

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί

$$x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \end{cases}.$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$$A = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

β) Επειδή το $0 \notin A$ η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $y'y$.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $x \in A$.

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^7 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^6 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^6 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}.$$

Επειδή $0 \notin A$, $-1 \notin A$, $1 \notin A$ η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο σύνολο A και επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $x'x$.

$$\gamma) \text{ Είναι } f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x} = \frac{x(x^6 - 1)}{x(x^2 - 1)} = \frac{(x^2)^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2 - 1} = x^4 + x^2 + 1 \text{ για}$$

κάθε $x \in A$.

δ) Είναι $f(x) = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$. Θέτουμε $x^2 = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega = 1$, $\omega = -2$ αφού $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -1$ και

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = -2.$$

Για $\omega = 1$ έχουμε $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ που όμως δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού A .

Για $\omega = -2$ έχουμε $x^2 = -2$ που είναι αδύνατη.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 3$ δεν έχει λύση στο σύνολο A .