

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A,B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0. \text{ Θέτουμε } x^2 = \omega$$

και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$.

Για $\omega = -2$ έχουμε $x^2 = -2$ που είναι αδύνατη.

Για $\omega = 1$ έχουμε $x^2 = 1$ οπότε $x = 1$ ή $x = -1$.

Επειδή το σημείο A βρίσκεται πιο αριστερά από το B, το σημείο A θα έχει μικρότερη τετμημένη, οπότε η τετμημένη του σημείου A είναι -1 και η τετμημένη του σημείου B είναι 1.

Για $x = -1$ είναι $f(-1) = 1$ οπότε A(-1,1).

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$ οπότε B(1,1).

Αφού Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$, το σημείο Γ θα έχει τετμημένη 0 και τεταγμένη $g(0) = 2$, οπότε Γ(0,2).

β) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων A,B δηλαδή για $x \in (-1,1)$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, για τις τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^4 < 2 - x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 < 0$. Θέτουμε $x^2 = \omega$ και η ανίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 < 0$. Το τριώνυμο $\omega^2 + \omega - 2$ έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$ και $\alpha = 1 > 0$ οπότε γίνεται αρνητικό για τις τιμές του ω που είναι μεταξύ των ριζών του, δηλαδή για $-2 < \omega < 1$ και άρα $-2 < x^2 < 1$. Όμως η ανίσωση $-2 < x^2$ αληθεύει για κάθε πραγματική τιμή του x, οπότε πρέπει και αρκεί $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$ που επαληθεύει την απάντηση στο β) ερώτημα.