

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$, οπότε οι τετμημένες τους α, β αντίστοιχα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-3=0$ που είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=13$ και ρίζες τους αριθμούς $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Επειδή το σημείο A βρίσκεται αριστερά του B στον άξονα

$x'x$ είναι $\alpha < \beta$ και επειδή προφανώς $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, έχουμε τελικά ότι

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ και } \beta = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

β) Είναι $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} - 3 = 2 - \sqrt{2} - 3 = -1 - \sqrt{2} < 0$, οπότε $f(\sqrt{2}) < 0$.

γ) Όπως φαίνεται από το σχήμα αλλά και όπως προκύπτει και αλγεβρικά από τον τύπο της συνάρτησης f που είναι τριώνυμο, η συνάρτηση f παίρνει αρνητικές τιμές μόνο για τις τιμές του x που είναι εντός των ριζών της, δηλαδή για $x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$. Αφού λοιπόν δείξαμε στο β) ερώτημα ότι $f(\sqrt{2}) < 0$, θα

$$\text{πρέπει } \sqrt{2} \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right), \text{ δηλαδή } \frac{1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

δ) Η παράλληλη από το $\Gamma(\gamma, \delta)$ στον $x'x$ έχει εξίσωση $y = \delta$. Αφού η ευθεία με εξίσωση $y = \delta$ έχει με τη γραφική παράσταση της f ένα κοινό σημείο, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \delta \Leftrightarrow x^2 - x - 3 - \delta = 0$ έχει μία πραγματική ρίζα και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν έχει διακρίνουσα ίση με το μηδέν. Είναι

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4(-3 - \delta) = 0 \Leftrightarrow 1 + 12 + 4\delta = 0 \Leftrightarrow \delta = -\frac{13}{4}.$$

Επίσης η τετμημένη γ του σημείου Γ θα είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) = \delta \Leftrightarrow x^2 - x - 3 - \delta = 0, \text{ οπότε } \gamma = -\frac{-1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

Εναλλακτικά αφού το σημείο $\Gamma(\gamma, \delta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f έχουμε

$$f(\gamma) = \delta \Leftrightarrow \gamma^2 - \gamma - 3 = -\frac{13}{4} \Leftrightarrow \gamma^2 - \gamma - 3 + \frac{13}{4} = 0 \Leftrightarrow \gamma^2 - \gamma + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{2}$$