

ΛΥΣΗ

α) Λύνουμε την ανίσωση  $f(x) < 0$ . Είναι:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - (x - 1)^2 < 0 \Leftrightarrow -(x - 1)^2 < -1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 > 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2} > 1 \Leftrightarrow |x - 1| > 1 \Leftrightarrow x - 1 < -1 \text{ ή } x - 1 > 1$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 2.$$

Άρα  $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ .

β) Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν  $x \geq 1$ , τότε  $x - 1 \geq 0$ , οπότε  $|x - 1| = x - 1$  και  $g(x) = x - 1 + 2 = x + 1$

ii) Αν  $x < 1$ , τότε  $x - 1 < 0$ , οπότε  $|x - 1| = -x + 1$  και  $g(x) = -x + 1 + 2 = -x + 3$ .

$$\text{Άρα } g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ -x + 3, & x < 1. \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  αποτελείται :

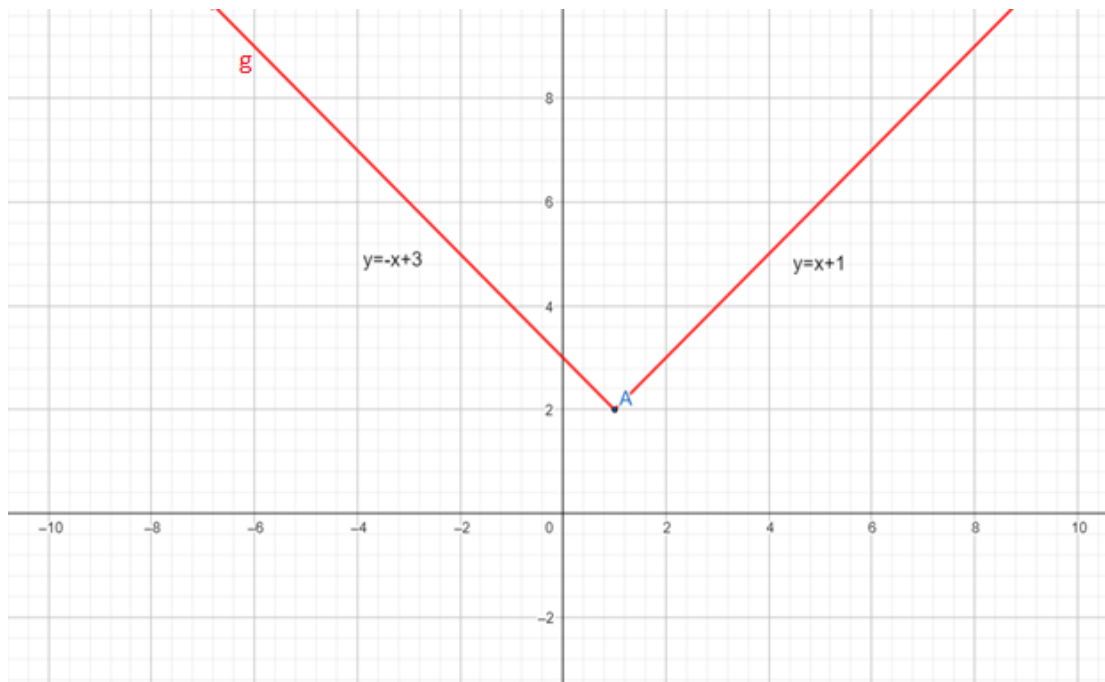
ι) από το τμήμα της ευθείας  $y = x + 1$ , όταν  $x \geq 1$  για  $x \in (1, +\infty)$ , με πίνακα τιμών

x	y
1	2
2	3

ii) από το τμήμα της ευθείας  $y = -x + 3$ , όταν  $x < 1$  για  $x \in (-\infty, 1)$ , με πίνακα τιμών

x	y
1	2
-2	5

Συνεπώς στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση  $C_g$



γ) Είναι:  $f(x) - g(x) = 1 - (x - 1)^2 - |x - 1| - 2 = -|x - 1|^2 - |x - 1| - 1$ .  
 Αν θέσουμε  $|x - 1| = \omega$  τότε η παραπάνω διαφορά γράφεται  $-\omega^2 - \omega - 1$  και  
 είναι πάντα αρνητική, αφού είναι τριώνυμο του  $\omega$ , με  $a = -1 < 0$  και διακρίνουσα  
 $\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(-1) = 1 - 4 = -3 < 0$ .

Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε  $f(x) - g(x) < 0$ , οπότε η γραφική παράσταση της  $f$  είναι  
 κάτω από τη γραφική παράσταση της  $g$ .

Εναλλακτική λύση:

Ισχύουν  $(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - (x - 1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1$   
 με  $x \in \mathbb{R}$  και  $|x - 1| \geq 0 \Leftrightarrow |x - 1| + 2 \geq 2 \Leftrightarrow g(x) \geq 2$  με  $x \in \mathbb{R}$

Άρα  $f(x) < g(x)$ , οπότε η γραφική παράσταση της  $f$  είναι κάτω από τη γραφική  
 παράσταση της  $g$ .