

ΛΥΣΗ

α) Με $x, y \in (0, 6)$ είναι:

$$E_1 = xy, E_2 = (6-x)y = 6y - xy, E_3 = (6-x)(6-y) = 36 - 6x - 6y + xy, E_4 = x(6-y) = 6x - xy$$

β) Με $x = 4, y = 2$ έχουμε:

$$E_1 = x \cdot y = 2 \cdot 4 = 8$$

$$E_2 = (6-x)y = 2 \cdot 2 = 4$$

$$E_3 = (6-x)(6-y) = 2 \cdot 4 = 8$$

$$E_4 = x(6-y) = 4 \cdot 4 = 16$$

γ) i. Από την ισότητα $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$ παίρνουμε

$$xy + 36 - 6x - 6y + xy = 6y - xy + 6x - xy$$

οπότε $4xy + 36 = 12x + 12y$, που γράφεται $xy + 9 = 3(x + y)$ και είναι η ζητούμενη ισότητα.

ii. Από την ισότητα του ερωτήματος (γ)i. έχουμε:

$$xy - 3x + 9 - 3y = 0, \text{ οπότε } x(y-3) - 3(y-3) = 0, \text{ δηλαδή } (y-3)(x-3) = 0, \text{ άρα } y=3 \text{ ή } x=3.$$

- Αν $y=3$, τότε $(KH)=3$, οπότε το τμήμα EZ διέρχεται από το O.
- Αν $x=3$, τότε $(KZ)=3$, οπότε το τμήμα ΘΗ διέρχεται από το O.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, τουλάχιστον ένα από τα τμήματα EZ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο O του τετραγώνου.