

## ΛΥΣΗ

α) Τα σημεία  $A, B$  είναι τα σημεία τομής της ευθείας  $y = x$  με τη γραφική παράσταση της

$f(x) = \frac{1}{x}$ , οπότε οι τετμημένες των  $A, B$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Όμως από το σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο  $B$  είναι στο 3ο τεταρτημόριο οπότε έχει αρνητική τετμημένη και το σημείο  $A$  στο 1ο οπότε έχει θετική τετμημένη. Συνεπώς  $A(1, f(1))$  δηλαδή  $A(1, 1)$  και  $B(-1, f(-1))$  δηλαδή  $B(-1, -1)$ .

Παρατηρούμε ότι τα σημεία  $A, B$  έχουν αντίθετες συντεταγμένες οπότε είναι συμμετρικά ως προς το σημείο  $O(0, 0)$ , δηλαδή το  $O(0, 0)$  είναι το μέσο του  $AB$ .

β) Αφού  $M(x, y)$  τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της  $f$ , είναι  $x \neq 0$  και  $f(x) = y$

δηλαδή  $y = \frac{1}{x}$  (1).

Το συμμετρικό του  $M$  ως προς το  $O(0, 0)$  είναι το  $M'(-x, -y)$  και για να ανήκει στη γραφική

παράσταση της  $f$ , πρέπει και αρκεί  $f(-x) = -y$  ισοδύναμα  $-y = -\frac{1}{x}$  ισοδύναμα  $y = \frac{1}{x}$

που ισχύει από την (1).

Σημείωση : Αυτό γραφικά σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει κέντρο συμμετρίας το  $O$ .

γ) Ισοδύναμα έχουμε

$$\begin{aligned}(AB) &\leq (MM') \Leftrightarrow \\ \sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2} &\leq \sqrt{(x+x)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)^2} \Leftrightarrow \\ \sqrt{8} &\leq \sqrt{4x^2 + \frac{4}{x^2}} \Leftrightarrow \\ 8 &\leq 4x^2 + \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow \\ 2 &\leq x^2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \\ 0 &\leq x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Leftrightarrow \\ 0 &\leq \left(x - \frac{1}{x}\right)^2\end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε  $x \neq 0$ .

$$\text{Τέλος, } (AB) = (MM') \Leftrightarrow 0 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \stackrel{\alpha)}{\Leftrightarrow} x = \pm 1$$

που σημαίνει ότι ισχύει όταν τα σημεία M, M' ταυτίζονται με τα σημεία A, B.

Σημείωση: αυτό σημαίνει ότι η απόσταση AB είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων της υπερβολής που είναι συμμετρικά ως προς το (0,0).