

# ΛΥΣΗ

α) Ισοδύναμα έχουμε

$$\text{i. } x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{Ως ισότητα ισχύει αν και μόνο αν } x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{ii. } x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{Ως ισότητα ισχύει αν και μόνο αν } x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

β) Για  $x \neq \frac{1}{2}$  και  $x \neq -\frac{1}{2}$ , όπως δείξαμε στο α) ερώτημα, είναι  $x^2 + x + 1 > \frac{3}{4}$  και

$x^2 - x + 1 > \frac{3}{4}$ , οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}.$$

Επίσης, για  $x = \frac{1}{2}$  είναι  $x^2 + x + 1 > \frac{3}{4}$  και  $x^2 - x + 1 = \frac{3}{4}$ , οπότε με πολλαπλασιασμό

κατά μέλη έχουμε  $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ .

Τέλος, για  $x = -\frac{1}{2}$  είναι  $x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}$  και  $x^2 - x + 1 > \frac{3}{4}$ , οπότε με πολλαπλασιασμό

κατά μέλη έχουμε  $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ .

Επομένως  $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

γ)

i. Η παράσταση  $A$  ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του  $x$  για την οποία ισχύει  $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$ .

ii. Είναι

$$A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$ .

Όπως δείξαμε στο β) είναι  $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε

$A > \frac{9}{16}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$  και επομένως η παράσταση  $A$  δεν μπορεί να

πάρει την τιμή  $\frac{9}{16}$ .

Εναλλακτικά, θα εξετάσουμε αν η εξίσωση  $\frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{9}{16}$  έχει λύση στο

$\mathbb{R} - \{1, -1\}$ . Είναι ισοδύναμα

$$\frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^6 - 1}{x^2 - 1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2)^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$16(x^4 + x^2 + 1) = 9 \Leftrightarrow$$

$$16x^4 + 16x^2 + 16 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$16x^4 + 16x^2 + 7 = 0$$

και επειδή  $16x^4 + 16x^2 + 7 \geq 7 > 0$ , η εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως η

παράσταση  $A$  δεν μπορεί να πάρει την τιμή  $\frac{9}{16}$ .