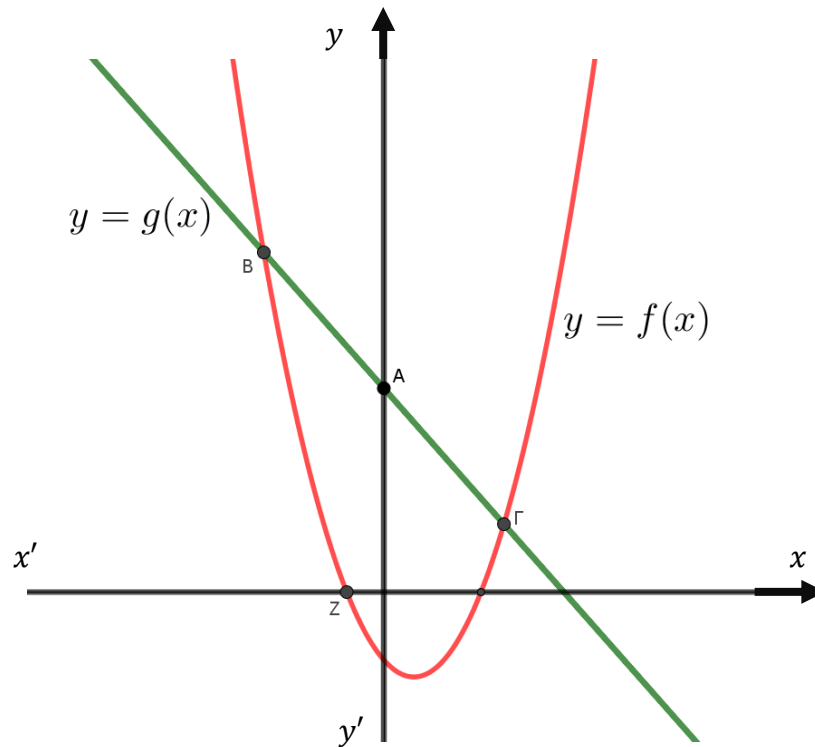


ΛΥΣΗ



α) Το σημείο Z έχει ως τετμημένη την αρνητική λύση της εξίσωσης  $f(x) = 0$  η οποία γράφεται  $x^2 - x - 1 = 0$  με διακρίνουσα  $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$ .

Άρα  $x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ , αφού  $1 < 5 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{5} \Rightarrow 1 < \sqrt{5} \Rightarrow 1 - \sqrt{5} < 0$ .

Η άλλη ρίζα είναι η  $x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ . Όστε  $Z\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right)$ .

Το σημείο A έχει τετμημένη μηδέν και τεταγμένη  $g(0) = 3 - 0 = 3$ , έτσι  $A(0, 3)$ .

Τα σημεία B και Γ έχουν ως τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης  $f(x) = g(x)$ , δηλαδή της εξίσωσης  $x^2 - x - 1 = 3 - x$  η οποία γράφεται  $x^2 = 4$ . Οπότε  $x^2 = 2^2$ , άρα  $x = 2$  ή  $x = -2$ .

Οι τεταγμένες των σημείων Γ και B θα είναι:

$f(2) = g(2) = 3 - 2 = 1$  και  $f(-2) = g(-2) = 3 - (-2) = 5$  αντίστοιχα.

Όστε  $B(-2, 5)$ ,  $\Gamma(2, 1)$  αφού το σημείο B βρίσκεται πιο αριστερά από το Γ, άρα θα έχει μικρότερη τετμημένη.

β) Πρέπει  $f(x) > g(x)$ , δηλαδή  $x^2 - x - 1 > 3 - x$ , οπότε  $\Leftrightarrow x^2 > 4$ , σχέση που γράφεται  $x^2 > 2^2$ , άρα  $|x| > |2|$ . Όστε  $x < -2$  ή  $x > 2$ .

Έτσι, για  $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$  θα είναι  $f(x) > g(x)$ .

γ) Προφανώς πρέπει να αποδείξουμε ότι  $|f(\alpha) - (-g(\alpha))| \geq 1$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha$ . Η σχέση αυτή ισοδύναμα γράφεται :

$$|f(\alpha) + g(\alpha)| \geq 1, \text{ άρα } |\alpha^2 - \alpha - 1 + 3 - \alpha| \geq 1, \text{ δηλαδή } |\alpha^2 - 2\alpha + 2| \geq 1. (I)$$

Παρατηρούμε ότι  $\alpha^2 - 2\alpha + 2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 1 = (\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$ , αφού

$$\text{για κάθε } \alpha \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } (\alpha - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1$$

Γνωρίζουμε όμως ότι αν  $y > 0$ , τότε είναι  $|y| = y$ .

Έτσι η σχέση (I) ισοδύναμα γράφεται  $|(\alpha - 1)^2 + 1| \geq 1$ , δηλαδή  $(\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1$ , οπότε  $(\alpha - 1)^2 \geq 0$  σχέση που ισχύει για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Εναλλακτικά, το τριώνυμο  $\alpha^2 - 2\alpha + 2$  έχει αρνητική διακρίνουσα

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4, \text{ άρα το τριώνυμο γίνεται ομόσημο του συντελεστή του } \alpha^2$$

δηλαδή του 1, άρα πάντα θετικό για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Έτσι

$$|\alpha^2 - 2\alpha + 2| = \alpha^2 - 2\alpha + 2. \text{ Έτσι η σχέση (I) γράφεται ισοδύναμα } \alpha^2 - 2\alpha + 2 \geq 1,$$

δηλαδή  $\alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$  άρα  $(\alpha - 1)^2 \geq 0$  ισχύει για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ .