

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta \cdot (\alpha^2 + 1) = \alpha \cdot (\beta^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta + \beta = \alpha \cdot \beta^2 + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta + \beta - \alpha \cdot \beta^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \cdot (\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta) \cdot (\alpha \cdot \beta - 1) = 0 \stackrel{\alpha \neq \beta}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = 1.$$

Άρα οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

β) Η παράσταση γράφεται:

$$K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}} = \frac{\alpha^{22} \cdot \beta^{24}}{\alpha^{-2} \cdot \alpha^{25} \cdot \beta^{25}} = \frac{\alpha^{22} \cdot \beta^{24}}{\alpha^{23} \cdot \beta^{25}} = \frac{\alpha^{22}}{\alpha^{23}} \cdot \frac{\beta^{24}}{\beta^{25}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = 1.$$

γ) Γνωρίζουμε πως $\alpha + \beta = \frac{5}{2}$ και $\alpha \cdot \beta = 1$ με $\alpha, \beta > 0$. Σύμφωνα με τους τύπους Vieta:

$$s = \alpha + \beta \text{ και } p = \alpha \cdot \beta, \quad x^2 - sx + p = 0$$

προκύπτει ότι οι αριθμοί α, β είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (-5)^2 - 16 = 9$ και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x_1 = 2 \text{ ή } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι $\alpha=2$ και $\beta = \frac{1}{2}$ ή αντίστροφα.

δ) Από το προηγούμενο ερώτημα θεωρούμε $\alpha=2$ και $\beta = \frac{1}{2}$. Για να είναι το σχήμα τετράγωνο πρέπει τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να γίνουν ίσα. Έστω ω ο αριθμός που θα προσθέσουμε στον μικρότερο που είναι ο β για να γίνει ίσο με το α , τότε :

$$\alpha = \beta + \omega \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} + \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{3}{2}.$$

Άρα πρέπει να προστεθεί στο β ο αριθμός $\frac{3}{2}$.