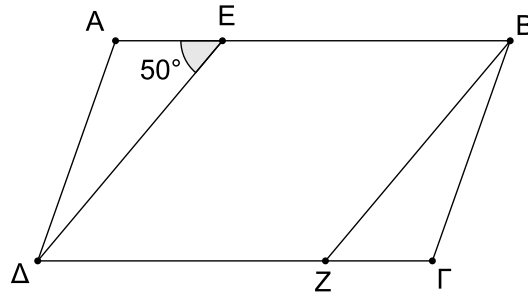


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία E, Z των πλευρών $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα, ώστε $BE = \Delta Z$ και $\widehat{A\hat{E}\Delta} = 50^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BZ\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B\hat{E}\Delta}$ και $\widehat{B\hat{Z}\Delta}$. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Είναι $BE \parallel \Delta Z$, γιατί οι απέναντι πλευρές AB , $\Gamma\Delta$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Επιπλέον, από τα δεδομένα έχουμε ότι $BE = \Delta Z$. Το τετράπλευρο $BZ\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του BE , ΔZ είναι ίσες και παράλληλες.

β) Οι γωνίες $\hat{A}\hat{E}\Delta$, $\hat{B}\hat{E}\Delta$ είναι παραπληρωματικές, οπότε $\hat{A}\hat{E}\Delta + \hat{B}\hat{E}\Delta = 180^\circ$. Όμως από τα δεδομένα έχουμε ότι $\hat{A}\hat{E}\Delta = 50^\circ$, άρα $50^\circ + \hat{B}\hat{E}\Delta = 180^\circ$ ή $\hat{B}\hat{E}\Delta = 130^\circ$.

Είναι $\hat{B}\hat{Z}\Delta = \hat{B}\hat{E}\Delta$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου $BZ\Delta E$, άρα $\hat{B}\hat{Z}\Delta = 130^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2A\Delta$ και τα μέσα E, Z των πλευρών $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

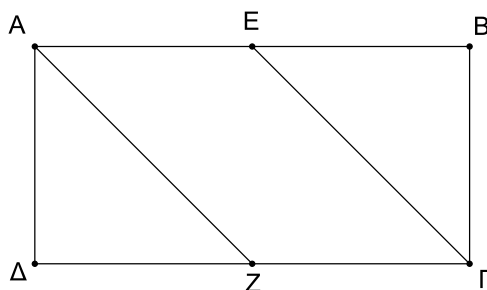
α) το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο $A\epsilon Z\Delta$ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, άρα θα είναι $AE \parallel \Gamma Z$.

Αφού τα σημεία E, Z είναι τα μέσα των $AB, \Gamma\Delta$, θα είναι $AE = \frac{AB}{2}$ και $\Gamma Z = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Όμως $AB = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, άρα θα είναι $AE = \Gamma Z$. Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του $AE, \Gamma Z$ είναι ίσες και παράλληλες.



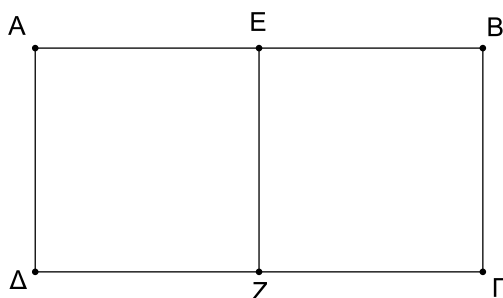
β) Είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, άρα θα είναι $AE \parallel \Delta Z$.

Αφού τα σημεία E, Z είναι τα μέσα των $AB, \Gamma\Delta$, θα είναι $AE = \frac{AB}{2}$ και $\Delta Z = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Όμως $AB = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, άρα θα είναι $AE = \Delta Z$. Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του $AE, \Delta Z$ είναι ίσες και παράλληλες.

Η γωνία $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου $AEZ\Delta$ είναι ορθή, γιατί το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $AB = 2A\Delta$, άρα $A\Delta = \frac{AB}{2}$. Επιπλέον, έχουμε ότι $AE = \frac{AB}{2}$, άρα $AE = A\Delta$.

Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι τετράγωνο, γιατί είναι παραλληλόγραμμο που έχει μια γωνία ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.



ΘΕΜΑ 2

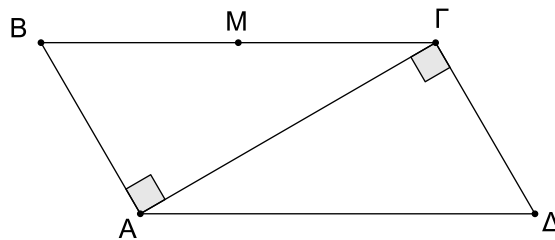
Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος έχουν κοινή πλευρά την $A\Gamma$ και $AB = \Gamma\Delta$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και $A\Delta = 8$, να βρείτε το μήκος του BM .

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Οι AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες, γιατί είναι κάθετες στην $A\Gamma$ στα σημεία της A , Γ αντίστοιχα.

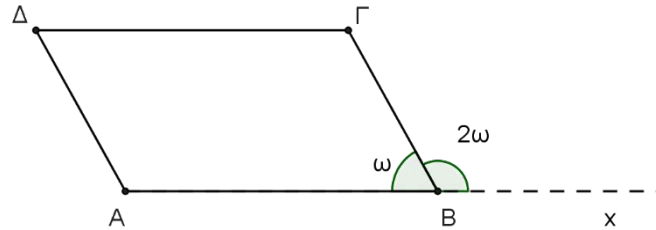
β) Από τα δεδομένα έχουμε ότι $AB = \Gamma\Delta$ και από το ερώτημα α έχουμε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του AB , $\Gamma\Delta$ είναι ίσες και παράλληλες.

γ) Είναι $B\Gamma = A\Delta$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Από τα δεδομένα έχουμε ότι $A\Delta = 8$, άρα $B\Gamma = 8$. Αφού το M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$,

θα είναι $BM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο και Bx προέκταση της πλευράς του AB προς το B .



α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση: Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος παράλληλες είναι οι πλευρές και απέναντι γωνίες είναι οι

(Μονάδες 8)

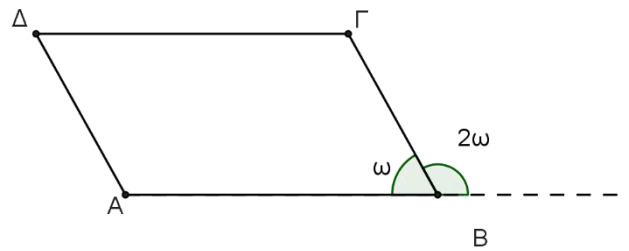
β) Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος να δείξετε ότι $\hat{\omega} = 60^\circ$.

(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Να τεκμηριώσετε με επιχειρήματα την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ



α) Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος παράλληλες είναι οι πλευρές **ΑΒ, ΔΓ** και οι πλευρές **ΑΔ, ΒΓ** και απέναντι γωνίες είναι οι **$\hat{Α}$, $\hat{Γ}$** και οι **$\hat{Δ}$, $\hat{Β}$** .

β) Οι γωνίες ω και 2ω του σχήματος είναι παραπληρωματικές, οπότε $\hat{\omega} + 2\hat{\omega} = 180^\circ$

ή $3\hat{\omega} = 180^\circ$ ή $\hat{\omega} = 60^\circ$.

γ) Αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι γωνίες $\hat{Α}$ και $\hat{\omega}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ, οπότε $\hat{Α} + \hat{\omega} = 180^\circ$ ή $\hat{Α} + 60^\circ = 180^\circ$ ή $\hat{Α} = 120^\circ$.

Αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{Δ} = \hat{\omega}$ και $\hat{Α} = \hat{Γ}$, οπότε $\hat{Δ} = 60^\circ$ και $\hat{Γ} = 120^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

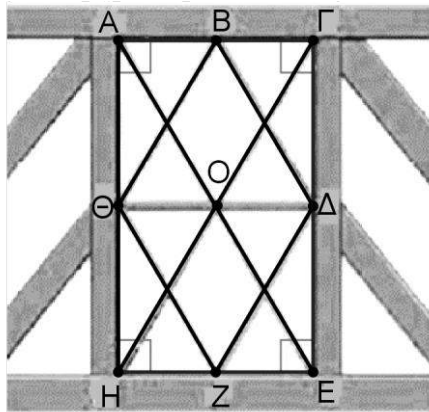
Στην εικόνα που ακολουθεί, υπάρχει το σχέδιο ενός παραθύρου με $BD = DZ = ZO = OB$ και τις γωνίες $\widehat{A\Gamma E}$, $\widehat{\Gamma\hat{E}H}$, $\widehat{E\hat{H}A}$, $\widehat{H\hat{A}\Gamma}$ ορθές.

α) Τι είδους τετράπλευρα είναι τα $B\Delta Z\Theta$ και $A\Gamma E\text{H}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Ένας μαθητής λέει «τα τμήματα AE και ΓH είναι ίσα μεταξύ τους» και μια μαθήτρια, όταν το άκουσε, συμπλήρωσε «και τα AO , OE , ΓO και OH είναι ίσα μεταξύ τους». Συμφωνείτε με τους ισχυρισμούς που διατύπωσαν ο μαθητής και η μαθήτρια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Το τετράπλευρο ΒΔΖΘ έχει όλες τις πλευρές του ΒΔ, ΔΖ, ΖΘ και ΘΒ ίσες από τα δεδομένα, οπότε είναι ρόμβος.

Το τετράπλευρο ΑΓΕΗ έχει τρεις τουλάχιστον γωνίες ορθές, για παράδειγμα τις $\widehat{A\Gamma E}$, $\widehat{\Gamma\hat{E}H}$ και $\widehat{E\hat{H}A}$ από τα δεδομένα, οπότε είναι ορθογώνιο.

β) Τα τμήματα ΑΕ και ΓΗ είναι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΑΓΕΗ, οπότε θα είναι ίσες, δηλαδή $AE = GH$. Επειδή το τετράπλευρο ΑΓΕΗ ως ορθογώνιο είναι και παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοι του ΑΕ και ΓΗ τεμνόμενες σε εσωτερικό τους σημείο Ο διχοτομούνται, δηλαδή είναι $AO = OE = GO = OH$. Συνεπώς, οι ισχυρισμοί των δυο μαθητών είναι αληθείς.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 70^\circ$, $AB = 5$ και $B\Gamma = 2AB$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 110^\circ$.

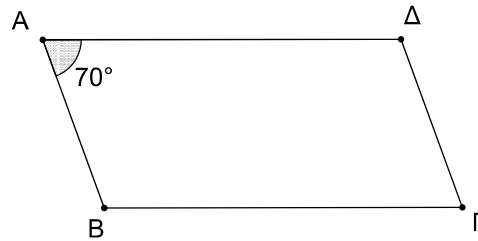
(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Είναι $AD \parallel BG$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων AD, BG με τέμνουσα την AB , άρα $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$. Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\hat{A} = 70^\circ$, οπότε $70^\circ + \hat{B} = 180^\circ$ ή $\hat{B} = 110^\circ$.

β) Οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες, άρα $\hat{\Gamma} = \hat{A} = 70^\circ$ και $\hat{\Delta} = \hat{B} = 110^\circ$.

γ) Από τα δεδομένα έχουμε ότι $AB = 5$ και $BG = 2AB = 2 \cdot 5 = 10$. Οι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $GD = AB = 5$ και $AD = BG = 10$. Η περίμετρος του παραλληλογράμμου $ABGD$ είναι $AB + BG + GD + DA = 5 + 10 + 5 + 10 = 30$.

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο και Bx η προέκταση της πλευράς του AB προς το B .

α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση: «Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι οι πλευρές όπως και οι πλευρές, απέναντι δε γωνίες είναι οι και οι ».

(Μονάδες 4)

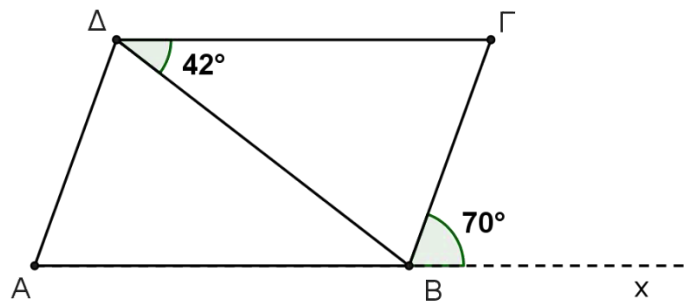
β) Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και τις γωνίες που σημειώνονται πάνω στο σχήμα, να υπολογίσετε με τη σειρά που ζητούνται:

i. Το μέτρο της γωνίας $\hat{A}$. (Μονάδες 8)

ii. Το μέτρο της γωνίας $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 5)

iii. Το μέτρο της γωνίας $\Delta\hat{B}A$. (Μονάδες 8)

Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

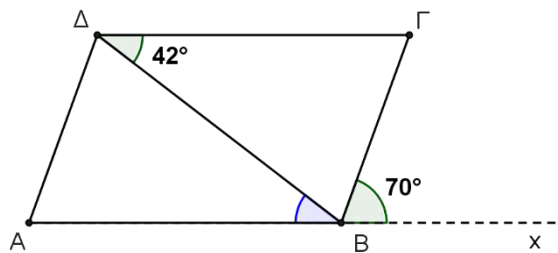


ΛΥΣΗ

α) «Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι οι πλευρές $AB, \Delta\Gamma$ όπως και οι πλευρές $A\Delta, B\Gamma$, απέναντι γωνίες είναι οι $\hat{A}, \hat{\Gamma}$ και $\hat{A\Delta\Gamma}, \hat{\Gamma\Delta A}$ ».

β)

- i. Η γωνία $\hat{A}$ είναι ίση τη γωνία $\hat{\Gamma\Delta A}$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παράλληλων πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ με τέμνουσα την AB , άρα $\hat{A} = 70^\circ$.
- ii. Η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, άρα $\hat{\Gamma} = 70^\circ$.
- iii. Η γωνία $\hat{\Delta\Gamma A}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{B\Delta\Gamma}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παράλληλων πλευρών $\Delta\Gamma$ και AB του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ με τέμνουσα την DB , άρα $\hat{\Delta\Gamma A} = 42^\circ$.



ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΔΓ με $\Delta\Gamma = 2AB$ και ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΓ. Αν είναι $AB = AD = BG = 12$ και $\hat{A} = 60^\circ$, να υπολογίσετε:

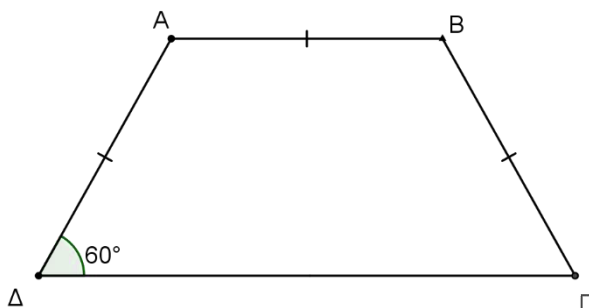
α) τις γωνίες του τραpezίου.

(Μονάδες 15)

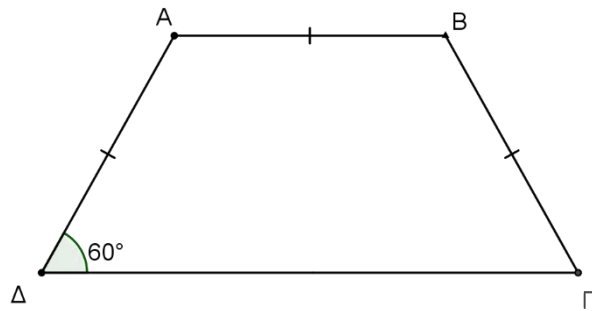
β) την περίμετρο του τραpezίου.

