

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\begin{aligned}f(\alpha) + f(\beta) &\geq \alpha^2 - 36 \Leftrightarrow \\3\alpha^2 + 6\alpha^2 + 6\beta + 3\beta^2 + 6\alpha\beta + 6\beta &\geq \beta^2 - 36 \Leftrightarrow \\9\alpha^2 + 2\beta^2 + 6\alpha\beta + 12\beta + 36 &\geq 0 \Leftrightarrow \\(9\alpha^2 + \beta^2 + 6\alpha\beta) + (\beta^2 + 12\beta + 36) &\geq 0 \Leftrightarrow \\(3\alpha + \beta)^2 + (\beta + 6)^2 &\geq 0,\end{aligned}$$

που ισχύει σαν άθροισμα τετραγώνων.

β) Βάσει του ερωτήματος α), έχουμε:

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36 \Leftrightarrow (3\alpha + \beta)^2 + (\beta + 6)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν :  $3\alpha + \beta = 0$  και  $\beta + 6 = 0$ .

Άρα  $\beta = -6$  και  $\alpha = 2$ .

γ) Για  $\alpha = 2$  και  $\beta = -6$

i. Λύνουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned}f(x) = 6x &\Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 36 = 6x \Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 36 - 6x = 0 \Leftrightarrow \\3x^2 + 6x - 36 &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 12 = 0.\end{aligned}$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου  $x^2 + 2x - 12$  είναι:  $\Delta = 4 + 48 = 52 = 4 \cdot 13$

και οι ρίζες:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow \\x_1 &= -1 + \sqrt{13} \text{ και } x_2 = -1 - \sqrt{13}.\end{aligned}$$

ii. Ισχύει ότι:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6},$$

αφού  $x_1 + x_2 = -2$  και  $x_1 \cdot x_2 = -12$ .

Εναλλακτικά:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{1}{-1 + \sqrt{13}} + \frac{1}{-1 - \sqrt{13}} = \\&= \frac{-1 - \sqrt{13} - 1 + \sqrt{13}}{(-1 - \sqrt{13}) \cdot (-1 + \sqrt{13})} = \\&= \frac{-2}{1 - 13} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$