

ΛΥΣΗ

α) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $x^2 + 1$, οπότε $\frac{1}{x^2 + 1} > 0$, δηλαδή $f(x) > 0$, η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει δυο λύσεις και να τις προσδιορίσουμε.

Είναι:

$$f(x) = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = \alpha \stackrel{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{\alpha} - 1, \quad (1)$$

και επειδή $0 < \alpha < 1$, έχουμε $\frac{1}{\alpha} > 1$ οπότε $\frac{1}{\alpha} - 1 > 0$.

Επομένως η (1) έχει δυο (αντίθετες) λύσεις τις $x_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}$ και $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}$ που είναι και οι τετμημένες των κοινών σημείων τους.

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}, \text{ ή αρκεί, } \frac{|x|}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}, \text{ ή αρκεί, } 2|x| \leq x^2 + 1$$

που ισχύει, αφού από την προφανή ανισότητα $(|x| - 1)^2 \geq 0$ και την ισότητα $|x|^2 = x^2$ έπεται ότι $x^2 + 1 \geq 2|x|$.