(Μονάδες 10)

Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



ΛΥΣΗ



α) Αφού το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, οι προσκείμενες γωνίες σε βάση του είναι ίσες. Οπότε $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$ (1) ως προσκείμενες γωνίες στη βάση $\Delta\Gamma$ και $\widehat{A} = \widehat{B}$ (2) ως προσκείμενες γωνίες στη βάση AB .

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\widehat{\Delta} = 60^\circ$, άρα και $\widehat{\Gamma} = 60^\circ$.

Από δεδομένα έχουμε ότι AB και $\Delta\Gamma$ είναι βάσεις του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$, οπότε $AB \parallel \Delta\Gamma$.

Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}$ είναι παραπληρωματικές, ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων AB και $\Delta\Gamma$ με τέμνουσα την AD , δηλαδή $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 180^\circ$ με $\widehat{\Delta} = 60^\circ$, οπότε $\widehat{A} = 120^\circ$.

Επειδή είναι $\widehat{A} = \widehat{B}$ (σχέση (2)), θα είναι $\widehat{B} = 120^\circ$.

β) Από τα δεδομένα έχουμε $\Delta\Gamma = 2AB$ με $AB = 12$, άρα $\Delta\Gamma = 2 \cdot 12 = 24$.

Η περίμετρος του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB + B\Gamma + \Delta\Gamma + AD = 12 + 12 + 24 + 12 = 60$.

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με $AD < AB$ και $\widehat{A} = 60^\circ$. Η ΑΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας του $\widehat{A}$ η οποία τέμνει την πλευρά ΔΓ σε σημείο Ε και η ΕΖ είναι η κάθετη από το Ε στην πλευρά ΑΒ.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε καθένα από τα ακόλουθα δύο ερωτήματα, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

α) Αν είναι $AD = 6$, τότε το ΔΕ είναι ίσο με:

Α: 6

Β: 12

Γ: 3

Δ: 16

(Μονάδες 15)

β) Αν η κάθετη που άγεται από το Ε προς την ευθεία ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ σε σημείο Ζ, τότε:

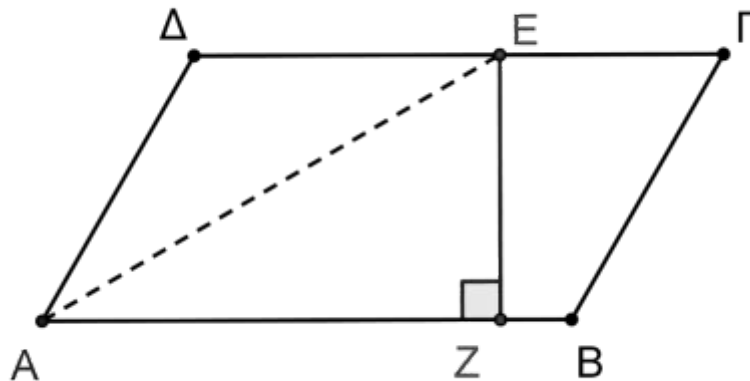
Α: $AE = EZ$

Β: $AE = \frac{1}{2} EZ$

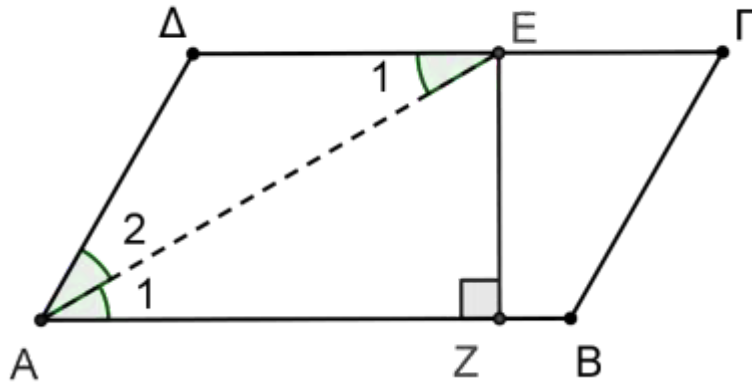
Γ: $AE = 2EZ$

Δ: $AE = 3EZ$

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ



α) Αφού η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και η γωνία $\hat{A} = 60^\circ$, τότε θα είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 30^\circ$ (1).

Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες, οπότε θα ισχύει $\hat{E}_1 = \hat{A}_1$ (2) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παράλληλων πλευρών ΑΒ και ΔΓ με τέμνουσα την ΑΕ.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_2 = \hat{E}_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με $ΑΔ = ΔΕ$ και $ΑΔ = 6$, άρα $ΔΕ = 6$.

Επομένως, σωστή απάντηση είναι η Α.

β) Επειδή η ΕΖ είναι κάθετη στη ΑΒ, το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$ και με $\hat{A}_1 = 30^\circ$ από τη σχέση (1), οπότε η απέναντί της κάθετη πλευρά ΕΖ θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας ΑΕ, δηλαδή $EZ = \frac{1}{2} AE$ ή $AE = 2EZ$.

Επομένως, σωστή απάντηση είναι η Γ.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AD < AB$, τη διχοτόμο της γωνίας του $\hat{A}$ η οποία τέμνει την πλευρά του $\Delta\Gamma$ σε σημείο E και τους ισχυρισμούς:

Ισχυρισμός 1: «Το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία A , Δ και E είναι ισοσκελές».

Ισχυρισμός 2: « Το τμήμα ΔE είναι ίσο με την πλευρά $B\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε κάθε έναν από τους παραπάνω ισχυρισμούς ως αληθή ή ψευδή, αιτιολογώντας την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

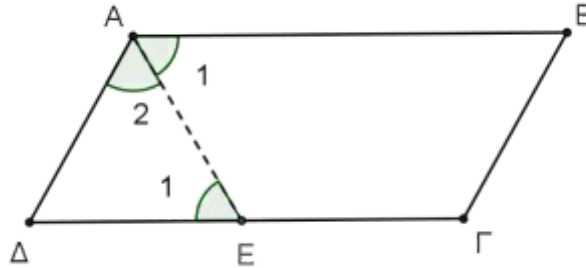
(Μονάδες 16)

β) Ποιο θα είναι το μέτρο των γωνιών του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ ώστε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία A , Δ και E να είναι ισόπλευρο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AD < AB$. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας του $\hat{A}$ και έστω Ε το σημείο στο οποίο αυτή τέμνει την πλευρά ΔΓ.



α) Η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (1).

Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ (2) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παράλληλων πλευρών ΑΒ και ΔΓ με τέμνουσα τη ΑΕ.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_2 = \hat{E}_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με $AD = DE$ (3).

Συνεπώς, ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής.

Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι απέναντι πλευρές του ΑΔ και ΒΓ είναι ίσες, δηλαδή $AD = BG$ (4).

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι $DE = BG$.

Συνεπώς, ο ισχυρισμός 2 είναι αληθής.

β) Αν το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο, τότε όλες οι γωνίες του θα είναι 60° , οπότε $\hat{A} = 60^\circ$.

Όμως $\hat{A} = \hat{B}$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου, οπότε $\hat{B} = 60^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{A}$ είναι παραπληρωματικές, ως γωνίες εντός και επί τα αυτά μέρη των παράλληλων πλευρών ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ, οπότε:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \text{ με } \hat{B} = 60^\circ \text{ ή } \hat{A} = 180^\circ - 60^\circ \text{ ή } \hat{A} = 120^\circ.$$

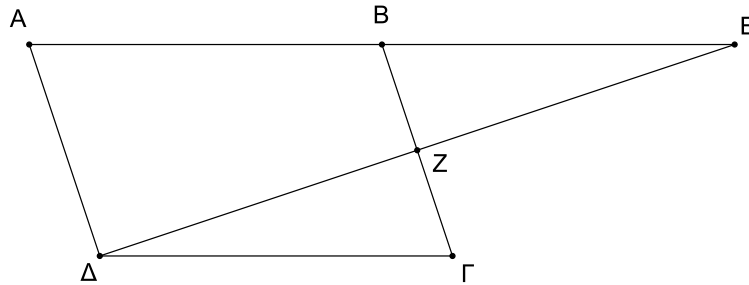
Όμως $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου, οπότε $\hat{\Gamma} = 120^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο E στην προέκταση της πλευράς AB προς το B , ώστε $AB = BE$. Έστω Z το σημείο τομής των $B\Gamma$, ΔE .

α) Να αποδείξετε ότι το Z είναι το μέσο του ΔE . (Μονάδες 13)

β) Αν $B\Gamma = 10$, να βρείτε το μήκος του BZ . (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Το Β είναι το μέσο της ΑΕ, αφού από τα δεδομένα έχουμε ότι $AB = BE$. Επιπλέον, η ΒΖ είναι παράλληλη στην ΑΔ, γιατί οι απέναντι πλευρές ΑΔ, ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι παράλληλες. Στο τρίγωνο ΑΔΕ η ΒΖ διέρχεται από το μέσο Β της ΑΕ, είναι παράλληλη στην ΑΔ και τέμνει τη ΔΕ στο σημείο Ζ, άρα το Ζ είναι το μέσο του ΔΕ.

β) Ισχύει $AD = BG$, γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα $AD = 10$.

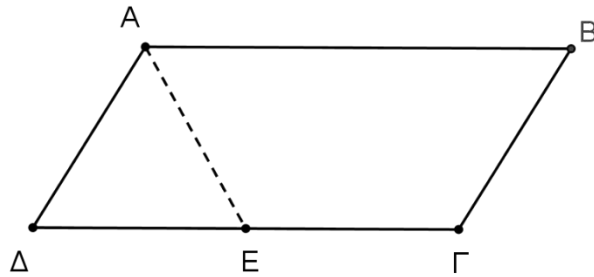
Εφόσον η ΒΖ ενώνει τα μέσα Β και Ζ των πλευρών ΑΕ και ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ, αντίστοιχα, το μήκος της ΒΖ είναι ίσο με το μισό του μήκους της πλευράς ΑΔ του τριγώνου ΑΔΕ. Άρα είναι $BZ = \frac{AD}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

ΘΕΜΑ 2

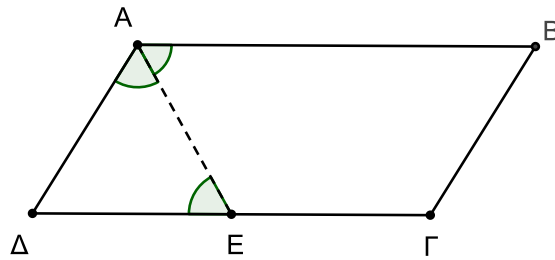
Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με $A\Delta < AB$. Η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{A}$ τέμνει την πλευρά $\Delta\Gamma$ σε σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{B\hat{A}E}$ και $\hat{A\hat{E}\Delta}$ είναι ίσες και στη συνέχεια να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 15)

β) Αν είναι $AB = 2A\Delta$, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = 2\Delta E$. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ



α) Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι απέναντι πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες, οπότε $\widehat{BAE} = \widehat{AED}$ (2) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παράλληλων πλευρών AB και $\Delta\Gamma$ με τέμνουσα τη AE .

Η AE είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$, οπότε $\widehat{DAE} = \widehat{BAE}$ (1).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\widehat{DAE} = \widehat{AED}$, οπότε το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές με $AD = DE$ (3).

β) Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι απέναντι πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$ είναι ίσες, δηλαδή $AB = \Delta\Gamma$.

Από υπόθεση είναι $AB = 2AD$ και αφού $AB = \Delta\Gamma$, τότε θα είναι $\Delta\Gamma = 2AD$ (4). Όμως $AD = DE$ λόγω της σχέσης (3) του α) ερωτήματος, άρα $\Delta\Gamma = 2DE$.

ΘΕΜΑ 4

Στην εικόνα που ακολουθεί παρουσιάζεται το σχέδιο μιας κατασκευής τριών μερών με συρτάρια. Τόσο η κατασκευή όσο και τα επιμέρους τμήματά της είναι σχήματος τραπεζίου. Συγκεκριμένα, το τετράπλευρο $ABEZ$ του σχεδίου της κατασκευής είναι τραπέζιο με βάσεις AB και ZE , το τετράπλευρο $AB\Gamma\Theta$ είναι τραπέζιο με βάσεις AB και $\Theta\Gamma$, το τετράπλευρο $\Theta\Gamma\Delta H$ είναι τραπέζιο με βάσεις $\Theta\Gamma$ και $H\Delta$ καθώς και το τετράπλευρο $H\Delta EZ$ είναι τραπέζιο με βάσεις $H\Delta$ και ZE . Επιπλέον, τα Θ , H και Γ , Δ είναι σημεία των μη παράλληλων πλευρών AZ , BE αντίστοιχα του τραpezίου $ABEZ$.

α) Να εξηγήσετε γιατί οι βάσεις AB , $\Theta\Gamma$, $H\Delta$ και ZE των επιμέρους τραπεζίων είναι παράλληλες.
(Μονάδες 9)

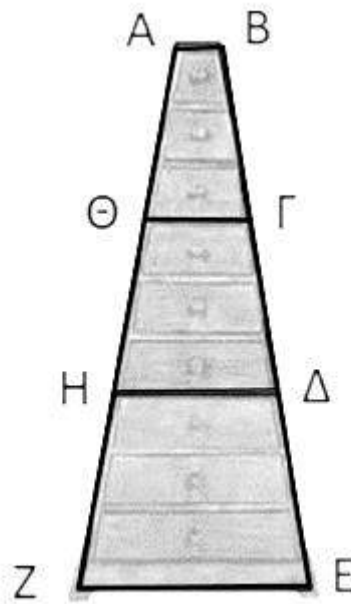
β) Έστω ότι τα σημεία Θ και Γ είναι τα μέσα των AH και $B\Delta$ αντίστοιχα, ενώ τα σημεία H και Δ είναι τα μέσα των ΘZ και ΓE αντίστοιχα. Αν είναι $AB = 13,5 \text{ cm}$ και $H\Delta = 50,5 \text{ cm}$, να βρείτε τα μήκη των τμημάτων:

i. $\Theta\Gamma$

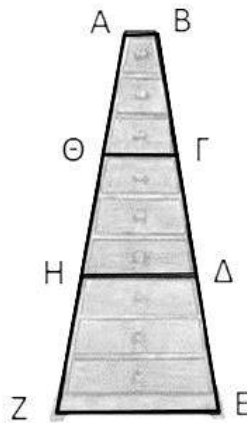
(Μονάδες 8)

ii. ZE

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ



α) Από τα δεδομένα έχουμε:

- Το ABEZ είναι τραπέζιο με βάσεις AB και ZE, οπότε AB και ZE είναι παράλληλες (AB // ZE) (1)
- Το ABΓΘ είναι τραπέζιο με βάσεις AB και ΘΓ, οπότε AB και ΘΓ είναι παράλληλες (AB // ΘΓ) (2)
- Το ΘΓΔΗ είναι τραπέζιο με βάσεις ΘΓ και ΗΔ, οπότε ΘΓ και ΗΔ είναι παράλληλες (ΘΓ // ΗΔ) (3)
- Το ΗΔΕΖ είναι τραπέζιο με βάσεις ΗΔ και ZE, οπότε ΗΔ και ZE είναι παράλληλες (ΗΔ // ZE) (4)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) προκύπτει ότι ανά δύο διαφορετικές βάσεις είναι παράλληλες προς μία τρίτη, συνεπώς όλες οι βάσεις θα είναι παράλληλες, δηλαδή AB // ΘΓ // ΗΔ // ZE (5).

