

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ίσες ρίζες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$,

(Μονάδες 4)

ii. να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1).$$

(Μονάδες 5)