

α) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{aligned}\lambda x &= x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda x - x = \lambda^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1).\end{aligned}$$

β) Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$$

Η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \stackrel{\lambda \neq 1}{\Leftrightarrow} \frac{(\lambda - 1)x}{\lambda - 1} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda - 1} \Leftrightarrow x = \lambda + 1.$$

γ) Η εξίσωση είναι ταυτότητα αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\lambda - 1 &= 0 \text{ και } (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \lambda &= 1 \text{ και } (1 - 1)(1 + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \lambda &= 1.\end{aligned}$$