

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $f(x)$ είναι οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f . Παρατηρούμε ότι ο τύπος $f(x)$ της συνάρτησης είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$, άρα το τριώνυμο θα γίνεται ομόσημο του $a = 1 > 0$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x , δηλαδή πάντα θετικό. Όστε $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει $f(-\alpha - 1) = f(\alpha)$ για κάθε πραγματικό αριθμό

$\alpha \neq -\frac{1}{2}$. Πράγματι: $f(-\alpha - 1) = (-\alpha - 1)^2 + (-\alpha - 1) + 1 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - \alpha = \alpha^2 + \alpha + 1 = f(\alpha)$.

γ) Έστω $M(\beta, f(\beta))$ και Α, Δ οι προβολές του Μ στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Τότε είναι $A(\beta, 0)$ και $\Delta(0, f(\beta))$. Η περίμετρος Ρ του ορθογωνίου ΟΑΜΔ θα είναι:

$$P = 2\beta + 2f(\beta) = 2[\beta + f(\beta)] = 2(\beta + \beta^2 + \beta + 1) = 2(\beta^2 + 2\beta + 1) = 2(\beta + 1)^2 = [\sqrt{2}(\beta + 1)]^2.$$