

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες του σημείου M θα πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση $y = g(x)$, άρα

$$\text{θα ισχύει } g\left(\frac{3\beta}{2}\right) = -3 - \frac{\beta}{2} \text{ οπότε } \frac{3\beta}{2} + \beta = -3 - \frac{\beta}{2} \text{ άρα } \frac{3\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \beta = -3.$$

$$\text{Ώστε } 3\beta = -3, \text{ έτσι } \beta = -1.$$

β) Για $\beta = -1$

i) Είναι $f(x) = x^2 - 1$. Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$, έχουν τεταγμένη μηδέν, οπότε οι τετμημένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης $y = f(x) = 0$, άρα $x^2 - 1 = 0$ οπότε $x^2 = 1$. Τελικά $x = 1, x = -1$.

Άρα τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι τα $A(1, 0)$ και $B(-1, 0)$.

Επίσης $f(0) = 0^2 - 1 = -1$, άρα το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ είναι το $\Gamma(0, -1)$.

ii) Θέλουμε να ισχύει $f(x) < g(x)$ δηλαδή $x^2 - 1 < x - 1$ άρα $x^2 - x < 0$ ή $x(x - 1) < 0$. Είναι φανερό ότι το πολυώνυμο $x^2 - x = x(x - 1)$ έχει ως ρίζες τους αριθμούς μηδέν και 1, αφού για αυτές τις τιμές μηδενίζεται. Δημιουργούμε τον πίνακα προσήμου, παρατηρώντας ότι ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	+	-	+	

Διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές του x μεταξύ 0 και 1, δηλαδή $0 < x < 1$.

iii) Η εξίσωση γράφεται $\frac{x^2-1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2-1} = 3$. Πρέπει $x - 1 \neq 0$ και $x^2 - 1 \neq 0$.

Έτσι, για $x \neq 1$ και $x \neq -1$, η εξίσωση γράφεται $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = 3$, άρα

$$x + 1 + \frac{1}{x+1} = 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 = 3(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 = 3x + 3 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0, \text{ άρα } x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Ώστε } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ή } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$