

ΛΥΣΗ

α) i. Οι αριθμοί αυτοί δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, καθώς θα έπρεπε να ισχύει $2\beta = \alpha + \gamma$, δηλαδή:

$81 = \frac{27\sqrt{3}}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$, επομένως $\frac{81}{54} = \sqrt{3}$, το οποίο δεν ισχύει αφού $\sqrt{3}$ άρρητος, ενώ ο $\frac{81}{54}$ είναι ρητός, άρα δεν μπορούν να είναι ίσοι.

ii. Οι δύο αριθμοί είναι θετικοί, για να είναι ίσοι, αρκεί τα τετράγωνά τους να είναι ίσα μεταξύ τους:

$$\left(\frac{27\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{3})^7\right)^2 \Leftrightarrow \frac{27^2 \cdot 3}{4} = \frac{1}{4}(\sqrt{3})^{14} \Leftrightarrow \frac{3^6 \cdot 3}{4} = \frac{1}{4} \cdot 3^7, \text{ το οποίο ισχύει.}$$

β) Η γεωμετρική πρόοδος θα έχει σταθερό λόγο: $\lambda = \frac{\frac{81\sqrt{3}}{2}}{\frac{81}{2}} = \sqrt{3}$.

Ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι $\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1} = \alpha_1 (\sqrt{3})^{n-1}$.

Όμως, εφόσον, ισχύει ότι $\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$ έχουμε ότι $\alpha_1 (\sqrt{3})^{7-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$, οπότε

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^{8-7} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

Συνεπώς, ισχύει ότι $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα ο γενικός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{3})^{n-1} = \frac{(\sqrt{3})^n}{2}.$$

γ) Για το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου ισχύει ότι:

$$S_{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}^{10} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}.$$