

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned}x^2 &> x \Leftrightarrow \\x^2 - x &> 0 \quad (1)\end{aligned}$$

Το τριώνυμο  $x^2 - x = x(x-1)$  έχει ρίζες τις:  $x=0, x=1$ .

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$x^2 - x$	+	○	-	○	+

Επομένως η (1) αληθεύει για  $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ .

β) i. Από τα δεδομένα και το α) ερώτημα έχουμε:  $0 < 1 < \overset{\alpha) \text{ ερώτ.}}{\alpha} < \alpha^2$  και

$1 < \alpha$ , οπότε  $\sqrt{1} < \sqrt{\alpha}$ , δηλαδή

$$\sqrt{\alpha} > 1.$$

$$\text{Επίσης: } \alpha < \alpha^2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha^2} \overset{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\alpha} < \alpha.$$

$$\text{Οπότε τελικά: } 0 < 1 < \sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2.$$

ii. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\alpha &< \alpha^2 \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha}{2} &< \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} &< \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \\ \alpha &< \frac{\alpha^2 + \alpha}{2}\end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned}\alpha &< \alpha^2 \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha}{2} &< \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} &< \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} &< \alpha^2\end{aligned}$$

$$\text{Οπότε τελικά: } \alpha < \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} < \alpha^2.$$