

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = \\ &= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Επειδή $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\Delta &> 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(1 - 2\lambda)^2}}{2} = \frac{1 \pm (1 - 2\lambda)}{2} = \begin{cases} \frac{1 + 1 - 2\lambda}{2} = 1 - \lambda \\ \frac{1 - 1 + 2\lambda}{2} = \lambda \end{cases}$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}0 &< d(x_1, x_2) < 2 \Leftrightarrow \\ 0 &< |x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow \\ 0 &< |1 - \lambda - \lambda| < 2 \Leftrightarrow \\ 0 &< |1 - 2\lambda| < 2 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned}0 &< |1 - 2\lambda| \Leftrightarrow \\ 1 - 2\lambda &\neq 0 \Leftrightarrow \\ 2\lambda &\neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \lambda &\neq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}|1 - 2\lambda| &< 2 \Leftrightarrow \\ -2 &< 1 - 2\lambda < 2 \Leftrightarrow \\ -3 &< -2\lambda < 1 \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{2} &< \lambda < \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Οπότε, τελικά

$$\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$