β)

i. Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι AB // ΗΔ και επειδή ΑΗ, ΒΔ δεν είναι παράλληλες, γιατί τα σημεία Α, Η και Β, Δ είναι σημεία των μη παράλληλων πλευρών ΑΖ και ΒΕ του τραapeζίου ABEZ αντίστοιχα (από δεδομένα), οπότε το τετράπλευρο ΑΒΔΗ είναι τραπέζιο και η ΘΓ είναι η διάμεσός του, αφού τα σημεία Θ και Γ είναι τα μέσα των ΑΗ και ΒΔ αντίστοιχα από τα δεδομένα. Άρα $\Theta\Gamma = \frac{AB+H\Delta}{2}$ ή $\Theta\Gamma = \frac{13,5+50,5}{2}$ ή $\Theta\Gamma = 32$ cm.

ii. Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι ΘΓ // ZE και επειδή ΘΖ, ΓΕ δεν είναι παράλληλες, γιατί τα σημεία Θ, Ζ και Β, Δ είναι σημεία των μη παράλληλων πλευρών ΑΖ και ΒΕ του τραapeζίου ABEZ αντίστοιχα (από δεδομένα), οπότε το τετράπλευρο ΘΓΕΖ είναι τραπέζιο και

η ΗΔ είναι η διάμεσός του, αφού τα σημεία Η και Δ είναι τα μέσα των ΘΖ και ΓΕ αντίστοιχα

από τα δεδομένα. Άρα $ΗΔ = \frac{ΘΓ+ΖΕ}{2}$ ή $50,5 = \frac{32+ΖΕ}{2}$ ή $32 + ΖΕ = 101$ ή $ΖΕ = 69$ cm.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα r και η διάμετρος $B\Gamma$. Θεωρούμε σημείο A του κύκλου τέτοιο ώστε το τόξο $\widehat{AB} = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$.

(Μονάδες 08)

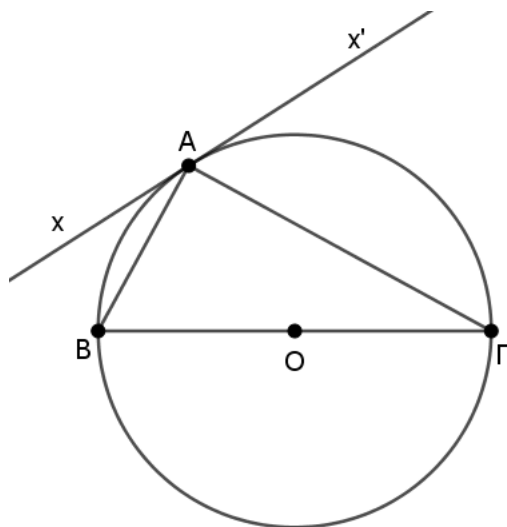
ii. Η γωνία $\widehat{B\hat{\Gamma}A} = 30^\circ$.

(Μονάδες 08)

β) Φέρνουμε την εφαπτομένη xx' του κύκλου στο A .

Να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{x\hat{A}B}$.

(Μονάδες 09)



ΛΥΣΗ

α)

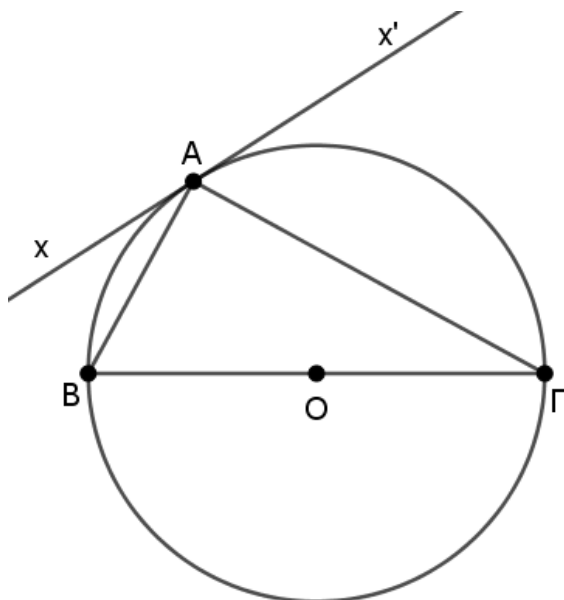
i. Η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΒΓ, άρα έχουμε $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$.

ii. Η γωνία $\widehat{B\hat{\Gamma}A}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\widehat{AB} = 60^\circ$, οπότε θα είναι

$$\widehat{B\hat{\Gamma}A} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

β) Η γωνία $\widehat{\chi\hat{A}B}$ σχηματίζεται από την εφαπτομένη $x\chi'$ και την χορδή ΑΒ, επομένως θα είναι

$$\widehat{\chi\hat{A}B} = \widehat{A\hat{\Gamma}B} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος με $AD \parallel B\Gamma$ και $B\Gamma > \Delta\Gamma$.

Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $GE = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι γωνίες $\hat{A}\hat{\Delta}E$ και $\hat{\Gamma}\hat{E}\Delta$ είναι ίσες.

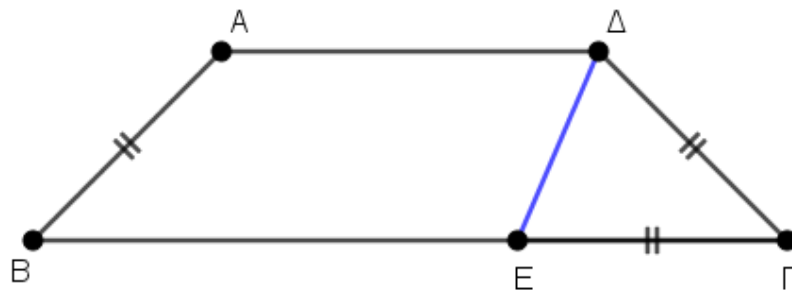
(Μονάδες 09)

ii. η ΔE είναι διχοτόμος της $A\hat{\Delta}\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Πόσες μοίρες πρέπει να είναι η γωνία $\hat{A}$ ώστε το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ να είναι ισόπλευρο;

(Μονάδες 06)



ΛΥΣΗ

α)

i. $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ (1), γιατί είναι γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΔΕ.

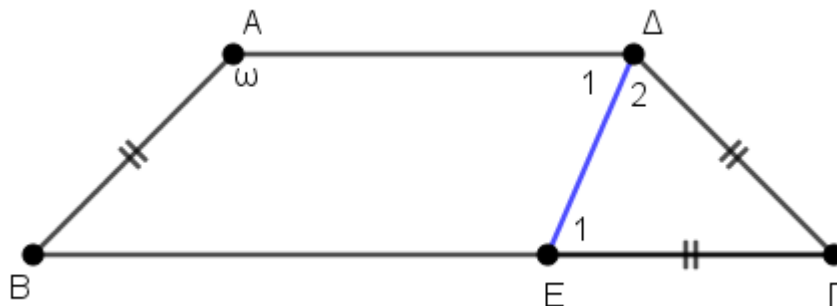
ii. $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ (2), γιατί είναι γωνίες προσκείμενες στη βάση ΔΕ του ισοσκελούς τριγώνου ΔΓΕ.

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, άρα η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$.

β) Για να είναι το τρίγωνο ΔΕΓ ισόπλευρο, πρέπει οι γωνίες του να είναι 60° , οπότε και η γωνία $\hat{\Delta}_2 = 60^\circ$.

Αποδείξαμε στο α)ii) ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$, οπότε θα είναι $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 120^\circ$.

Επειδή το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές, θα είναι $\hat{A} = 120^\circ$.

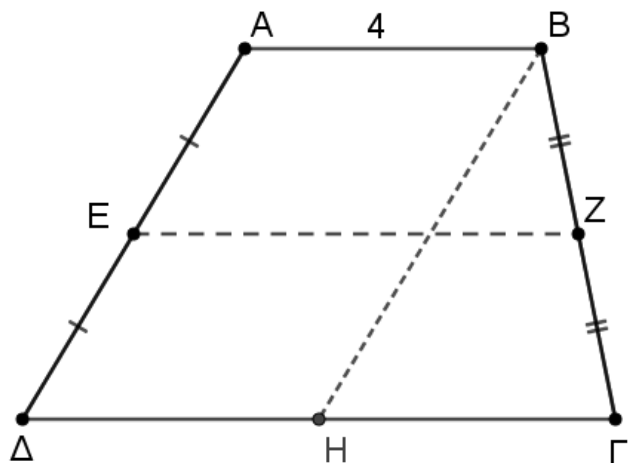


ΘΕΜΑ 2

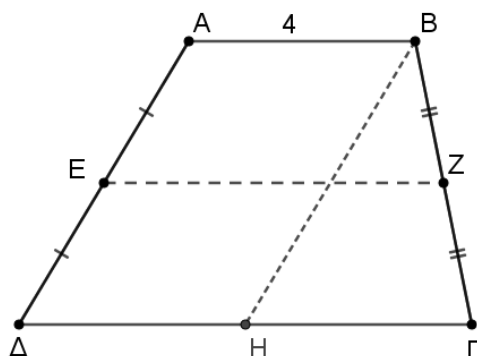
Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), έχουμε $AB = 4$ και $\Delta\Gamma = 8$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου του EZ . (Μονάδες 12)

β) Από το B φέρουμε BH παράλληλη στην $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\Gamma H = AB$. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) Η διάμεσος του τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεών του, επομένως

$$EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{4 + 8}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

β) Φέρουμε $BH \parallel AD$.

$AB \parallel \Delta H$ σαν βάσεις τραπεζίου και $BH \parallel AD$ από υπόθεση, οπότε το $ABH\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Επομένως οι απέναντι πλευρές του θα είναι ίσες, δηλαδή $\Delta H = AB = 4$.

$$\Gamma H = \Delta\Gamma - \Delta H = 8 - 4 = 4 = AB.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 8\sqrt{3}$, το ύψος του $B\Delta$ και το μέσο M της $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta M = 4\sqrt{3}$.

(Μονάδες 07)

β) Αν $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $AB = 8$:

i. Να υπολογίσετε την $M\hat{\Delta}\Gamma$.

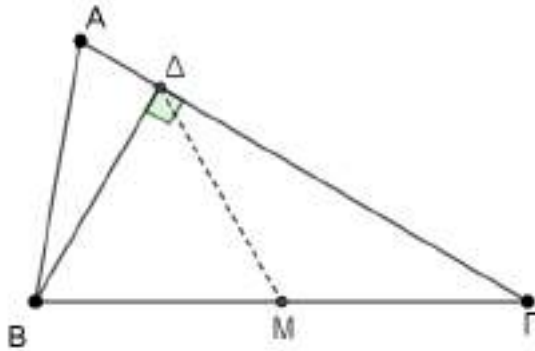
(Μονάδες 06)

ii. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{B\Delta}{B\Gamma}$.

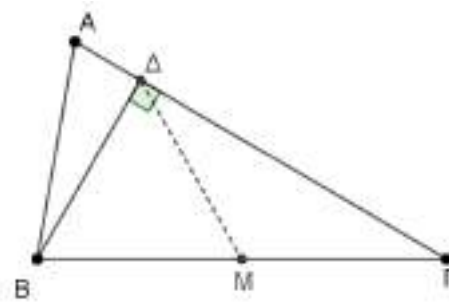
(Μονάδες 06)

iii. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $A\Delta$.

(Μονάδες 06)



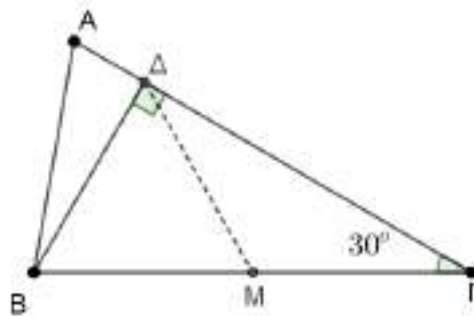
ΛΥΣΗ



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$, η ΔM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε ισούται

με το μισό της, δηλαδή $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

β) Έστω $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $AB = 8$.



i. Στο α) ερώτημα αποδείξαμε ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$. Επομένως το τρίγωνο $M\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές

με $\Delta M = M\Gamma$. Άρα, και οι απέναντι γωνίες από τις πλευρές αυτές θα είναι αντίστοιχα ίσες, δηλαδή: $\hat{\Gamma} = \hat{M\Delta\Gamma} = 30^\circ$.

ii. Το ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ έχει τη γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, επομένως η απέναντι κάθετη πλευρά από την γωνία αυτή θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή:

$$B\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{1}{2}$$

iii. Από το ερώτημα β) ii) η $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$: $AB^2 = B\Delta^2 + A\Delta^2$ ή $A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2$

ή $A\Delta^2 = 8^2 - (4\sqrt{3})^2 = 64 - 16 \cdot 3 = 64 - 48 = 16$, επομένως $A\Delta = 4$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $A\Gamma = 12$ και $AB = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 13$.

(Μονάδες 08)

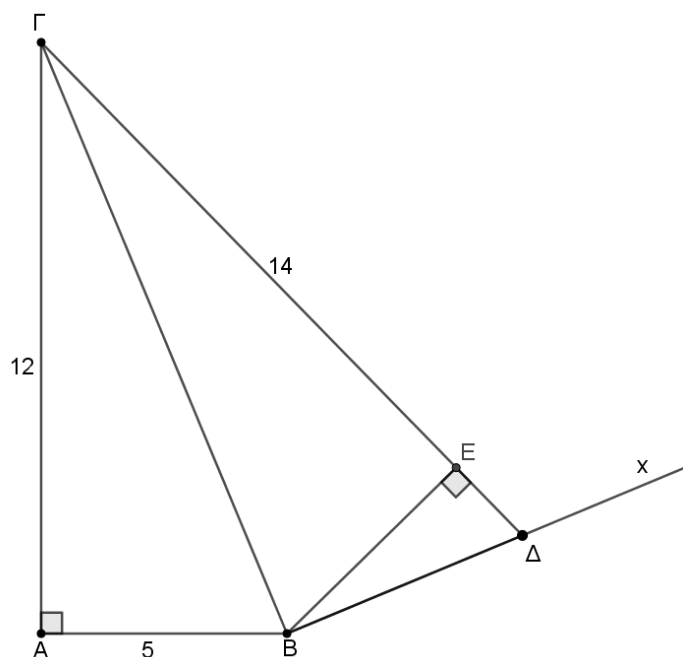
β) Φέρουμε ημιευθεία Bx κάθετη στην $B\Gamma$ στο σημείο B και παίρνουμε στην Bx σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = 14$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = 3\sqrt{3}$.

