

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A, B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x| = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| - 2 = 0.$$

Θέτουμε $|x| = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$.

Για $\omega = -2$ έχουμε $|x| = -2$ που είναι αδύνατη.

Για $\omega = 1$ έχουμε $|x| = 1$ οπότε $x = 1$ ή $x = -1$.

Επειδή το σημείο A βρίσκεται πιο αριστερά από το B , το σημείο A θα έχει μικρότερη τετμημένη, οπότε η τετμημένη του σημείου A είναι -1 και η τετμημένη του σημείου B είναι 1 .

Για $x = -1$ είναι $f(-1) = 1$ οπότε $A(-1, 1)$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$ οπότε $B(1, 1)$.

β)

i. Η ανίσωση $f(x) < g(x)$ αληθεύει για τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g . Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων A, B δηλαδή για $x \in (-1, 1)$.

ii. Έχουμε ισοδύναμα: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x| < 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + |x| - 2 < 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| - 2 < 0$.

Θέτουμε $|x| = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 < 0$. Το τριώνυμο $\omega^2 + \omega - 2$ έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$ και γίνεται αρνητικό για τις τιμές του ω που είναι μεταξύ των ριζών του, δηλαδή για $-2 < \omega < 1$, δηλαδή $-2 < |x| < 1$.

Όμως η ανίσωση $-2 < |x|$ ισχύει για κάθε πραγματική τιμή του x , οπότε πρέπει και αρκεί $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$ που επαληθεύει την απάντηση στο βi) ερώτημα.