG$, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (1) και $AM = MB$, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (2). Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\text{L}$, οπότε $2\hat{A} = 2\text{L}$ ή $\hat{A} = 1\text{L}$.



Askisopolis