

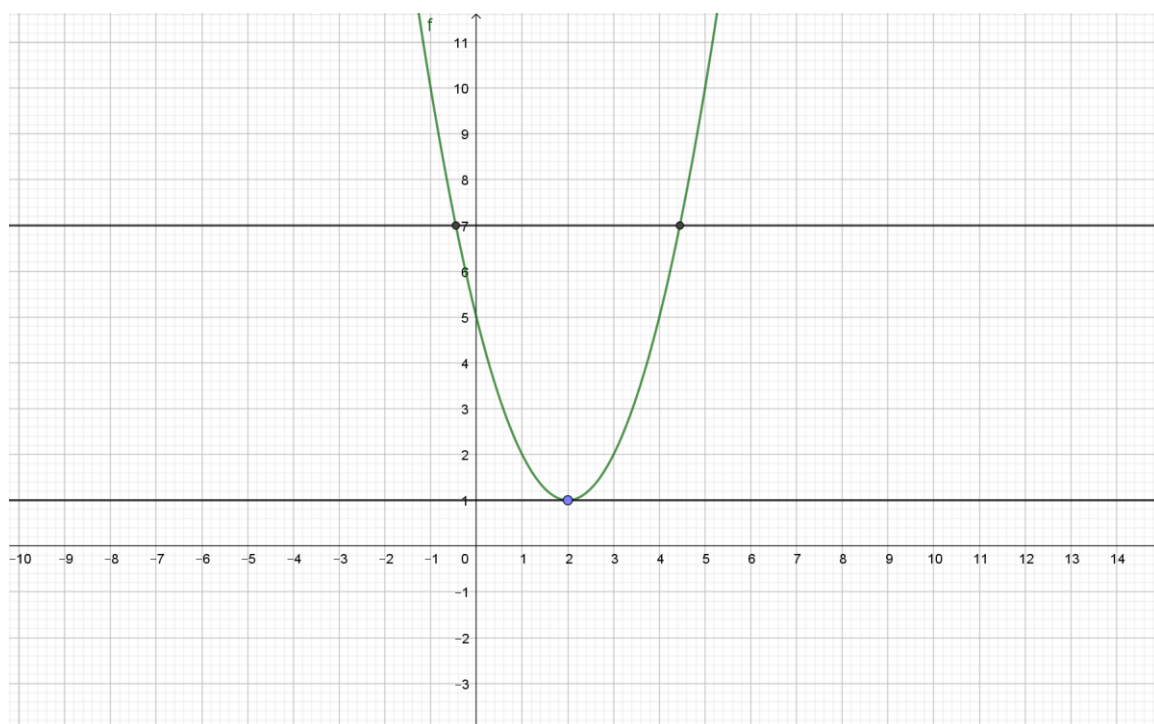
ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία $y = 7$ είναι παράλληλη στον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,7)$ και όπως βλέπουμε από το σχήμα έχει 2 κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .

Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ είναι ίσο με το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 7$. Είναι

$$f(x) = 7 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 24 > 0$ που σημαίνει ότι έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως αποδείχτηκε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία $y = 7$ ακριβώς δύο κοινά σημεία.



β)

i. Η ευθεία $y = \lambda$ είναι παράλληλη στον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, \lambda)$.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, εξαρτάται από το αν η τιμή του λ είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με 1, διότι με βάση το σχήμα βλέπουμε ότι η μικρότερη τιμή της συνάρτησης είναι 1. Συγκεκριμένα βλέπουμε από το σχήμα ότι:

- αν $\lambda < 1$ η ευθεία $y = \lambda$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν $\lambda = 1$ η ευθεία $y = \lambda$ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν $\lambda > 1$ η ευθεία $y = \lambda$ έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .

ii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι το ίδιο με το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - \lambda = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$$\Delta = (-4)^2 - 4(5 - \lambda) = 16 - 20 + 4\lambda = 4\lambda - 4 = 4(\lambda - 1).$$

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας.

Συγκεκριμένα :

- αν $\lambda < 1$ τότε $\Delta < 0$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν $\lambda = 1$ τότε $\Delta = 0$ οπότε η εξίσωση έχει 1 διπλή ρίζα και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν $\lambda > 1$ τότε $\Delta > 0$ οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .

γ) Αφού η ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ συμπεραίνουμε αφενός ότι $\lambda > 1$ και αφετέρου ότι οι αριθμοί x_1, x_2 θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = \lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - \lambda = 0$.

Η εξίσωση αυτή για $\lambda > 1$ έχει δύο ρίζες άνισες και έχουμε ότι

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4}{1} = 4.$$