

α) Αντικαθιστώντας στην ταυτότητα $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$12^2 = 272 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow 144 = 272 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\alpha\beta = -128 \Leftrightarrow \alpha\beta = -64$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha + \beta = 12 \text{ και } P = \alpha\beta = -64$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 12x - 64 = 0$$

γ) Για $\alpha = 1$, $\beta = -12$ και $\gamma = -64$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64) = 144 + 256 = 400 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{400}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 20}{2} = \begin{cases} \frac{12+20}{2} = 16 \\ \frac{12-20}{2} = -4 \end{cases}$$

Άρα είναι:

$$(\alpha = 16 \text{ και } \beta = -4) \text{ ή } (\alpha = -4 \text{ και } \beta = 16)$$