

ΛΥΣΗ

α) Για να υπάρχουν δύο σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ θα πρέπει η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες.

Άρα $\Delta > 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 + 16\lambda^2 > 0$ που ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ σαν άθροισμα μη αρνητικών αριθμών οι οποίοι δεν μηδενίζονται συγχρόνως.

β) Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$ είναι $P = -4\lambda^2 < 0$, αφού $\lambda \neq 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ετερόσημες για κάθε $\lambda \neq 0$.

γ) Το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα $x'x$ είναι $A'(4, -4)$ και για να ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα ισχύει :

$$f(4) = -4 \Leftrightarrow 16 - 4(\lambda - 1) - 4\lambda^2 = -4 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -3.$$

δ) Για $\lambda = -1$

$$f(x) = x^2 + 2x - 4$$

$$\text{Πρέπει } f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 < 0$$

$$\text{Το τριώνυμο έχει: } \Delta = 4 + 16 = 20$$

$$\text{και ρίζες: } x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

Αφού $a = 1 > 0$ το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{5}$	$-1 + \sqrt{5}$	$+\infty$	
$f(x) = x^2 + 2x - 4$	+	0	-	0	+

Άρα $f(x) < 0$ για $x \in (-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5})$.