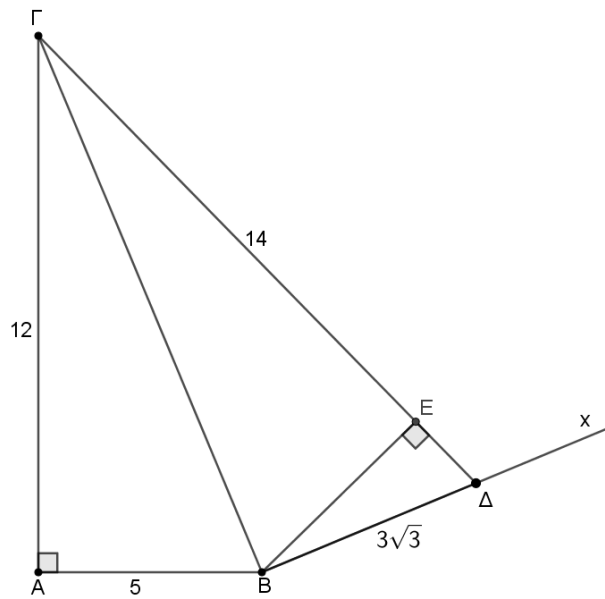
(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίστε την προβολή της $B\Delta$ στην $\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 09)



ΛΥΣΗ



α) Πυθαγόρειο θεώρημα στο $AB\Gamma$: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ ή $B\Gamma^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$,
 άρα $B\Gamma = \sqrt{169} = 13$

β) Πυθαγόρειο θεώρημα στο $B\Delta\Gamma$: $\Delta\Gamma^2 = B\Gamma^2 + B\Delta^2$ ή

$$B\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 - B\Gamma^2 = 14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27. \text{ Άρα } B\Delta = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}.$$

γ) Φέρνουμε BE κάθετη στην $\Gamma\Delta$, οπότε η προβολή του $B\Delta$ στην $\Delta\Gamma$ είναι η ΔE .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ ισχύει ότι $B\Delta^2 = \Delta E \cdot \Delta\Gamma$ ή $(3\sqrt{3})^2 = \Delta E \cdot 14$ ή $27 = 14\Delta E$

$$\text{ή } \Delta E = \frac{27}{14}.$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = 25^\circ$ και $AD = 8$. Να υπολογίσετε:

α) Το μέτρο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

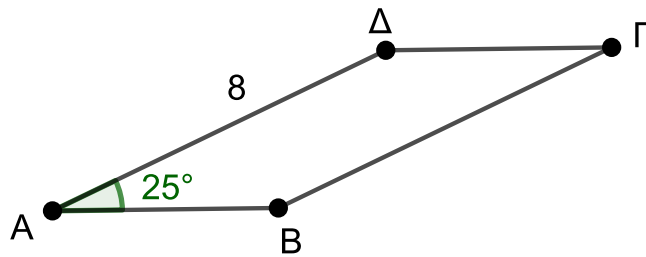
(Μονάδες 10)

β) Το μήκος της πλευράς ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 07)

γ) Τα μέτρα των υπόλοιπων γωνιών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 08)



ΛΥΣΗ

α) Οι απέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου ανά δύο είναι ίσες.

Εφόσον στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ η $\hat{\Gamma}$ είναι απέναντι της $\hat{A}$ προκύπτει ότι $\hat{\Gamma} = \hat{A} = 25^\circ$.

β) Οι απέναντι πλευρές κάθε παραλληλογράμμου ανά δύο είναι ίσες.

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι πλευρές ΒΓ και ΑΔ είναι απέναντι, οπότε προκύπτει ότι

$$ΒΓ = ΑΔ = 8.$$

γ) Το άθροισμα των γωνιών κάθε παραλληλογράμμου είναι 360° .

Άρα:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{D} = 360^\circ \text{ ή}$$

$$25^\circ + \hat{B} + 25^\circ + \hat{D} = 360^\circ \text{ ή}$$

$$\hat{B} + \hat{D} = 360^\circ - 50^\circ \text{ ή}$$

$$\hat{B} + \hat{D} = 310^\circ$$

Όμως οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{D}$ είναι ίσες, γιατί είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Επομένως $\hat{B} = 310^\circ : 2 = 155^\circ$ και $\hat{D} = 155^\circ$.

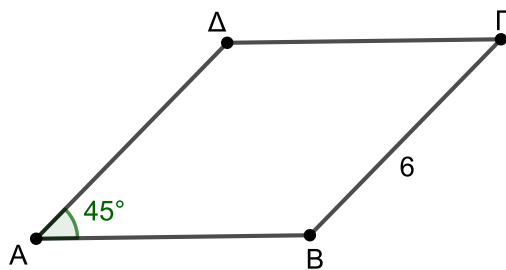
ΘΕΜΑ 2

Στον ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 45^\circ$ και $B\Gamma = 6$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του ρόμβου. (Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των υπόλοιπων πλευρών του ρόμβου. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ είναι ίσο με τρεις ορθές. (Μονάδες 07)



ΛΥΣΗ

α) Οι απέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου, άρα και κάθε ρόμβου ανά δύο είναι ίσες.

Εφόσον η $\hat{\Gamma}$ είναι απέναντι της $\hat{A}$ προκύπτει ότι $\hat{\Gamma} = \hat{A} = 45^\circ$.

β) Όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.

Εφόσον $B\Gamma = 6$ είναι $AB = \Gamma\Delta = A\Delta = B\Gamma = 6$.

γ) Το άθροισμα των γωνιών του ρόμβου είναι 360° .

Άρα:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \text{ ή}$$

$$45^\circ + \hat{B} + 45^\circ + \hat{\Delta} = 360^\circ \text{ ή}$$

$$\hat{B} + \hat{\Delta} = 360^\circ - 90^\circ \text{ ή}$$

$$\hat{B} + \hat{\Delta} = 270^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{\Delta} = 3 \cdot 90^\circ$$

Επομένως το άθροισμα των $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ είναι ίσο με τρεις ορθές.

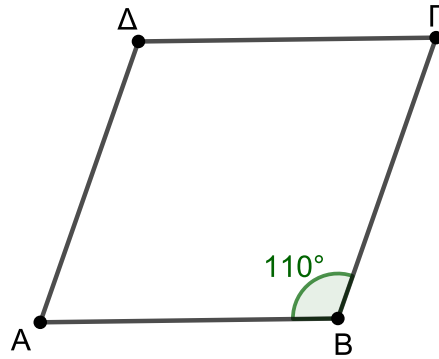
ΘΕΜΑ 2

Στον ρόμβο ΑΒΓΔ είναι $\widehat{B} = 110^\circ$

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{A}$ του ρόμβου. (Μονάδες 09)

β) Να σχεδιάσετε τη διαγώνιο του ρόμβου από την κορυφή Δ. (Μονάδες 06)

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\hat{B}D}$. (Μονάδες 10)

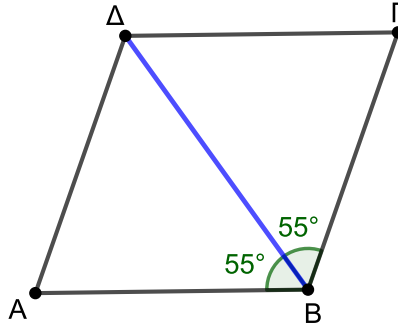


ΛΥΣΗ

α) Οι απέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου, άρα και του ρόμβου ανά δύο είναι ίσες.

Εφόσον στον ρόμβο ΑΒΓΔ η $\hat{A}$ είναι απέναντι της $\hat{C}$ προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{C} = 110^\circ$.

β) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ, το οποίο είναι η διαγώνιος του ρόμβου ΑΒΓΔ από την κορυφή Δ.



γ) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του. Επομένως η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ του ρόμβου. Άρα $\angle ABD = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

Ο ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ έχει περίμετρο 48.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ρόμβου.

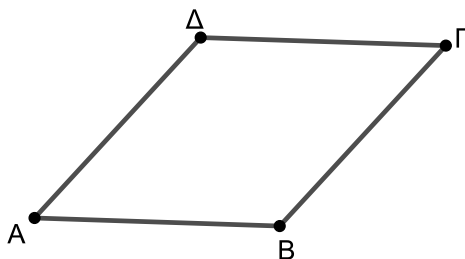
(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τις διαγωνίους του ρόμβου.

(Μονάδες 06)

γ) Αν K είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου και το ευθύγραμμο τμήμα BK έχει μήκος 5, να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου $B\Delta$ του ρόμβου.

(Μονάδες 09)

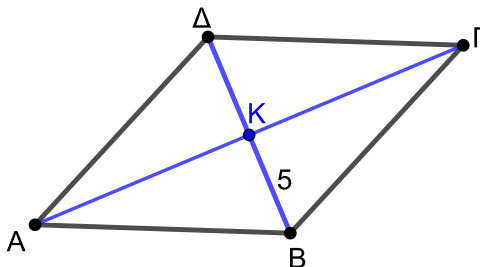


ΛΥΣΗ

α) Όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες. Άρα το μήκος κάθε μιας πλευράς του ρόμβου ΑΒΓΔ είναι $48:4 = 12$.

Επομένως $AB = BΓ = ΓΔ = ΔΑ = 12$.

β) Σχεδιάζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ που είναι οι διαγώνιοι του ρόμβου.



γ) Οι διαγώνιοι κάθε ρόμβου διχοτομούνται. Άρα το σημείο Κ είναι το μέσο και των δύο διαγωνίων, επομένως και της ΒΔ.

Άρα $ΒΔ = 2 \cdot ΒΚ = 2 \cdot 5 = 10$.

ΘΕΜΑ 2

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $AB = 3$. Το M είναι μέσο της υποτείνουσας του $AB\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 6$.

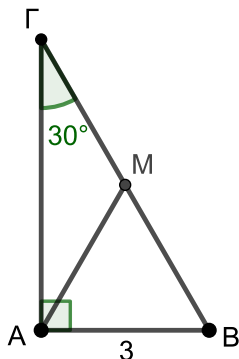
(Μονάδες 08)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AM .

(Μονάδες 09)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της κάθετης πλευράς $A\Gamma$ του $AB\Gamma$.

(Μονάδες 08)



ΛΥΣΗ

α) Η ΒΓ είναι η υποτείνουσα του τριγώνου ΑΒΓ.

Εφόσον $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{\Gamma}$ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας του ΑΒΓ. Άρα $AB = \frac{BG}{2}$ ή $BG = 2 \cdot AB$ ή $BG = 2 \cdot 3 = 6$.

β) Το ΑΜ ενώνει την κορυφή Α της ορθής γωνίας του ΑΒΓ με το μέσο Μ της υποτείνουσας. Άρα η ΑΜ είναι η διάμεσος του ορθογώνιου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Επομένως η ΑΜ ισούται με το μισό της ΒΓ. Άρα $AM = 3$.

γ) Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$BG^2 = AB^2 + AG^2 \text{ ή } AG^2 = BG^2 - AB^2 \text{ ή } AG^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27.$$

Επομένως $AG = \sqrt{27}$.

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{B} = 100^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 110^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο τετράπλευρο.

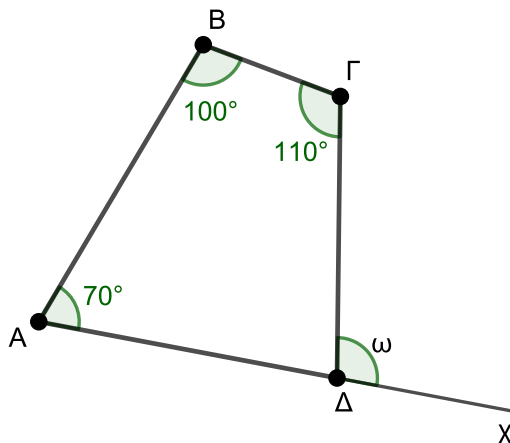
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο ω της εξωτερικής γωνίας $\Gamma\hat{\Delta}\chi$ του $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 05)



ΛΥΣΗ

α) Για τις απέναντι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{F}$ του ΑΒΓΔ προκύπτει ότι $\hat{A} + \hat{F} = 110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$, άρα είναι παραπληρωματικές. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο, γιατί δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

β) Εφόσον το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, επομένως $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

γ) Η εξωτερική γωνία $\Gamma\hat{D}\chi$ του ΑΒΓΔ είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία $\hat{B}$ του ΑΒΓΔ. Δηλαδή $\Gamma\hat{D}\chi = \hat{B} = 100^\circ$, άρα $\hat{\omega} = 100^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{B} = 100^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 110^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο τετράπλευρο.

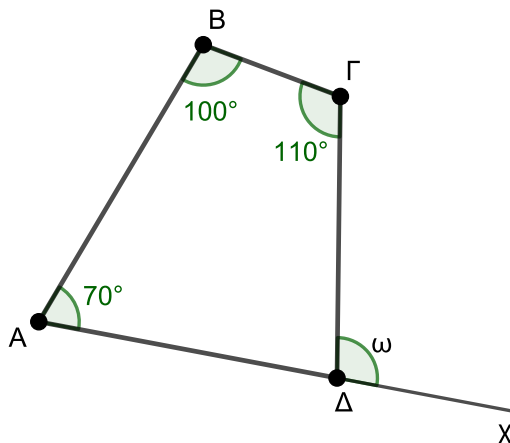
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο ω της εξωτερικής γωνίας $\Gamma\hat{\Delta}\chi$ του $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 05)



ΛΥΣΗ

α) Για τις απέναντι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{F}$ του ΑΒΓΔ προκύπτει ότι $\hat{A} + \hat{F} = 110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$, άρα είναι παραπληρωματικές. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο, γιατί δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

β) Εφόσον το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, επομένως $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

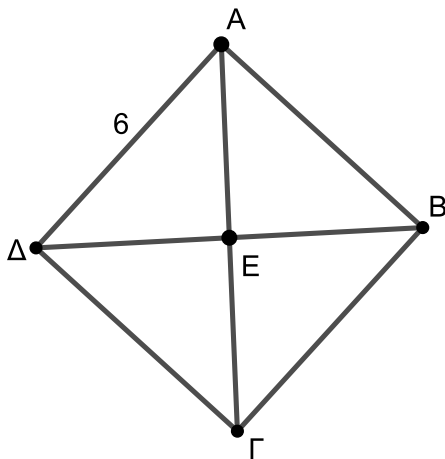
γ) Η εξωτερική γωνία $\Gamma\hat{D}\chi$ του ΑΒΓΔ είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία $\hat{B}$ του ΑΒΓΔ. Δηλαδή $\Gamma\hat{D}\chi = \hat{B} = 100^\circ$, άρα $\hat{\omega} = 100^\circ$.

ΘΕΜΑ 4

Το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο με περίμετρο 24 και $A\Delta = 6$.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ και να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $A\Gamma = 6\sqrt{2}$ να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Σε κάθε παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές τους ανά δύο είναι ίσες.

Επομένως στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $ΑΔ = ΒΓ$ και $ΑΒ = ΓΔ$.

Άρα $ΒΓ = ΑΔ = 6$.

Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι 24, άρα $ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΑΔ = 24$ ή $12 + ΑΒ + ΓΔ = 24$ ή $ΑΒ + ΓΔ = 12$.

Όμως $ΑΒ = ΓΔ$, άρα $ΑΒ = ΓΔ = 12:2 = 6$.

Το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, γιατί $ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΑΔ = 6$, δηλαδή έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

β) Στο τρίγωνο ΑΓΔ είναι $ΑΓ^2 = (6\sqrt{2})^2 = 6^2 \cdot \sqrt{2}^2 = 36 \cdot 2 = 72$.

Επίσης $ΑΔ^2 + ΓΔ^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$.

Άρα $ΑΔ^2 + ΓΔ^2 = ΑΓ^2$.

Σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος το ΑΓΔ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{Δ}$ ορθή. Άρα ο ρόμβος ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, εφόσον η γωνία του $\hat{Δ}$ είναι ορθή.

ΘΕΜΑ 4

Η πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι παράλληλη στην πλευρά DE του τριγώνου ADE .
Επίσης δίνονται $AB = 3$, $B\Gamma = 5,6$ και $A\Gamma = 4$.

α) Αν $AD = 6$ να υπολογίσετε:

i. το μήκος της πλευράς AE του τριγώνου ADE .

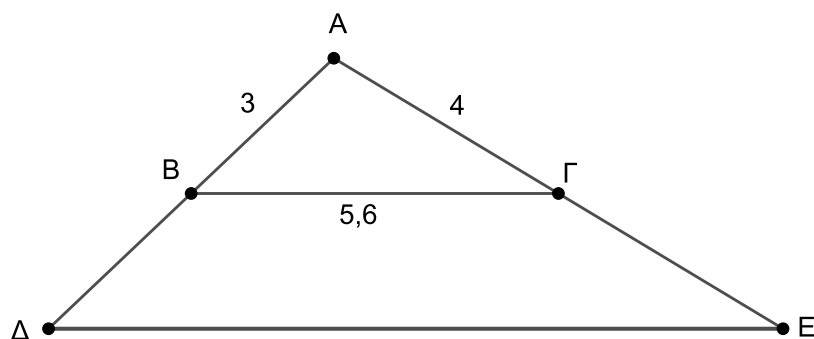
(Μονάδες 09)

ii. το μήκος της πλευράς DE του τριγώνου ADE .

