

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 36 - 4\lambda$ και για να έχει πραγματικές ρίζες πρέπει και αρκεί $\Delta \geq 0$ ισοδύναμα $36 - 4\lambda \geq 0$ οπότε $-4\lambda \geq -36$ και τελικά $\lambda \leq 9$.

β)

i. Αφού οι πραγματικοί αριθμοί α, β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο λ θα είναι ρίζες της (1) και αυτό όπως δείξαμε στο α) ερώτημα συμβαίνει αν και μόνο αν $\lambda \leq 9 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \leq 9$.

ii. Αφού οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι ρίζες της (1), θα είναι $\alpha = \beta$ αν και μόνο αν η (1) έχει δύο ρίζες ίσες, δηλαδή ισοδύναμα αν $\Delta = 0$ δηλαδή $36 - 4\lambda = 0$ οπότε $-4\lambda = -36$ και τελικά $\lambda = 9$ πράγμα που σημαίνει ότι $\alpha \cdot \beta = 9$.

γ) Έστω α, β οι διαστάσεις τυχαίου ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο 12. Τότε $2\alpha + 2\beta = 12$ δηλαδή $\alpha + \beta = 6$. Το εμβαδόν τους είναι ίσο με $\alpha \cdot \beta$.

Δείξαμε στο β) ερώτημα ότι αν για δύο πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $\alpha + \beta = 6$, τότε $\alpha \cdot \beta \leq 9$ και μάλιστα $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

Συνεπώς η μεγαλύτερη τιμή του εμβαδού είναι 9 και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ίσες, δηλαδή αν και μόνο αν είναι τετράγωνο.