

ΛΥΣΗ

α) Αφού το σημείο $M(x,y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ισχύει ότι

$$y = f(x) = \frac{16}{x} > 0. \text{ Οι συντεταγμένες του σημείου } B \text{ είναι } B(x, 0) \text{ και του σημείου } A(0, \frac{16}{x}).$$

Το ορθογώνιο $OAMB$ έχει εμβαδόν $(OAMB) = (OA) \cdot (OB) = \frac{16}{x} \cdot x = 16$ τετραγωνικές

μονάδες και περίμετρο $\Pi(x) = 2(OA) + 2(OB) = 2 \cdot \frac{16}{x} + 2 \cdot x = 2x + \frac{32}{x}, x > 0.$

β) Αναζητούμε τις τιμές του $x > 0$ για τις οποίες $\Pi(x) = 20$ δηλαδή $2x + \frac{32}{x} = 20$ και

ισοδύναμα $2x^2 + 32 = 20x$ δηλαδή $2x^2 - 20x + 32 = 0$ και τελικά $x^2 - 10x + 16 = 0.$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $x = 2$ ή $x = 8$ αφού $S = 2 + 8 = 10$ και $P = 2 \cdot 8 = 16.$

Για $x = 2$ είναι $y = \frac{16}{2} = 8$ οπότε $M_1(2, 8).$

Για $x = 8$ είναι $y = \frac{16}{8} = 2$ οπότε $M_2(8, 2).$

γ)

i. Το $OAM'B$ είναι τετράγωνο αν και μόνο αν $(OA) = (OB)$ δηλαδή ισοδύναμα αν $\frac{16}{x} = x$

οπότε $x^2 = 16$ και επειδή $x > 0$ έχουμε ότι $x = 4.$

ii. Θα δείξουμε ότι $\Pi(x) \geq \Pi(4)$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή ισοδύναμα

$2x + \frac{32}{x} \geq 16$ και επειδή $x > 0$ έχουμε ισοδύναμα $2x^2 + 32 \geq 16x$ δηλαδή $2x^2 + 32 - 16x \geq 0$

δηλαδή $x^2 + 16 - 8x \geq 0$ και τελικά $(x-4)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 4$, που σημαίνει ότι από όλα τα ορθογώνια $OAMB$ τη μικρότερη περίμετρο την έχει το τετράγωνο $OAM'B$.