

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

β) Ισχύει ότι $|x| \geq -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει για $x \leq 0$. Άρα,

$$|x| + x = 0 \Leftrightarrow |x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0.$$

γ) Δεδομένου ότι $|x^2 - 1| \geq 0$ και $|x| \geq -x \Leftrightarrow |x| + x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε ισοδύναμα:

$$|x| + |x^2 - 1| + x = 0 \Leftrightarrow$$

$$|x^2 - 1| + (|x| + x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ |x^2 - 1| = 0 \text{ και } |x| + x = 0 \right\}^{(\alpha), (\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\{x = \pm 1 \text{ και } x \leq 0\}.$$

Άρα $x = -1$.