(Μονάδες 08)

β) Αν $AD = 9$ να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς DE του τριγώνου ADE .

(Μονάδες 08)



ΛΥΣΗ

α) i. Εφόσον $AB = 3$ και $AD = 6$, το σημείο Β είναι το μέσο της πλευράς ΑΔ του ΑΔΕ.

Η ΒΓ είναι παράλληλη στη ΔΕ, άρα το σημείο Γ είναι το μέσο της πλευράς ΑΕ του τριγώνου ΑΔΕ. Επομένως $AE = 2 \cdot AG = 2 \cdot 4 = 8$.

ii. Εφόσον το τμήμα ΒΓ ενώνει τα Β και Γ, μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΕ του τριγώνου ΑΔΕ, το $B\Gamma = \frac{\Delta E}{2}$ ή $\Delta E = 2 \cdot B\Gamma$ ή $\Delta E = 2 \cdot 5,6 = 11,2$.

β) Από εφαρμογή του Θεωρήματος του Θαλή, το ΑΔΕ τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την παράλληλη ΔΕ στην πλευρά ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ οπότε θα είναι:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} \text{ άρα } \frac{AD}{AB} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} \text{ επομένως:}$$

$$\frac{9}{3} = \frac{\Delta E}{5,6}$$

$$\text{Τελικά } \Delta E = 3 \cdot 5,6 = 16,8.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος με $A\Delta = 2$ και $\hat{A} = 60^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν ΔE είναι ύψος του παραλληλογράμμου, τότε:

i. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A\Delta E}$.

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι $AE = 1$.

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ



α) Γνωρίζουμε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.
Επομένως:

$$\hat{A} = \hat{\Gamma} = 60^\circ \text{ και } \hat{B} = \hat{A\hat{D}\Gamma}$$

Επίσης, σε κάθε παραλληλόγραμμο δύο διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές,
οπότε:

$$\hat{A} + \hat{A\hat{D}\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 60^\circ + \hat{A\hat{D}\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } \hat{A\hat{D}\Gamma} = 120^\circ$$

Άρα και $\hat{B} = 120^\circ$.

β)

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο AED είναι:

$$\hat{A} + \hat{A\hat{D}E} = 90^\circ \text{ ή } 60^\circ + \hat{A\hat{D}E} = 90^\circ \text{ ή } \hat{A\hat{D}E} = 30^\circ$$

ii. Αφού είναι $\hat{A\hat{D}E} = 30^\circ$, τότε η απέναντι κάθετη πλευρά AE ισούται με το μισό της υποτείνουσας AD, δηλαδή:

$$AE = \frac{AD}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $R = 1$. Θεωρούμε το εφαπτόμενο τμήμα BA ώστε $\widehat{OBA} = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η γωνία $\widehat{OAB}$ είναι ορθή.

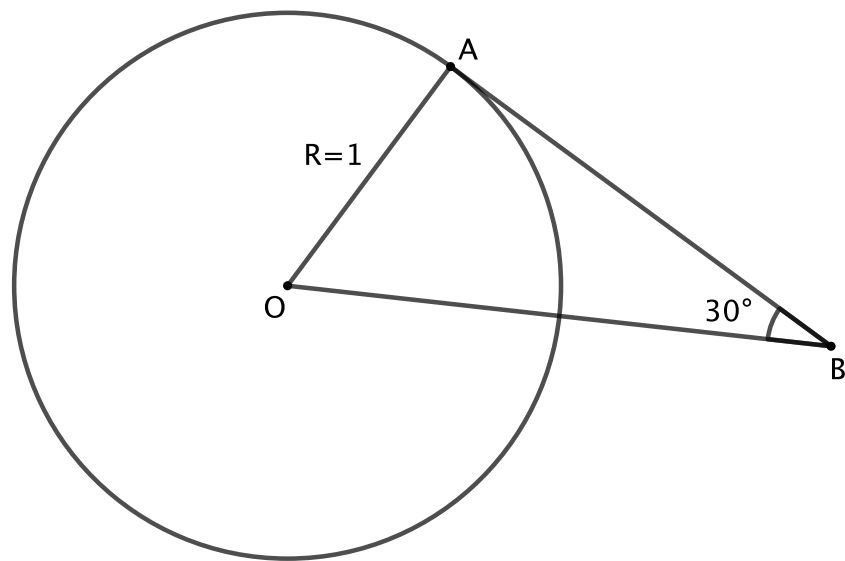
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $OB = 2$.

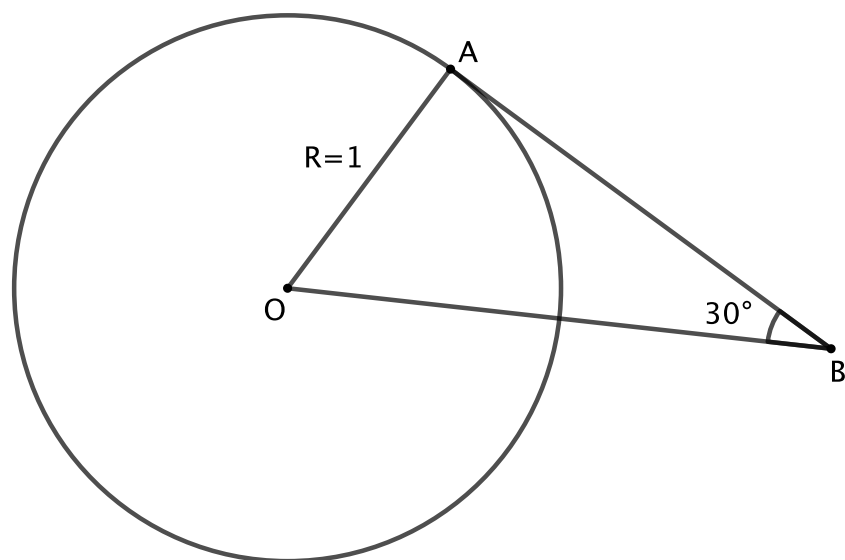
(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος BA .

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ



α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε $BA \perp OA$. Άρα, η γωνία $\widehat{OAB}$ είναι ορθή.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB είναι $\widehat{OBA} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά OA ισούται με το μισό της υποτείνουσας OB . Έτσι έχουμε

$$OA = \frac{OB}{2}$$

Οπότε:

$$OB = 2OA = 2 \cdot 1 = 2$$

γ) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB έχουμε:

$$BA^2 = OB^2 - OA^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

Άρα, $BA = \sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 2

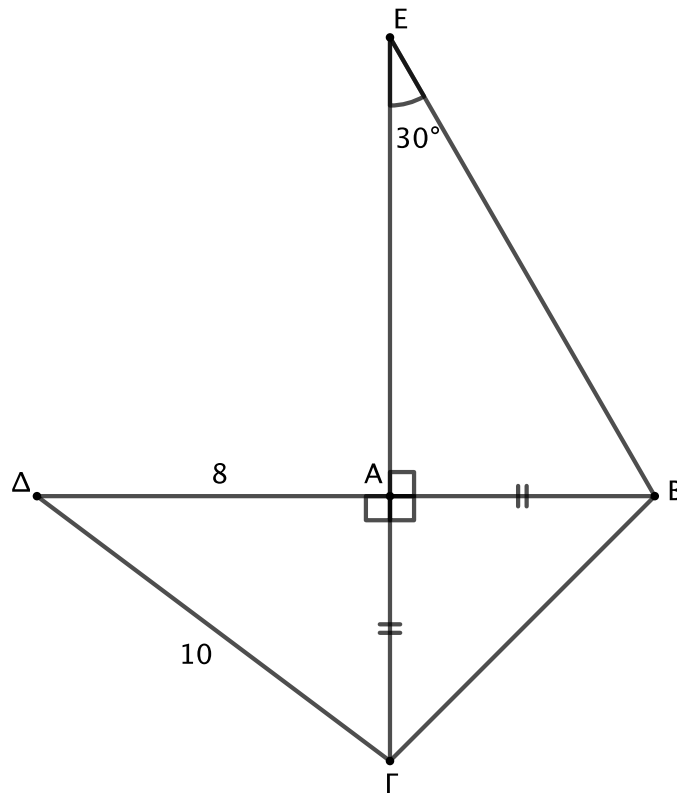
Στο σχήμα παρακάτω είναι $AB = AG$, $AD = 8$, $ΔΓ = 10$ και $ΑΕΒ = 30^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AG = 6$.

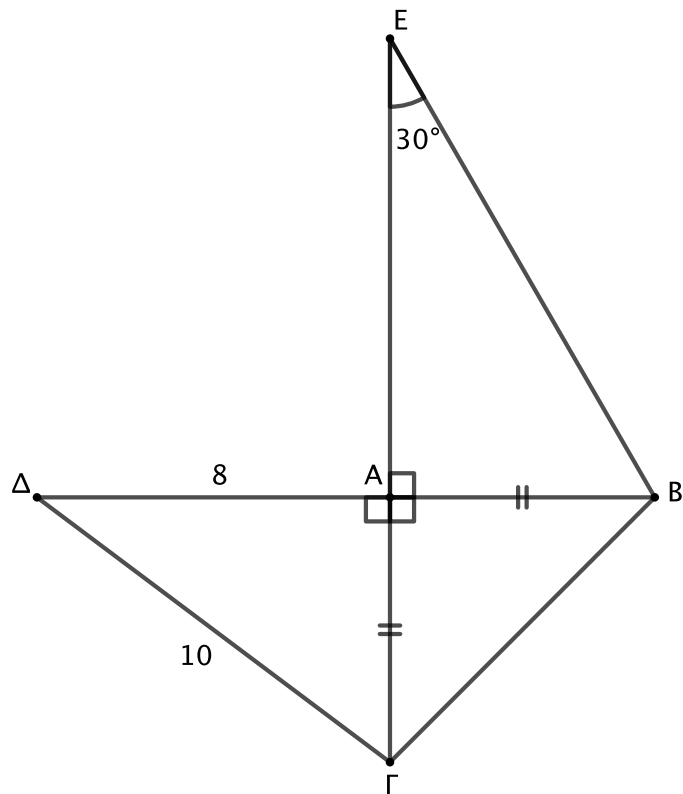
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα BE του ορθογωνίου τριγώνου ABE .

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle ADE$ έχουμε:

$$AG^2 = DE^2 - AD^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$$

Άρα, $AG = \sqrt{36} = 6$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle ABE$ είναι $\hat{AEB} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά AB ισούται με το μισό της υποτείνουσας BE . Έτσι έχουμε:

$$AB = \frac{BE}{2}$$

Όμως, $AB = AG = 6$, οπότε:

$$BE = 2AB = 2 \cdot 6 = 12$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω O το κέντρο ρόμβου $ABΓΔ$ με μήκη διαγωνίων $ΔΒ = 6$ και $ΑΓ = 8$.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά του ρόμβου.

(Μονάδες 9)

β) Θεωρούμε σημεία E και Z εσωτερικά των τμημάτων OA και OG αντίστοιχα, τέτοια ώστε $EO = OZ$.

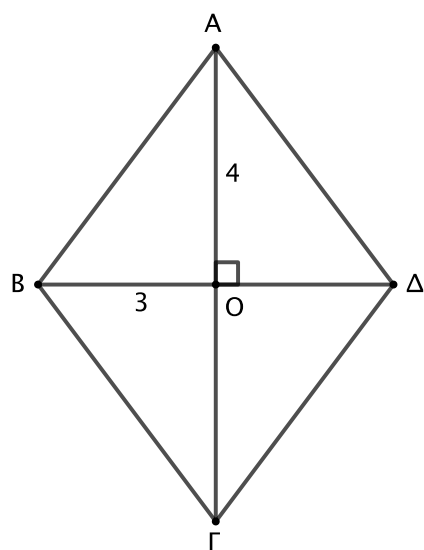
i. Πόσο πρέπει να είναι το μήκος καθενός από τα τμήματα EO και OZ ώστε το τετράπλευρο $EBZΔ$ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ii. Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου $EBZΔ$ του προηγούμενου ερωτήματος.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ



α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB. Έχουμε διαδοχικά:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

$$AB^2 = 4^2 + 3^2$$

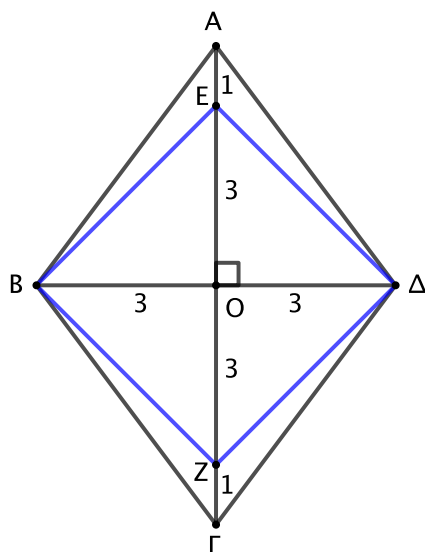
$$AB^2 = 25$$

$$AB = 5$$

Επομένως, η πλευρά του ρόμβου είναι ίση με 5.

β)

- ι. Για τα σημεία E και Z ισχύει $EO = OZ$, οπότε οι διαγώνιοι BΔ και EZ του τετράπλευρου EBZΔ διχοτομούνται στο O και τέμνονται κάθετα. Συνεπώς, το EBZΔ είναι τετράγωνο αν και μόνο αν $EZ = BΔ = 6$, δηλαδή $EO = OZ = 3$.



- ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΒ. Έχουμε διαδοχικά:

$$EB^2 = OE^2 + OB^2$$

$$EB^2 = 3^2 + 3^2$$

$$EB^2 = 18$$

$$EB = \sqrt{18}$$

$$EB = 3\sqrt{2}$$

Επομένως, η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με $3\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 2

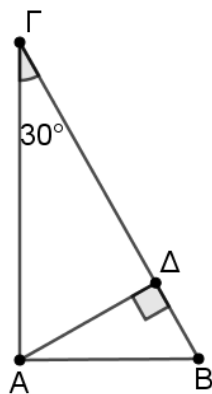
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 8$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AB = 4$.

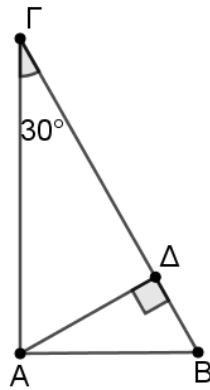
(Μονάδες 12)

β) Φέρουμε το ύψος $A\Delta$. Να υπολογίσετε το τμήμα $B\Delta$.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΒ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή:

$$AB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το τετράγωνο της κάθετης πλευράς ΑΒ ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας ΒΓ επί την προβολή της κάθετης πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα, δηλαδή την ΒΔ. Οπότε:

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \quad \text{ή} \quad 4^2 = 8 \cdot B\Delta \quad \text{ή} \quad 16 = 8 \cdot B\Delta \quad \text{ή} \quad B\Delta = 2$$

ΘΕΜΑ 2

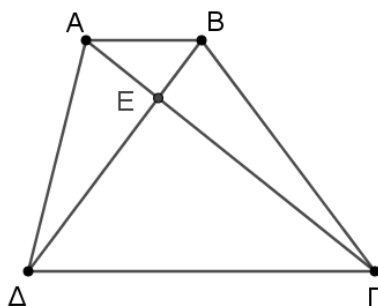
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = 3AB$. Οι διαγώνιές του $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEB και $\Delta E\Gamma$ είναι όμοια.

