

ΛΥΣΗ

α) Ο δέκατος τριγωνικός αριθμός είναι

$$T_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

β) Ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός μόνο όταν η εξίσωση $T_v = 120$ έχει λύση θετικό ακέραιο αριθμό. Είναι:

$$T_v = 120 \Leftrightarrow \frac{v(v+1)}{2} = 120 \Leftrightarrow v(v+1) = 240 \Leftrightarrow v^2 + v - 240 = 0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = 961$ και οι ρίζες της

$$v_{1,2} = \frac{-1 \pm 31}{2} = \begin{cases} v_1 = \frac{30}{2} = 15 \\ v_2 = -\frac{32}{2} = -16 \end{cases}$$

Από τις ρίζες της εξίσωσης δεκτή είναι μόνο ο αριθμός 15. Άρα ο αριθμός 120 είναι ο δέκατος πέμπτος τριγωνικός αριθμός ($T_{15} = 120$).

γ) Έστω T_v, T_{v+1} δυο διαδοχικοί τριγωνικοί αριθμοί με v θετικό ακέραιο. Τότε έχουμε:

$$T_v + T_{v+1} = \frac{v(v+1)}{2} + \frac{(v+1)(v+2)}{2} = \frac{1}{2}(v+1)(v+v+2) = \frac{1}{2}(v+1) \cdot 2(v+1) = (v+1)^2$$

οπότε το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.