

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ αν και μόνο αν $f(1) = 2$.

Είναι $f(1) = \alpha \cdot 1 - \alpha + 2 = 2$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, οπότε πράγματι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .

β) Αφού οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, ισχύει ότι: $f(1) = g(1)$.

i) Είναι

$$\begin{aligned} f(1) &= g(1) \Leftrightarrow \\ \alpha - \alpha + 2 &= 1^2 - \alpha + 3 \Leftrightarrow \\ \alpha &= 2 \end{aligned}$$

ii) Για $\alpha = 2$ έχουμε $f(x) = 2x - 2 + 2 = 2x$ και $g(x) = x^2 - 2 + 3 = x^2 + 1$

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$. Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Leftrightarrow \\ 2x &= x^2 + 1 \Leftrightarrow \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ (x-1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Επομένως δεν υπάρχει άλλο κοινό σημείο εκτός από αυτό με τετμημένη 1.

γ) Το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Leftrightarrow \\ \alpha x - \alpha + 2 &= x^2 - \alpha + 3 \Leftrightarrow \\ x^2 - \alpha x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι 2ου βαθμού και το πλήθος των ριζών της εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσάς της: $\Delta = (-\alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \alpha^2 - 4$.

Για $\alpha = 3$ είναι $\Delta = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5 > 0$ οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως οι γραφικές παραστάσεις έχουν δύο κοινά σημεία.

Για $\alpha = -2$ είναι $\Delta = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$ οπότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα και επομένως οι γραφικές παραστάσεις έχουν ένα κοινό σημείο.

Για $\alpha = 1$ είναι $\Delta = 1^2 - 4 = 1 - 4 = -3 < 0$ οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες και επομένως οι γραφικές παραστάσεις δεν έχουν κοινά σημεία.