

ΛΥΣΗ

α) Από τους τύπους για το άθροισμα και γινόμενο των ριζών εξίσωσης 2^{ου} βαθμού έχουμε :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4(\lambda + \frac{1}{\lambda})}{1} = 4(\lambda + \frac{1}{\lambda}) \text{ και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16}{1} = 16$$

Αφού $P = x_1 \cdot x_2 = 16 > 0$ και $S = x_1 + x_2 = 4(\lambda + \frac{1}{\lambda}) > 0$ για κάθε $\lambda > 0$, οι ρίζες x_1, x_2 είναι

θετικές και άρα μπορούν να αποτελούν πλευρές ορθογωνίου.

i. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 4(\lambda + \frac{1}{\lambda}) = 8(\lambda + \frac{1}{\lambda})$$

ii. Το εμβαδόν είναι: $E = x_1 \cdot x_2 = 16$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\Pi \geq 16 \Leftrightarrow$$

$$8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \geq 16 \Leftrightarrow$$

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\lambda} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda} \geq 0, \text{ που ισχύει για κάθε } \lambda > 0.$$

γ) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\Pi = 16 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ η περίμετρος είναι 16 (δηλαδή $2(x_1 + x_2) = 16$ και τελικά $x_1 + x_2 = 8$) και το εμβαδόν είναι 16 (δηλαδή $x_1 \cdot x_2 = 16$), οπότε $x_1 = x_2 = 4$. Επομένως το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.