

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20 = 4(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$$

Όταν $\lambda = -2$, τότε

$$\Delta = 4(4 + 8 - 5) = 28 > 0$$

οπότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Όταν $\lambda = 3$, τότε

$$\Delta = 4(9 - 12 - 5) = -32 < 0$$

οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

β) i. Όταν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 4(25 - 20 - 5) = 0$, οπότε έχει μια διπλή ρίζα.

ii. Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα μόνο όταν ισχύει $\Delta = 0$. Είναι:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -1$$

Επομένως, εκτός από την περίπτωση $\lambda = 5$ που συναντήσαμε στο ερώτημα βi), η εξίσωση έχει διπλή ρίζα και όταν $\lambda = -1$.

δ) Ισχύει

$$|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5 = -(\lambda^2 - 4\lambda - 5), \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$$

οπότε ο αριθμός $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ είναι αρνητικός. Επομένως η διακρίνουσα $\Delta = 4(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$ είναι αρνητική και η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.