

ΛΥΣΗ

α) Είναι $x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0$.

Το πολυώνυμο $x^2 - x$ έχει ρίζες τις 0 και 1 αφού:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 1.$$

Το πρόσημο του $x^2 - x$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$x^2 - x$	+	0	-	0	+

Επομένως ισχύει: $x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$.

β)

i) Αφού $0 < \alpha < 1$ με βάση το α) έχουμε ότι $\alpha^2 < \alpha$.

Επίσης $\alpha \neq 0$ οπότε $\alpha^2 > 0$.

Τέλος αφού $0 < \alpha < 1$ είναι και $0 < \sqrt{\alpha} < 1$ οπότε με βάση το α) έχουμε ότι

$$\sqrt{\alpha^2} < \sqrt{\alpha} \Rightarrow \alpha < \sqrt{\alpha}.$$

Συνεπώς $0 < \alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha} < 1$.

ii) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\sqrt{1+\alpha} < 1+\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1+\alpha}^2 < (1+\sqrt{\alpha})^2 \Leftrightarrow$$

$$1+\alpha < 1+2\sqrt{\alpha}+\alpha \Leftrightarrow$$

$$0 < 2\sqrt{\alpha}$$

που ισχύει για κάθε $\alpha > 0$.