

ΛΥΣΗ

α)

i. Αφού η περίμετρος του ορθογωνίου είναι ίση με 10cm, θα ισχύει:

$$2y + 2 \cdot (2x) = 10 \Leftrightarrow 2y + 4x = 10 \Leftrightarrow y + 2x = 5 \Leftrightarrow$$

$$y = 5 - 2x.$$

Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι θετικοί αριθμοί, οπότε:

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ \text{και} \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{και} \\ 5 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{και} \\ x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Τελικά: } x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

ii. Το εμβαδόν (σε cm<sup>2</sup>) του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\text{ορθ}} = y \cdot 2x = (5 - 2x) \cdot 2x = 10x - 4x^2, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

β) Το μέρος του εμβαδού (σε cm<sup>2</sup>) του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι:

$$E = E_{\text{ορθ}} - E_{\text{κύκλου}}^{\text{α}} = (10x - 4x^2) - \pi \cdot x^2 = 10x - (4 + \pi)x^2, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

γ)

i. Το εμβαδό E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο πρέπει να είναι ίσο με  $(6 - \pi)\text{cm}^2$ , οπότε έχουμε:

$$E = 6 - \pi \Leftrightarrow$$

$$10x - (4 + \pi)x^2 = 6 - \pi \Leftrightarrow$$

$$(4 + \pi)x^2 - 10x + (6 - \pi) = 0 \quad (1).$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = 100 - 4 \cdot (4 + \pi) \cdot (6 - \pi) = 4 - 8\pi + 4\pi^2 = 4(1 - 2\pi + \pi^2) = 4(1 - \pi)^2 > 0, \quad \text{οπότε} \quad \eta$$

εξίσωση (1) έχει δυο λύσεις άνισες τις:

$$x = \frac{10 + 2(1 - \pi)}{2 \cdot (4 + \pi)} = \frac{12 - 2\pi}{2 \cdot (4 + \pi)} = \frac{2 \cdot (6 - \pi)}{2 \cdot (4 + \pi)} = \frac{6 - \pi}{4 + \pi}, \quad \text{που απορρίπτεται γιατί ο } x \text{ είναι}$$

ρητός.

$$\text{και } x = \frac{10 - 2(1 - \pi)}{2 \cdot (4 + \pi)} = \frac{8 + 2\pi}{8 + 2\pi} = 1$$

Τελικά η ακτίνα του κύκλου είναι  $x = 1\text{cm}$ .

ii. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι  $2x = 2\text{cm}$  και  $y = 5 - 2 \cdot 1 = 3\text{cm}$ .