

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ , $\kappa \cdot \lambda$ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα πρέπει το γινόμενο πρώτου επί τον τρίτο να ισούται με το τετράγωνο του δευτέρου.

$$\text{Πράγματι } \frac{\kappa}{\lambda} \cdot (\kappa \cdot \lambda) = \frac{\kappa \cdot \kappa \cdot \lambda}{\lambda} = \kappa^2.$$

Άρα ισχύει.

β) Οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ , $\kappa \cdot \lambda$ έχουν άθροισμα:

$$\frac{\kappa}{\lambda} + \kappa + \kappa \cdot \lambda = \frac{\kappa + \kappa\lambda + \kappa\lambda^2}{\lambda} = \frac{\kappa \cdot (1 + \lambda + \lambda^2)}{\lambda} = \frac{\kappa}{\lambda} \cdot (1 + \lambda + \lambda^2)$$

Προφανώς $\frac{\kappa}{\lambda} \neq 0$.

Οπότε για να έχουν άθροισμα διάφορο του μηδενός αρκεί $\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0$.

Πράγματι το τριώνυμο $\lambda^2 + \lambda + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0.$$

Άρα $\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

γ) Για την εξίσωση δευτέρου βαθμού $x^2 + 10x + 16 = 0$ το γινόμενο των ριζών ισούται με

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16}{1} = 16.$$

Όμως από το (α) έχουμε $\frac{\kappa}{\lambda} \cdot (\kappa \cdot \lambda) = \kappa^2$.

Οπότε $\kappa^2 = 16 \Leftrightarrow |\kappa| = 4 \Leftrightarrow \kappa = 4$ αφού $\kappa > 0$.

Για την εξίσωση δευτέρου βαθμού $x^2 + 10x + 16 = 0$ το άθροισμα των ριζών ισούται με

$$S = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-10}{1} = -10.$$

Οπότε έχουμε:

$$\frac{4}{\lambda} + 4\lambda = -10 \Leftrightarrow 4 + 4\lambda^2 = -10\lambda \Leftrightarrow 4 + 4\lambda^2 + 10\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα Δ είναι $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$, οπότε έχουμε δύο ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-5-3}{4} \\ \frac{-5+3}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \left\{ \begin{array}{l} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right. \text{δεκτές.}$$

Επομένως για $\lambda = -2$ οι αριθμοί είναι $-2, 4, -8$, ενώ για $\lambda = -\frac{1}{2}$ οι αριθμοί είναι $-8, 4, -2$