

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(2+x) = (2+x)^2 - 4(2+x) + 5 = x^2 + 4x + 4 - 4x - 8 + 5 = x^2 + 1$$

και

$$f(2-x) = (2-x)^2 - 4(2-x) + 5 = x^2 - 4x + 4 + 4x - 8 + 5 = x^2 + 1$$

οπότε $f(2+x) = f(2-x)$.

β) Με $x = 1,52$ η ισότητα του ερωτήματος (α) δίνει

$$f(2+1,52) = f(2-1,52), \text{ οπότε } f(3,52) - f(0,48) = 0 \quad (1)$$

ενώ με $x = 1,48$ δίνει

$$f(2+1,48) = f(2-1,48), \text{ οπότε } f(3,48) - f(0,52) = 0 \quad (2)$$

Με τη βοήθεια των (1) και (2) παίρνουμε:

$$A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48) = f(3,52) - f(0,48) + f(3,48) - f(0,52) = 0.$$

γ) Το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία είναι ίσο με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 2x + \beta$. Με $x = -5$ έχουμε:

$$f(x) = 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 = 0$$

που είναι αδύνατη αφού έχει διακρίνουσα $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$.

Άρα η C_f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta = -5$.

δ) Η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $y = 2x + \beta$, μόνο όταν η εξίσωση $f(x) = 2x + \beta$ έχει μια τουλάχιστον λύση. Είναι:

$$f(x) = 2x + \beta \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2x + \beta \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 - \beta = 0$$

Η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον λύση μόνο όταν η αντίστοιχη διακρίνουσα είναι μη αρνητική. Είναι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 36 - 4(5 - \beta) \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 5 + \beta \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq -4$$

οπότε η ζητούμενη μικρότερη τιμή του β είναι η τιμή $\beta = -4$.