

ΛΥΣΗ

α)

- i. Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι για τη διαγώνιο δ ενός τετραγώνου πλευράς x ισχύει:

$$\delta^2 = x^2 + x^2, \text{ δηλαδή}$$

$$\delta^2 = 2x^2, \text{ άρα}$$

$$\sqrt{\delta^2} = \sqrt{2x^2} \text{ και επειδή } \delta, x > 0 \text{ προκύπτει ότι:}$$

$$\delta = \sqrt{2}x.$$

- ii. Από το ερώτημα α)i) προκύπτει ότι αν ένα από τα τετράγωνα της ακολουθίας έχει πλευρά x το επόμενο του έχει πλευρά $\sqrt{2}x$ και τα αντίστοιχα εμβαδά είναι x^2 και $(\sqrt{2}x)^2 = 2x^2$. Άρα, ο λόγος λ των εμβαδών δύο διαδοχικών τετραγώνων δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

και είναι σταθερός. Οπότε, τα εμβαδά των τετραγώνων είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = 2$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha^2$.

Ο γενικός όρος της προόδου δίνεται από τη σχέση $\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1} = \alpha^2 2^{n-1}$.

β)

- i. Ισχύει ότι

$$\alpha_4 = 8, \text{ άρα}$$

$$\alpha^2 2^{4-1} = 8, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha^2 \cdot 8 = 8, \text{ οπότε}$$

$$\alpha^2 = 1$$

και επειδή $\alpha > 0$ έχουμε ότι $\alpha = 1$.

- ii. Το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου δίνεται από τη σχέση:

$$S_n = \alpha_1 \frac{(\lambda^n - 1)}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Για να είναι το συνολικό εμβαδών των αρχικών τετραγώνων ίσο με 255 τ.μ πρέπει να ισχύει:

$$S_n = 255 \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$2^n - 1 = 255, \text{ δηλαδή}$$

$$2^{\nu} = 256.$$

Αλλά $256 = 2^8$. Άρα, $2^{\nu} = 2^8$, οπότε $\nu = 8$. Άρα το πλήθος των τετραγώνων που έχουν συνολικό εμβαδόν 255τ.μ. είναι 8.