

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι η εξίσωση είναι στην μορφή $ax^2 + bx + c = 0$ με

$$a = 1, b = -2\lambda, c = \lambda^2 - 1 \text{ και}$$

$\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4 = 4 > 0$, άρα η διακρίνουσα Δ είναι πάντα θετική, ανεξάρτητα από την οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ .

β) 1^{ος} τρόπος:

$$\rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2\lambda) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{2\lambda \pm 2}{2} = \frac{2(\lambda \pm 1)}{2} = \lambda \pm 1. \text{ Όστε } \rho_1 = \lambda - 1, \rho_2 = \lambda + 1$$

2^{ος} τρόπος:

Η εξίσωση γράφεται $(x - \lambda)^2 - 1^2 = 0$ και ισοδύναμα έχουμε

$$(x - \lambda - 1)(x - \lambda + 1) = 0 \text{ άρα}$$

$$x - \lambda - 1 = 0 \text{ ή } x - \lambda + 1 = 0. \text{ Όστε } x = \lambda + 1 \text{ ή } x = \lambda - 1$$

Έτσι $\rho_1 = \lambda - 1, \rho_2 = \lambda + 1$ αφού $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Πρέπει $|\rho_2 - (-\rho_1)| \geq 8 \Leftrightarrow |\rho_1 + \rho_2| \geq 8$. Αν έχουμε βρει τις ρίζες τότε $\rho_1 + \rho_2 = 2\lambda$.

$$\text{Χωρίς να βρούμε τις ρίζες, από τύπους Vieta, } \rho_1 + \rho_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2\lambda)}{1} = 2\lambda.$$

$$\text{Άρα, πρέπει } |2\lambda| \geq 8 \Leftrightarrow 2|\lambda| \geq 8 \Leftrightarrow |\lambda| \geq 2 \Leftrightarrow \lambda \leq -2 \text{ ή } \lambda \geq 2.$$

δ) Έστω το τριώνυμο $f(x) = 1 \cdot x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1$ τις ρίζες του οποίου έχουμε βρει στο β) ερώτημα.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1 = f(k) < 0$, σχέση που προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα προσήμου του $f(x)$

x	$-\infty$	ρ_1	k	ρ_2	$+\infty$
$f(x)$		+	-	+	