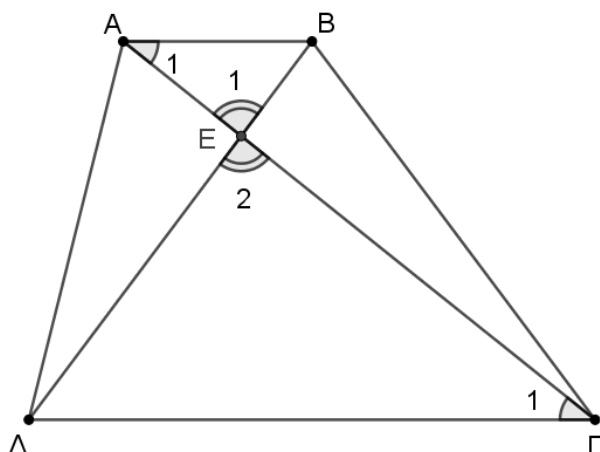
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{E\Gamma}{EA}$.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ έχουν:

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ.

$\hat{E}_1 = \hat{E}_2$, ως κατακορυφήν γωνίες.

Επομένως είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

β) Λόγω της ομοιότητας των τριγώνων οι ομόλογες πλευρές τους θα είναι ανάλογες.

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{E}_1 = \hat{E}_2$	$\hat{ABE} = \hat{GDE}$	$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΕ	ΑΒ	ΕΑ	ΒΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΓΔΕ	ΓΔ	ΕΓ	ΔΕ

Επομένως, έχουμε:

$$\frac{ΕΓ}{ΕΑ} = \frac{ΓΔ}{ΑΒ} = \frac{3ΑΒ}{ΑΒ} = 3$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$. Τα σημεία E , Z και H είναι τα μέσα των $B\Delta$, $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να δικαιολογήστε γιατί:

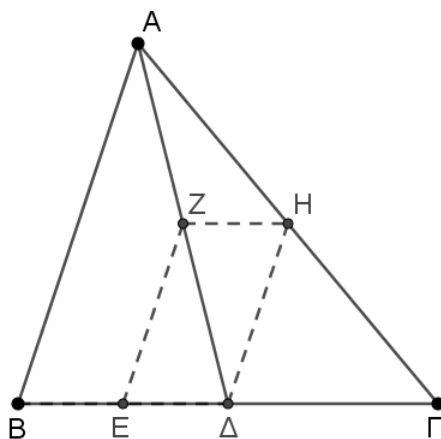
i. $\Delta H = // \frac{AB}{2}$. (Μονάδες 07)

ii. $ZE = // \frac{AB}{2}$. (Μονάδες 07)

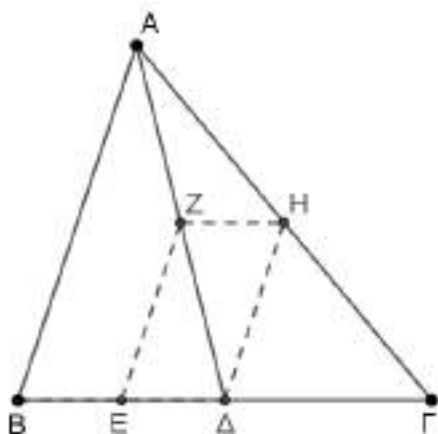
β) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ZH\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 04)

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των AB και $B\Gamma$, ώστε το $ZH\Delta E$ να είναι ρόμβος;

(Μονάδες 07)



ΛΥΣΗ



α)

- i. Στο τρίγωνο ABΓ, το Δ είναι μέσο της BΓ και το Η είναι μέσο της AΓ, οπότε το τμήμα ΔΗ θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΑΒ και ίσο με το μισό της, δηλαδή:

$$\Delta\text{H} = // \frac{AB}{2} \quad (1)$$

- ii. Στο τρίγωνο ABΔ, το Z είναι μέσο της ΑΔ και το Ε είναι μέσο της ΒΔ, οπότε το τμήμα ΖΕ θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΑΒ και ίσο με το μισό της, δηλαδή:

$$\text{Z}\text{E} = // \frac{AB}{2} \quad (2)$$

β) Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $\Delta\text{H} = // \text{Z}\text{E}$, επομένως το τετράπλευρο ΖΗΔΕ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

γ) Για να είναι το παραλληλόγραμμο ΖΗΔΕ ρόμβος, αρκεί δύο διαδοχικές του πλευρές να είναι ίσες, έστω $\text{Z}\text{H} = \text{Z}\text{E}$.

Στο τρίγωνο ΑΔΓ, το Z είναι μέσο της ΑΔ και το Η μέσο της ΑΓ, οπότε το τμήμα ΖΗ θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΔΓ και ίσο με το μισό της, δηλαδή: $\text{Z}\text{H} = // \frac{\Delta\Gamma}{2}$.

Αντικαθιστώντας στην ισότητα $\text{Z}\text{H} = \text{Z}\text{E}$ αυτό που βρήκαμε στο α)ii) ερώτημα έχουμε:

$$\frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} \quad \text{ή} \quad \Delta\Gamma = AB. \quad \text{Όμως, } \Delta\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \text{ και επομένως } \frac{B\Gamma}{2} = AB, \text{ δηλαδή } B\Gamma = 2AB.$$

ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το Δ είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και το E είναι το μέσο της πλευράς $A\Gamma$. Δίνονται τα μήκη $A\Delta = 12$ και $\theta E = 3$.

α) Να αποδείξετε ότι $\theta\Delta = 4$.

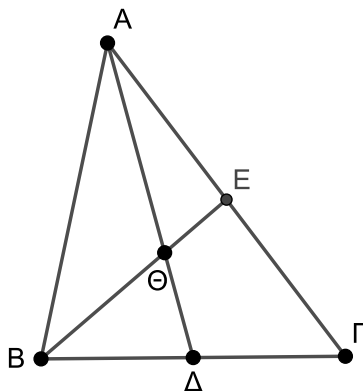
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων BE και $B\theta$.

(Μονάδες 08)

γ) Να σχεδιάσετε τη διάμεσο ΓZ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 07)



ΛΥΣΗ

α) Το Θ είναι το σημείο τομής των διαμέσων AD και BE του τριγώνου $AB\Gamma$, δηλαδή είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Το βαρύκεντρο απέχει από κάθε κορυφή του τριγώνου απόσταση ίση τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

Επομένως το $A\Theta$ είναι ίσο με τα $\frac{2}{3}$ της διαμέσου AD , άρα το ΘD είναι το $\frac{1}{3}$ της AD . Δηλαδή:

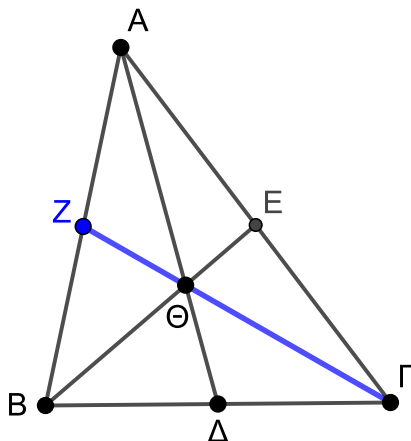
$$\Theta D = AD : 3 = 12 : 3 = 4$$

β) Με παρόμοιους συλλογισμούς προκύπτει ότι το ΘE είναι το $\frac{1}{3}$ της BE . Άρα το BE είναι τριπλάσιο της ΘE , δηλαδή:

$$BE = 3 \cdot \Theta E = 3 \cdot 3 = 9$$

Επίσης $B\Theta = BE - \Theta E = 9 - 3 = 6$.

γ) Η διάμεσος ΓZ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή Γ με το μέσο Z της AB και διέρχεται από το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου.



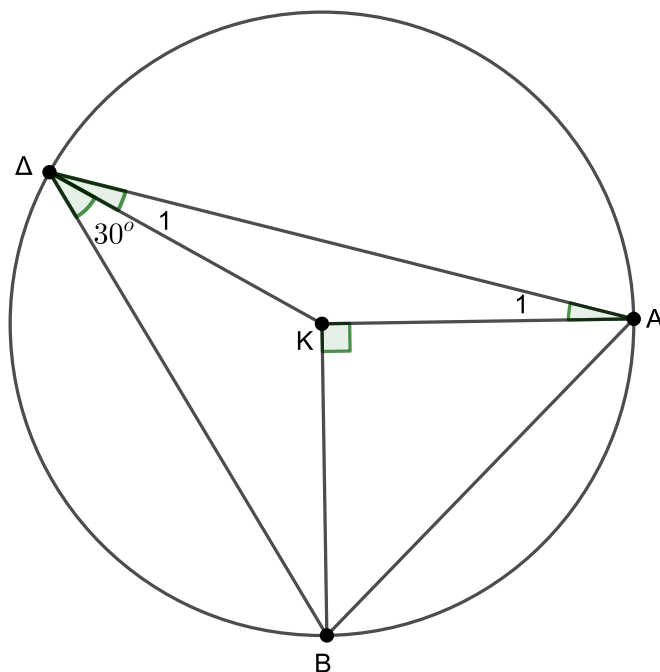
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο K και η ορθή επίκεντρη γωνία $\widehat{AKB}$. Αν η γωνία $\widehat{K\Delta B} = 30^\circ$, να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $\widehat{A\Delta B}$. (Μονάδες 12)

β) τη γωνία $\hat{\Delta}_1 = \widehat{A\Delta K}$. (Μονάδες 8)

γ) τη γωνία $\hat{A}_1 = \widehat{\Delta A K}$. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Η εγγεγραμμένη γωνία $A\hat{D}B$ βαίνει στο ίδιο τόξο $\widehat{AB}$ με την επίκεντρη γωνία $A\hat{K}B = 90^\circ$, άρα είναι ίση με το μισό της $A\hat{K}B$. Επομένως $A\hat{D}B = 45^\circ$.

β) Ισχύει ότι $\hat{D}_1 = A\hat{D}B - K\hat{D}B = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

γ) Το τρίγωνο AKD είναι ισοσκελές, εφόσον οι πλευρές του KD και KA είναι ίσες ως ακτίνες του ίδιου κύκλου. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$ ή $\hat{A}_1 = 15^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

Το Ε είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $AB = 12$ και ισχύει ότι $AG = \Gamma\Delta = \Delta E$.

α) Ποια είναι τα μήκη των τμημάτων ΑΕ, ΕΒ, ΑΓ, ΓΔ και ΔΕ; (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το λόγο $\frac{AE}{EB}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το λόγο $\frac{AG}{\Gamma B}$. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) $AE = AB:2 = 6$, εφόσον το Ε είναι μέσο του ΑΒ. Επίσης $EB = AE = 6$.

Είναι $AG + GD + DE = AE$ ή $3 \cdot AG = 6$ ή $AG = 2$, εφόσον τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ και ΔΕ είναι ίσα. Άρα $AG = GD = DE = 2$.

β) $\frac{EA}{EB} = \frac{6}{6} = 1$.

γ) $GB = GD + DE + EB = 2 + 2 + 6 = 10$. Ο ζητούμενος λόγος είναι $\frac{AG}{GB} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

ΘΕΜΑ 2

Τα σημεία Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και AG , αντίστοιχα, του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε $AE = 9$, $E\Gamma = 3$ και η γωνία $\hat{D}_1 = A\hat{D}E$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

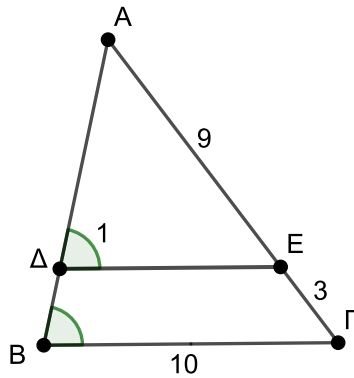
α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AG του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ADE και $AB\Gamma$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{4}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον $B\Gamma = 10$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς DE του τριγώνου ADE .

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) $AG = AE + EG = 9 + 3 = 12$.

β) Τα τρίγωνα ADE και ABG έχουν κοινή την γωνία $\hat{A}$ και $\hat{D}_1 = \hat{B}$. Επομένως έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, άρα είναι όμοια.

Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ίσος με το λόγο των ομόλογων πλευρών τους AE και AG, οι οποίες βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{D}_1$ και $\hat{B}$, αντίστοιχα οπότε:

$$\lambda = \frac{AE}{AG} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

γ) Οι πλευρές DE και BG είναι ομόλογες, εφόσον βρίσκονται απέναντι από την κοινή γωνία $\hat{A}$.

Άρα $\frac{DE}{BG} = \frac{3}{4}$ ή $\frac{DE}{10} = \frac{3}{4}$ ή $DE = 10 \cdot \frac{3}{4} = \frac{30}{4} = 7,5$.

ΘΕΜΑ 2

Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε $AD = 8$, $BD = 4$, $AE = 10$ και $EG = 5$. Επίσης $BG = 13,5$.

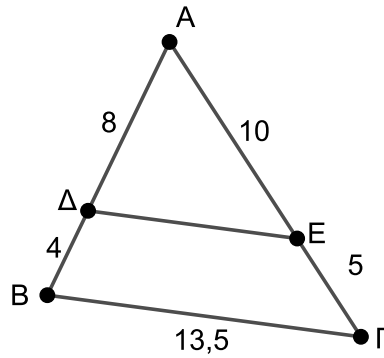
α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{2}{3}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) $AB = AD + DB = 8 + 4 = 12$ και $AG = AE + EG = 10 + 5 = 15$.

β) Έχουμε ότι $\frac{AD}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{AG} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Επίσης η $\hat{A}$ είναι κοινή γωνία των τριγώνων $\triangle ADE$ και $\triangle ABG$.

Άρα τα τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle ABG$ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία σε αυτές τις πλευρές, κοινή. Επομένως είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{2}{3}$.

γ) Οι πλευρές DE και BG είναι ομόλογες πλευρές των όμοιων τριγώνων $\triangle ADE$ και $\triangle ABG$, εφόσον βρίσκονται απέναντι από την κοινή γωνία τους $\hat{A}$.

Άρα $\frac{DE}{BG} = \frac{2}{3}$ ή $\frac{DE}{13,5} = \frac{2}{3}$ ή $DE = 13,5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{13,5 \cdot 2}{3} = \frac{27}{3} = 9$.

ΘΕΜΑ 4

α) Το E είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

Επιπλέον ισχύει ότι $EA = E\Gamma = E\Delta = EB = 6,5$.

i. Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)

ii. Αν επιπλέον δίνεται ότι η πλευρά $A\Delta = 5$, να βρείτε το μήκος της πλευράς AB του $AB\Gamma\Delta$.

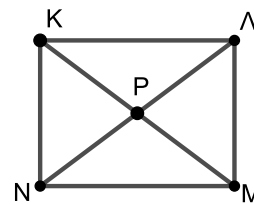
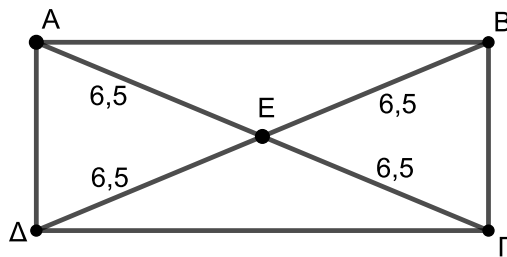
(Μονάδες 10)

β) Μια ταμπέλα έχει το σχήμα του τετραπλεύρου $K\Lambda MN$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Σας δίνεται ότι οι διαγώνιοι του KM και ΛN τέμνονται στο P και έχει $PK = P\Lambda = PM = 2,5$.

Ένας συμμαθητής σας, ο Κώστας γνωρίζει επιπλέον το μήκος του PN και βγάζει, σωστά, το συμπέρασμα ότι η ταμπέλα είναι σχήματος ορθογωνίου. Πόσο είναι το μήκος του PN ;

(Μονάδες 05)



ΛΥΣΗ

α) i. Το Ε είναι το μέσο των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, εφόσον από την υπόθεση έχουμε ότι $ΑΕ = ΕΓ = 6,5$ και $ΒΕ = ΕΔ = 6,5$.

Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Επιπλέον $ΑΓ = ΑΕ + ΕΓ = 6,5 + 6,5 = 13$ και $ΒΔ = ΒΕ + ΕΔ = 6,5 + 6,5 = 13$.

Άρα οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ είναι ίσες. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο με ίσες διαγωνίους, άρα είναι ορθογώνιο.

ii. Εφόσον το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο οι γωνίες του είναι ορθές. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}$ ορθή και υποτείνουσα ΒΔ.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ:

$$ΒΔ^2 = ΑΔ^2 + ΑΒ^2$$

$$ΑΒ^2 = ΒΔ^2 - ΑΔ^2$$

$$ΑΒ^2 = 13^2 - 5^2$$

$$ΑΒ^2 = 169 - 25$$

$$ΑΒ^2 = 144$$

$$ΑΒ = 12$$

β) Το μήκος του ΡΝ είναι ίσο με 2,5. Ο Κώστας που το γνωρίζει εφαρμόζει αναλόγως το συμπέρασμα του α) i.

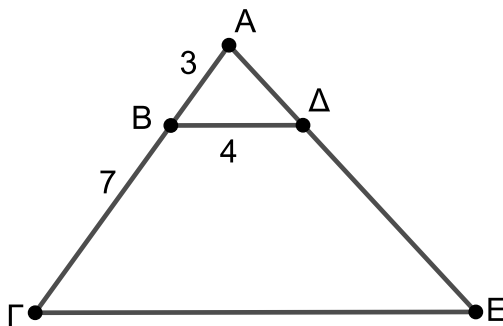
Έτσι αποδεικνύει ότι το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο, εφόσον $ΡΝ = ΡΚ = ΡΛ = ΡΜ$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τραπέζιο $BΓΕΔ$ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές $ΓΒ$ και $ΕΔ$ όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο A . Επιπλέον δίνεται ότι $AB = 3$, $BΓ = 7$ και $BΔ = 4$.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών $AΓ$ και $ΓΕ$ του τριγώνου $AΓΕ$. (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον το $ABΔ$ είναι ισοσκελές να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AE του τριγώνου $AΓΕ$. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Το μήκος της πλευράς AG είναι $AG = AB + BG = 3 + 7 = 10$.

Οι BD και GE είναι παράλληλες ως βάσεις του τραπεζίου $BGED$.

Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ABD που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών AG και AE του τριγώνου AGE και την παράλληλη BD στην πλευρά GE έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του AGE οπότε θα είναι:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{BD}{GE} = \frac{AD}{AE}$$

Αντικαθιστώντας τα γνωστά μήκη στην ισότητα των δύο πρώτων λόγων $\frac{AB}{AG} = \frac{BD}{GE}$ έχουμε:

$$\frac{3}{10} = \frac{4}{GE}$$

$$\text{Άρα } 3 \cdot GE = 40 \text{ ή } GE = \frac{40}{3}.$$

β) Γράφοντας την ισότητα μεταξύ του πρώτου και του τρίτου λόγου, από την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, στο α) ερώτημα έχουμε:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AD}{AE}$$

Διακρίνουμε τις δύο παρακάτω περιπτώσεις για το ισοσκελές τρίγωνο ABD .

1^η περίπτωση: το ABD είναι ισοσκελές με $AD = AB = 3$.

Τότε αντικαθιστώντας στην ισότητα $\frac{AB}{AG} = \frac{AD}{AE}$ έχουμε:

$$\frac{3}{10} = \frac{3}{AE}$$

$$\text{Άρα } AE = 10.$$

2^η περίπτωση: το ABD είναι ισοσκελές με $AD = BD = 4$.

Τότε αντικαθιστώντας στην ισότητα $\frac{AB}{AG} = \frac{AD}{AE}$ έχουμε:

$$\frac{3}{10} = \frac{4}{AE}$$

$$\text{Άρα } 3 \cdot AE = 40 \text{ ή } AE = \frac{40}{3}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τραπέζιο ΒΓΕΔ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές ΓΒ και ΕΔ όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο Α, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

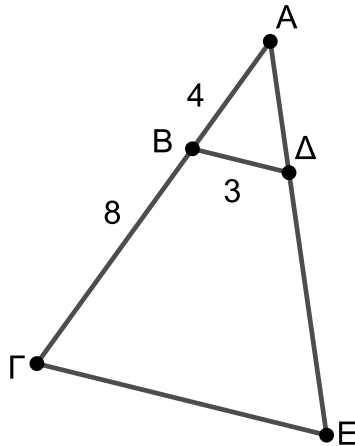
Επιπλέον δίνεται ότι $AB = 4$, $B\Gamma = 8$ και $B\Delta = 3$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ.

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον το ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $AB = A\Delta$, να βρείτε την περίμετρο του τραpezίου.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Το μήκος της πλευράς AG είναι $AG = AB + BG = 4 + 8 = 12$.

Οι BD και GE είναι παράλληλες ως βάσεις του τραπεζίου $BGED$.

Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ABD που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών AG και AE του τριγώνου AGE και την παράλληλη BD στην πλευρά GE έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του AGE οπότε θα είναι:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{BD}{GE} = \frac{AD}{AE}$$

Αντικαθιστώντας τα γνωστά μήκη στην ισότητα των δύο πρώτων λόγων $\frac{AB}{AG} = \frac{BD}{GE}$ έχουμε:

$$\frac{4}{12} = \frac{3}{GE}$$

Άρα $4 \cdot GE = 36$ ή $GE = 9$.

β) Εφόσον το τρίγωνο ABD είναι ισοσκελές με $AB = AD$ θα είναι $AD = AB = 4$.

Από πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα (και αντίστροφα).

Η BD είναι παράλληλη με την πλευρά GE του τριγώνου AGE . Άρα χωρίζει τις πλευρές AG και AE του τριγώνου AGE σε μέρη ανάλογα. Επομένως:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BG}{DE}$$

Άρα $\frac{BG}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{4}{4} = 1$ ή $BG = DE = 8$.

Οπότε η περίμετρος του τραπεζίου είναι $BD + BG + GE + DE = 3 + 8 + 9 + 8 = 28$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τραπέζιο ΒΓΕΔ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές ΓΒ και ΕΔ όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο Α, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Επιπλέον δίνεται ότι $\frac{A\Delta}{AE} = \frac{2}{3}$ και $\Gamma E = 6$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΔ.

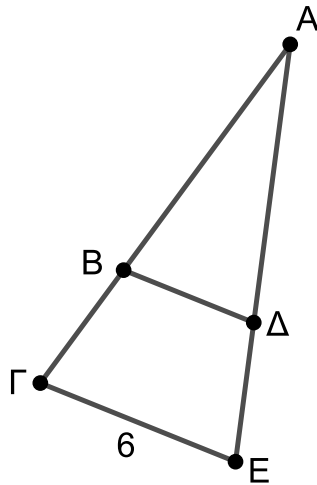
(Μονάδες 11)

β) Αν επιπλέον το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και $AE = 12$:

i. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

ii. να υπολογίσετε τα μήκη των υπόλοιπων πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ.

(Μονάδες 14)



ΛΥΣΗ

α) Οι ΒΔ και ΓΕ είναι παράλληλες ως βάσεις του τραπεζίου ΒΓΕΔ.

Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΒΔ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΓ και ΑΕ του τριγώνου ΑΓΕ και την παράλληλη ΒΔ στην πλευρά ΓΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΓΕ οπότε θα είναι:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{BD}{GE} = \frac{AD}{AE}$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$, άρα $\frac{BD}{GE} = \frac{2}{3}$.

Αντικαθιστώντας το γνωστό μήκος $GE = 6$ έχουμε:

$$\frac{BD}{6} = \frac{2}{3}$$

Άρα $3 \cdot BD = 12$ ή $BD = 4$.

β) i. Από πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα (και αντίστροφα). Η ΒΔ είναι παράλληλη με την πλευρά ΓΕ του τριγώνου ΑΓΕ. Άρα χωρίζει τις πλευρές ΑΓ και ΑΕ του ΑΓΕ σε μέρη ανάλογα. Επομένως:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BG}{DE}$$

Εφόσον το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι πλευρές του ΒΓ και ΔΕ είναι ίσες. Επομένως:

$$\frac{BG}{DE} = 1$$

Άρα από τις δύο προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι:

$$\frac{AB}{AD} = 1 \text{ ή } AB = AD$$

Δηλαδή οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ του τριγώνου ΑΒΔ είναι ίσες. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

ii. Εφόσον $\frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$ και $AE = 12$ έχουμε ότι:

$$\frac{AD}{12} = \frac{2}{3}$$

Άρα $3 \cdot AD = 2 \cdot 12$ ή $3 \cdot AD = 24$ ή $AD = 24:3$ ή $AD = 8$.

Εφόσον, από το β)ii., το ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $AB = AD$ είναι $AB = 8$.

ΘΕΜΑ 4

Τα σημεία Γ , Δ και E είναι σημεία του ευθύγραμμου τμήματος AB , ώστε το E να είναι μέσο του AB και $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E$.

α) Αν $AB = 12$, ποια είναι τα μήκη των τμημάτων EA και $A\Gamma$; (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το λόγο $\lambda_1 = \frac{EA}{EB}$ που το σημείο E διαιρεί το τμήμα AB . (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το λόγο $\lambda_2 = \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$ που το σημείο Γ διαιρεί το τμήμα AB . (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) $EA = AB:2 = 6$, εφόσον το Ε είναι μέσο του ΑΒ.

Επίσης, $ΑΓ + ΓΔ + ΔΕ = ΑΕ$ ή $3 \cdot ΑΓ = 6$ ή $ΑΓ = 2$, εφόσον τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ και ΔΕ είναι ίσα.

β) $EA = EB$, εφόσον το Ε είναι μέσο του ΑΒ. Άρα $\lambda_1 = \frac{EA}{EB} = 1$.

γ) Ισχύει $ΑΓ + ΓΔ + ΔΕ = ΑΕ$ ή $3 \cdot ΑΓ = ΑΕ$, εφόσον τα τμήματα ΑΓ, ΓΔ και ΔΕ είναι ίσα.

Επίσης $EB = AE = 3 \cdot ΑΓ$.

Άρα $ΓΒ = ΓΔ + ΔΕ + EB = ΑΓ + ΑΓ + 3 \cdot ΑΓ = 5 \cdot ΑΓ$.

Ο ζητούμενος λόγος λ_2 είναι ίσος με $\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{1}{5}$.

ΘΕΜΑ 2

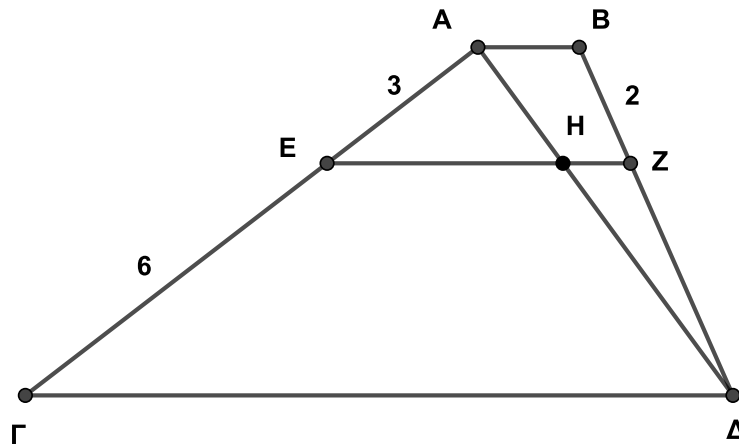
Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα AB , EZ και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλα. Αν έχουμε ότι $AE = 3$, $E\Gamma = 6$ και $BZ = 2$, τότε:

α) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔZ .

(Μονάδες 12)

β) να αποδείξετε ότι $H\Delta = 2 \cdot AH$.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Εφόσον ΑΒ, ΕΖ, ΓΔ είναι παράλληλες που τέμνουν τις ΑΓ, ΒΔ θα ισχύει το Θεώρημα

του Θαλή οπότε: $\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = \frac{ΒΖ}{ΖΔ}$ ή $\frac{3}{6} = \frac{2}{ΖΔ}$ ή $3 \cdot ΖΔ = 12$ ή $ΖΔ = 4$.

β) Όμοια για τις ίδιες παράλληλες που τέμνουν τις ΑΓ, ΑΔ από το Θεώρημα του Θαλή

θα ισχύει: $\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = \frac{ΑΗ}{ΗΔ}$ ή $\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = \frac{ΑΗ}{ΗΔ}$ ή $\frac{3}{6} = \frac{ΑΗ}{ΗΔ}$ ή $3 \cdot ΗΔ = 6 \cdot ΑΗ$ ή $ΗΔ = 2 \cdot ΑΗ$.

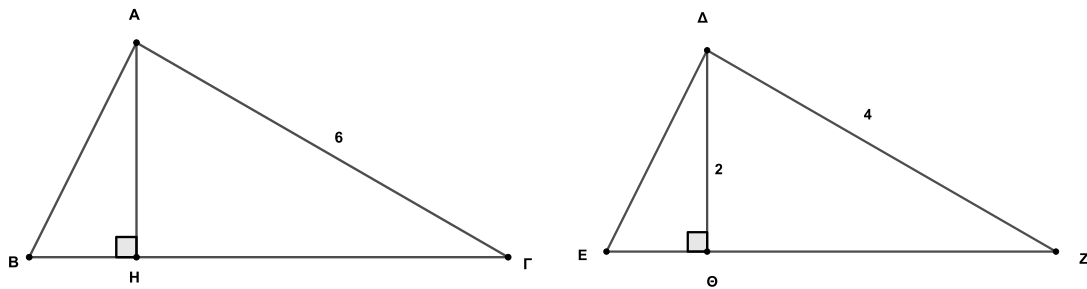
ΘΕΜΑ 2

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ του παρακάτω σχήματος έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$. Αν γνωρίζουμε ότι $A\Gamma = 6$, $\Delta Z = 4$ και $\Delta\Theta = 2$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AH\Gamma$ και $\Delta\Theta Z$ είναι όμοια. (Μονάδες 6)

β) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AH . (Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε το λόγο $\frac{H\Gamma}{\Theta Z}$. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τη γωνία Γ ίση με τη γωνία Ζ (από υπόθεση).

β) Λόγω του ερωτήματος α) τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ θα έχουν τις ομόλογες πλευρές

τους ανάλογες άρα θα ισχύει: $\frac{ΑΗ}{ΘΔ} = \frac{ΑΓ}{ΔΖ}$ ή $\frac{ΑΗ}{2} = \frac{6}{4}$ ή $4 \cdot ΑΗ = 12$ ή $ΑΗ = 3$.

γ) Λόγω του ερωτήματος β) από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΗΓ και ΑΘΖ θα είναι:

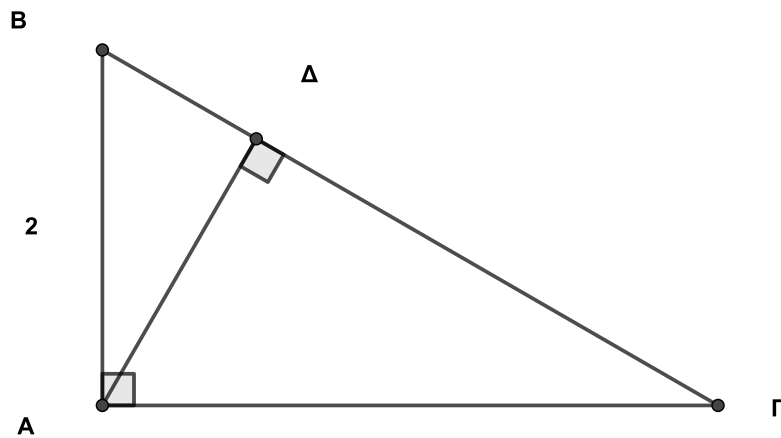
$$\frac{ΗΓ}{ΘΖ} = \frac{ΑΓ}{ΔΖ} \text{ ή } \frac{ΗΓ}{ΘΖ} = \frac{6}{4} \text{ ή } \frac{ΗΓ}{ΘΖ} = \frac{3}{2} .$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, με την υποτείνουσα του $B\Gamma = 4$ και την κάθετη πλευρά του $AB = 2$. Αν $A\Delta$ το ύψος του τριγώνου τότε:

α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια. (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $B\Delta$. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια αφού έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Συγκεκριμένα είναι ορθογώνια ($\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$) και η γωνία $\widehat{B}$ είναι κοινή. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια.

