

α) Είναι:

$$\begin{aligned}\alpha_5 = 14 &\Leftrightarrow \alpha_1 + (5 - 1)\omega = 14 \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 + 4\omega = 14 \\ &\Leftrightarrow 4\omega = 12 \\ &\Leftrightarrow \omega = 3\end{aligned}$$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned}S_v = 77 &\Leftrightarrow \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega] = 77 \\ &\Leftrightarrow \frac{v}{2}[2 \cdot 2 + (v-1)3] = 77 \\ &\Leftrightarrow \frac{v}{2}(4 + 3v - 3) = 77 \\ &\Leftrightarrow \frac{v}{2}(3v + 1) = 77 \\ &\Leftrightarrow \frac{3v^2 + v}{2} = 77 \\ &\Leftrightarrow 3v^2 + v = 154 \\ &\Leftrightarrow 3v^2 + v - 154 = 0 \quad (1)\end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-154) = 1 + 1848 = 1849 > 0.$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$v_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{1849}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 43}{6} = \begin{cases} \frac{-1+43}{6} = 7 \\ \frac{-1-43}{6} = -\frac{44}{6} \end{cases}$$

Η τιμή $v = -\frac{44}{6}$ απορρίπτεται, καθώς $v \in \mathbb{N}$. Άρα πρέπει να προσθέσουμε τους 7 πρώτους όρους της προόδου ώστε το άθροισμα να είναι ίσο με 77.