

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(\omega, 0)$, $B(\phi, 0)$, οπότε ω, ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $\omega < 0 < \phi$ αφού το σημείο $O(0,0)$ είναι μεταξύ των A και B στον άξονα $x'x$.

Η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 5$ και ρίζες τους αριθμούς $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Επειδή $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ έχουμε ότι $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\omega = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

i. Αφού ω, ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ δηλαδή της $x^2 - x - 1 = 0$

έχουμε ότι $\omega + \phi = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1$.

ii. Αφού ω, ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ δηλαδή της $x^2 - x - 1 = 0$

έχουμε ότι $\omega \cdot \phi = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$.

β) Είναι $(OB) = |\phi| = \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $(OA) = |\omega| = \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Επειδή $\frac{\sqrt{5}+1}{2} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ συμπεραίνουμε ότι $(OB) > (OA)$.

Εναλλακτικά, είναι $(OB) = |\phi| = \phi$ αφού $\phi > 0$ και $(OA) = |\omega| = -\omega$ αφού $\omega < 0$.

Είναι $(OB) > (OA) \Leftrightarrow \phi > -\omega \Leftrightarrow \phi + \omega > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει.

γ) Αφού ο β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους

ξεπερνάει τη μία μονάδα, έχουμε ότι $\beta - \frac{1}{\beta} > 1$ και εφόσον $\beta > 0$ έχουμε

ισοδύναμα $\beta^2 - 1 > \beta \Leftrightarrow \beta^2 - \beta - 1 > 0$. Το τριώνυμο $x^2 - x - 1$ έχει ρίζες ω, ϕ και γίνεται θετικό, δηλαδή ομόσημο του $\alpha = 1$, για $x < \omega$ ή $x > \phi$. Συνεπώς $\beta < \omega$ ή $\beta > \phi$. Όμως $\beta > 0$, οπότε $\beta > \phi$.

Εναλλακτικά, $\beta^2 - \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow f(\beta) > 0$. Από τη γραφική παράσταση της f βλέπουμε ότι τα σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν θετική τεταγμένη, δηλαδή είναι πάνω από τον άξονα $x'x$, είναι αυτά που είναι δεξιά του B ή αριστερά του A . Συνεπώς $\beta < \omega$ ή $\beta > \phi$. Όμως $\beta > 0$, οπότε $\beta > \phi$.

δ) Είναι $f(\frac{5}{3}) = \frac{25}{9} - \frac{5}{3} - 1 = \frac{1}{9} > 0$ και επειδή $\frac{5}{3} > 0$ έχουμε ότι $\phi < \frac{5}{3}$.

Εναλλακτικά, $\frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{16}{15} > 1$, οπότε με βάση το γ) έχουμε ότι $\phi < \frac{5}{3}$.