

Λύση

α) Κάνοντας πράξεις στη δοθείσα σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + \beta \cdot \frac{1}{\alpha} + \beta \cdot \frac{1}{\beta} = 4, \text{ τότε}$$

$$1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 = 4, \text{ τότε}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$