

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = (\sqrt{3} - 1)^2 + (-\sqrt{3} - 1)^2 = 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3 + 1 + 2\sqrt{3} = 4 + 4 = 8$$

β) Ένα σημείο $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f , βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 4$ μόνο όταν ισχύει $f(x) < 4$.

Είναι:

$$f(x) < 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{4} \Leftrightarrow |x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$$

Οι ακέραιοι που περιέχονται στο διάστημα $(-1, 3)$ είναι οι: 0, 1, 2 και επειδή $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $\Gamma(2, 1)$.

γ) Αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε:

$$(\alpha - 1)^2 = (\beta - 1)^2, \text{ οπότε}$$

$$(\alpha - 1)^2 - (\beta - 1)^2 = 0$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$(\alpha - 1 + \beta - 1)(\alpha - 1 - \beta + 1) = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$(\alpha + \beta - 2)(\alpha - \beta) = 0$$

Η τελευταία ισότητα, με $\alpha \neq \beta$ δίνει:

$$\alpha + \beta - 2 = 0, \text{ οπότε } \alpha + \beta = 2$$

που είναι το ζητούμενο.