

Λύση

α) Έχουμε ότι:

$$(2 + \sqrt{5})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

και

$$(1 - \sqrt{5})^2 = 1^2 - 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 6 - 2\sqrt{5}$$

β) Από το ερώτημα α) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} &= \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} = \\ &= |2 + \sqrt{5}| + |1 - \sqrt{5}|. \end{aligned}$$

Αλλά $1 < 5 \Rightarrow 1 < \sqrt{5} \Rightarrow 1 - \sqrt{5} < 0$. Οπότε, $|1 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 1$.

Άρα,

$$|2 + \sqrt{5}| + |1 - \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 = 1 + 2\sqrt{5}.$$