

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και άρα $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

β) Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 4$ έχει ρίζες τις 1 και 4, οπότε είναι $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$ και επομένως:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-1)}{x-1} = (x-2) \cdot (x-4) = x^2 - 6x + 8, x \in A.$$

γ) Έχουμε:

$$f(x) \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq 0.$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
x^2-6x+5	+	0	-	0	+

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 6x + 5$ φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και η ανίσωση $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ αληθεύει για $x \in [1, 5]$. Όμως $x \neq 1$, οπότε $x \in (1, 5]$.

δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της g με τη γραφική παράσταση της f είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow x^4 - 6x - 4 = x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0,$$

η οποία θέτοντας $x^2 = \omega$ γίνεται

$$\omega^2 - \omega - 12 = 0 \text{ με ρίζες } \omega = -3 \text{ (απορρίπτεται) και } \omega = 4 \text{ (δεκτή).}$$

$$\text{Άρα } x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

$$\text{Για } x = -2 \text{ έχουμε } f(-2) = (-2)^2 - 6(-2) + 8 = 4 + 12 + 8 = 24$$

$$\text{και για } x = 2 \text{ έχουμε } f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 4 - 12 + 8 = 0.$$

Τελικά τα ζητούμενα κοινά σημεία είναι $B(-2, 24)$ και $\Gamma(2, 0)$.