

ΛΥΣΗ

α) Η C_f διέρχεται από το σημείο $(0, 10)$, οπότε ισχύει: $f(0) = 10$. Άρα $\kappa = 10$.

β) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) < 0$. Το τριώνυμο $x^2 - 7x + 10$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 5. Επιπλέον ο συντελεστής του όρου x^2 είναι ίσος με τη μονάδα, οπότε το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$	
$x^2 - 7x + 10$	+	0	-	0	+

Η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ για όλες τις τιμές του x που περιέχονται στο διάστημα $(2, 5)$.

γ) Τα σημεία A, B της C_f βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$, οπότε ισχύει $2 < \alpha < \beta < 5$.

i. Για την απόδειξη της ζητούμενης ανισότητας, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$5\alpha < 2\alpha + 3\beta \text{ και } 2\alpha + 3\beta < 5\beta$$

Η πρώτη γράφεται $3\alpha < 3\beta$ και ισχύει, αφού $\alpha < \beta$ και η δεύτερη γράφεται $2\alpha < 2\beta$ και επίσης ισχύει για τον ίδιο λόγο.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $2 < \alpha < x_0 < \beta < 5$, οπότε ο αριθμός x_0 περιέχεται ανάμεσα στις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 7x + 10$. Επομένως, $f(x_0) < 0$, οπότε το σημείο της C_f με τετμημένη x_0 βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.