

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A, B είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ ισοδύναμα $x^2 = x^3$, δηλαδή $x^2 - x^3 = 0$, οπότε $x^2(1-x) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = 1$.

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$ οπότε $A(0,0)$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$ οπότε $B(1,1)$.

β) Από το σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x \in (0,1)$, δηλαδή για τις τετμημένες των σημείων μεταξύ των A και B , η γραφική παράσταση της g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f , πράγμα που σημαίνει ότι $x^3 < x^2$.

Εναλλακτικά για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $x^2 > 0$ και $0 < x < 1$ οπότε $x \cdot x^2 < 1 \cdot x^2$ δηλαδή $x^3 < x^2$.

γ) Με βάση τα παραπάνω για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $x^3 < x^2$, π.χ. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$ αφού

ισοδύναμα $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$. Συνεπώς δεν είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του.

δ)

i. Αφού $3 < \pi < 4$ είναι $3-3 < \pi-3 < 4-3$ δηλαδή $0 < \pi-3 < 1$ οπότε με βάση το

β) ερώτημα είναι $(\pi-3)^3 < (\pi-3)^2$.

ii. Είναι

$$(\pi-3)^3 < (\pi-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\pi^3 - 9\pi^2 + 27\pi - 27 < \pi^2 - 6\pi + 9 \Leftrightarrow$$

$$\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$$