

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$x^3 - 2x^2 + x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Άρα $A = \mathbb{R} - \{1, 0\}$.

β) Έχουμε $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{x}{x(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, 0\}$ η εξίσωση γίνεται:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ \text{ή} \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{ή} \\ x=0 \text{ απορ} \end{cases}.$$

Άρα έχει μοναδική λύση την $x=2$.

δ) Αναζητούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R} - \{1, 0\}$ για τις οποίες ισχύει :

$$f(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > 1 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{1} \Leftrightarrow$$

$$|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

και επειδή $x \neq 1$, έχουμε τελικά ότι $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$.