

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$A = 2 + \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = 4 - \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 2 = 4 - 1 = 3$$

β) Για οποιοδήποτε αριθμό x με $x \neq 0$ έχουμε:

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x} - x + \frac{1}{x}\right) = 2x \cdot \frac{2}{x} = 4$$

γ) Το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f καθορίζεται από το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, οπότε αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f , η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει πραγματικές λύσεις. Είναι:

$$f(x) = \alpha \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \alpha \Leftrightarrow x^2 + 1 = \alpha x \Leftrightarrow x^2 - \alpha x + 1 = 0$$

Η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις, οπότε ισχύει $\Delta \geq 0$. Έτσι, έχουμε:

$\Delta = \alpha^2 - 4 \geq 0$, οπότε $\alpha^2 \geq 4$, απ' όπου προκύπτει $\sqrt{\alpha^2} \geq \sqrt{4}$, δηλαδή $|\alpha| \geq 2$, που είναι το ζητούμενο.