β) Από το α) και τη ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΒΑ ισχύει: $\frac{AB}{\Delta B} = \frac{B\Gamma}{BA}$ ή $\frac{2}{\Delta B} = \frac{4}{2}$ ή

$$\frac{2}{\Delta B} = \frac{4}{2} \text{ ή } \Delta B = 1.$$

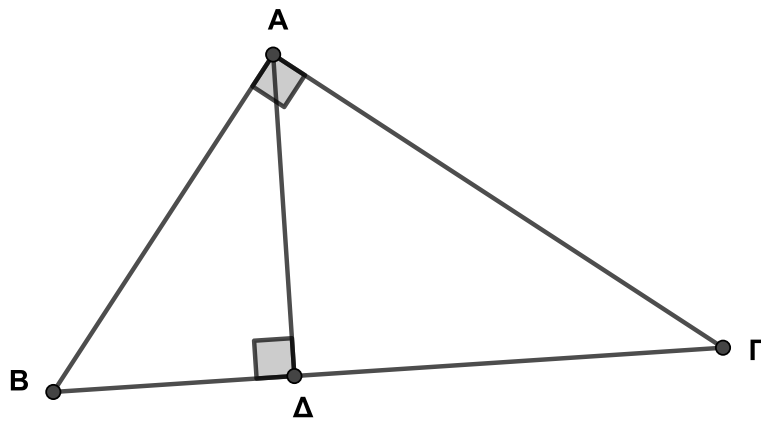
ΘΕΜΑ 2

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$, $B\Gamma = 10$ και $A\Gamma = 8$. Αν AD είναι το ύψος του από την κορυφή A να υπολογίσετε το μήκος:

α) της πλευράς AB . (Μονάδες 10)

β) του τμήματος $\Delta\Gamma$. (Μονάδες 10)

γ) του τμήματος ΔB . (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 = BG^2 - AG^2 \text{ ή } AB^2 = 10^2 - 8^2 \text{ ή } AB^2 = 100 - 64 \text{ ή } AB^2 = 36 \text{ οπότε } AB = 6.$$

β) Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$AG^2 = BG \cdot \Delta\Gamma \text{ ή } 8^2 = 10 \cdot \Delta\Gamma \text{ ή } \Delta\Gamma = \frac{64}{10} = 6,4.$$

γ) Λόγω του ερωτήματος β) είναι: $\Delta B = BG - \Delta\Gamma = 10 - 6,4 = 3,6$.

ΘΕΜΑ 2

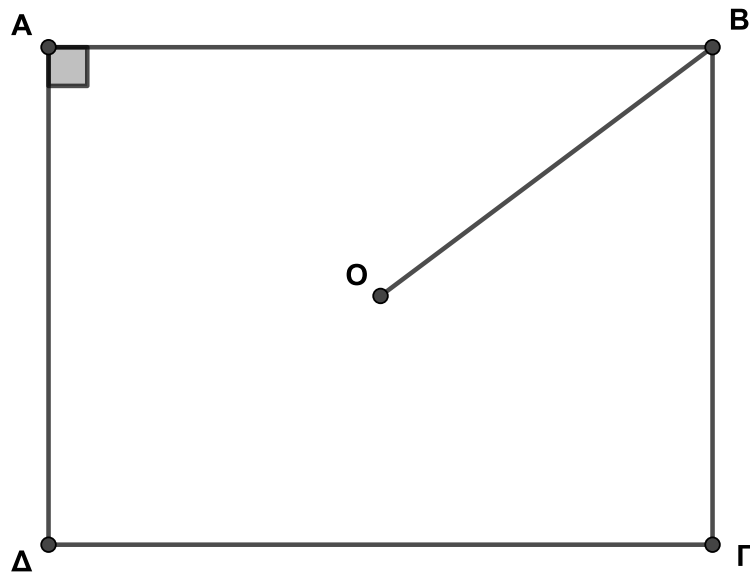
Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος το σημείο Ο είναι το κέντρο του. Επίσης η $OB = 5$ και η $AD = 6$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της ΒΔ. (Μονάδες 10)

β) Πόσο είναι το μήκος της διαγωνίου ΑΓ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

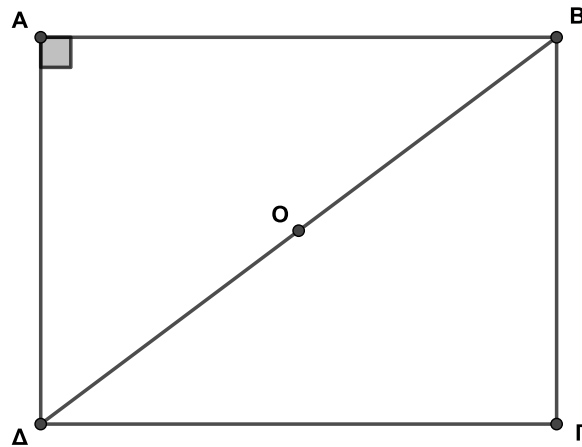
(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα το $OB = 5$. Όμως το O είναι το μέσο της διαγωνίου BD , άρα $BD = 2 \cdot OB = 2 \cdot 5 = 10$.



β) Σε κάθε ορθογώνιο οι διαγώνιες είναι ίσες μεταξύ τους, συνεπώς $AC = BD = 10$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABD από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 = BD^2 - AD^2 \text{ ή } AB^2 = 10^2 - 6^2 \text{ ή } AB^2 = 100 - 36 \text{ ή } AB^2 = 64 \text{ ή } AB = 8.$$

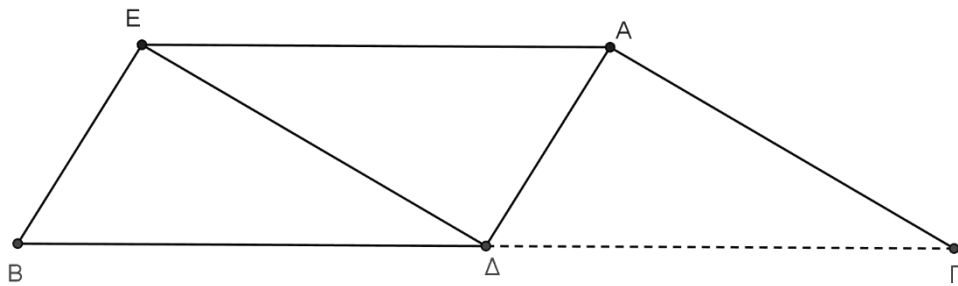
ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο $BEAD$ είναι παραλληλόγραμμο. Η παράλληλη από το A προς την ED (δηλαδή η AG), τέμνει την προέκταση της BD προς το Δ σε σημείο Γ .

α) Να εξηγήσετε γιατί το τμήμα EA είναι παράλληλο στο τμήμα $\Delta\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DEAG$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

γ) Αν $\hat{A}\Gamma\Delta = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}\hat{E}\Delta$. (Μονάδες 5)

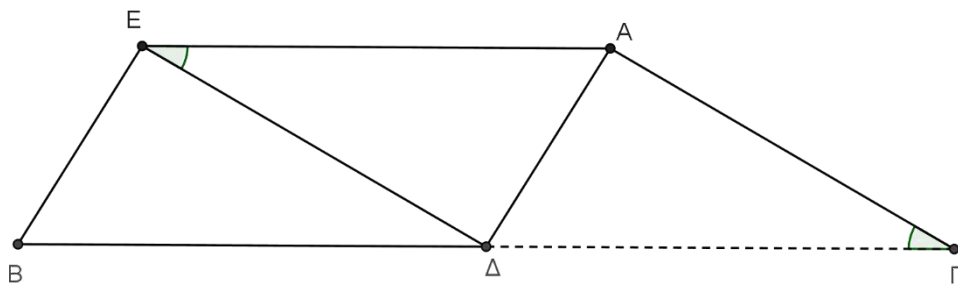


ΛΥΣΗ

α) Αφού το τετράπλευρο $BEAD$ είναι παραλληλόγραμμο θα είναι $EA \parallel B\Delta$, ως απέναντι πλευρές του, οπότε η EA θα είναι παράλληλη στην ευθεία $B\Gamma$, άρα το τμήμα EA θα είναι παράλληλο στο τμήμα $\Delta\Gamma$.

β) Αφού EA είναι παράλληλο στο τμήμα $\Delta\Gamma$ (από το α) ερώτημα) και $A\Gamma$ είναι παράλληλη στην ED από τα δεδομένα, το τετράπλευρο $DEAG$ θα είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του EA , $\Delta\Gamma$ και $A\Gamma$, ED ανά δύο παράλληλες.

γ) Η γωνία $\widehat{A\Gamma\Delta} = 30^\circ$ είναι ίση με τη γωνία $\widehat{A\hat{E}\Delta}$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου $DEAG$ του β) ερωτήματος, οπότε $\widehat{E\Delta B} = 30^\circ$.



ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις τις πλευρές AB , $\Delta\Gamma$ και ίσες πλευρές τις $A\Delta$ και $B\Gamma$. Η παράλληλη από το A στην $B\Gamma$, δηλαδή η AE , τέμνει την πλευρά $\Delta\Gamma$ σε σημείο E .

α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση: «Στο ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι η πλευρά με την πλευρά, οι προκείμενες γωνίες στη βάση του AB είναι η γωνία και η γωνία και οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του $\Delta\Gamma$ είναι η γωνία..... και η γωνία».

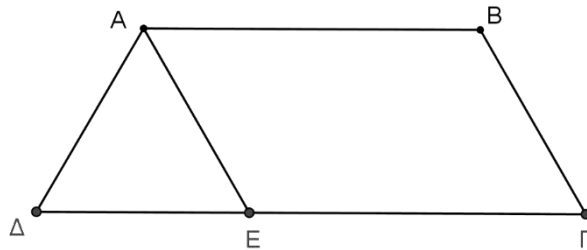
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

γ) Αν είναι $B\Gamma = 5$, να δείξετε ότι $A\Delta = AE = 5$.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

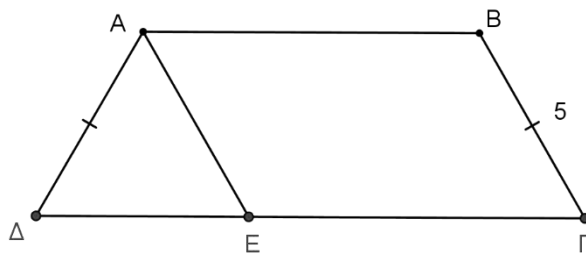
α) «Στο ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι η πλευρά AB με την πλευρά $\Delta\Gamma$, οι προκείμενες γωνίες στη βάση του AB είναι η γωνία $\widehat{\Delta A B}$ και η γωνία $\widehat{B}$ και οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του $\Delta\Gamma$ είναι η γωνία $\widehat{\Delta}$ και η γωνία $\widehat{\Gamma}$ ».

β) Οι AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες ως βάσεις του τραπεζίου, οπότε και το τμήμα AB θα είναι παράλληλο και με το τμήμα $E\Gamma$. Επίσης από τα δεδομένα έχουμε ότι, η AE είναι παράλληλη στη $B\Gamma$. Άρα το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, δηλαδή την AB με την $E\Gamma$ παράλληλες και την AE με την $B\Gamma$ παράλληλες.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι, το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα θα είναι $B\Gamma = AE$ και αφού $B\Gamma = 5$ τότε $AE = 5$ (1).

Από τα δεδομένα έχουμε ότι, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με ίσες πλευρές τις $A\Delta$ και $B\Gamma$, δηλαδή $A\Delta = B\Gamma$ και αφού $B\Gamma = 5$, τότε $A\Delta = 5$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $A\Delta = AE = 5$.



ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο $ABΓΕ$ είναι παραλληλόγραμμο με $ΒΓ = 5$ και $ΑΒ = 8$. Στην προέκταση της $ΓΕ$ προς το $Ε$ θεωρούμε σημείο $Δ$ τέτοιο ώστε $ΑΕ = ΕΔ$ και $\widehat{ΑΕΔ} = 60^\circ$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $ΑΕ = 5$ και $ΕΓ = 8$.

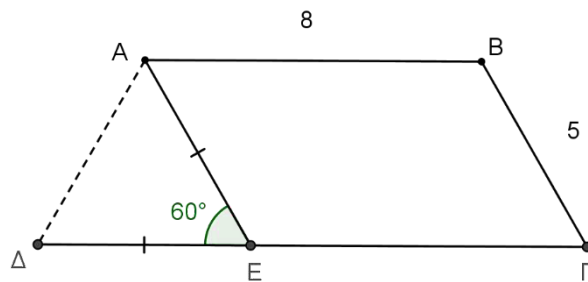
(Μονάδες 8)

ii. $ΔΕ = ΑΔ = 5$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο Π του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α)

- i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι το τετράπλευρο ABΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα έχει τις απέναντι πλευρές ίσες, δηλαδή είναι $AB = ΕΓ$ και $ΒΓ = ΑΕ$.

Οπότε, αφού είναι $AB = 8$ και $ΒΓ = 5$, τότε θα είναι $ΕΓ = 8$ και $ΑΕ = 5$.

- ii. Αφού είναι $ΑΕ = ΕΔ$ από τα δεδομένα, το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΑΔ και με γωνία κορυφής $\hat{A}\hat{E}\hat{D}$ ίση με 60° , οπότε οι γωνίες της βάσης του θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΔ έχουμε:

$$60^\circ + \hat{\epsilon} + \hat{\zeta} = 180^\circ \text{ ή } 2\hat{\epsilon} + 60^\circ = 180^\circ \text{ ή } 2\hat{\epsilon} = 120^\circ, \text{ άρα } \hat{\epsilon} = 60^\circ$$

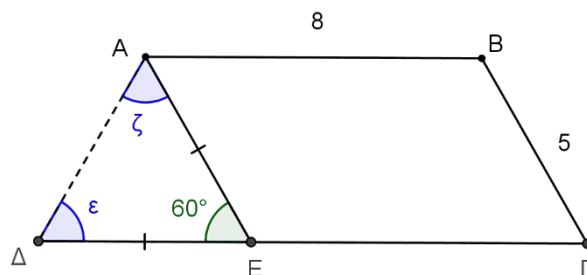
Αφού $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$, άρα και $\hat{\zeta} = 60^\circ$.

Επομένως το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισόπλευρο αφού έχει όλες του τις γωνίες ίσες με 60° , οπότε $ΑΕ = ΔΕ = ΑΔ$, και αφού είναι $ΑΕ = 5$ από το α)i. ερώτημα, άρα $ΔΕ = ΑΔ = 5$.

β) Η περίμετρος Π του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι $\Pi = AB + ΒΓ + ΔΓ + ΑΔ$.

- Από τα δεδομένα έχουμε ότι $AB = 8$ και $ΒΓ = 5$.
- $ΔΓ = ΔΕ + ΕΓ$, με $ΕΓ = 8$ (από το α)i. ερώτημα) και $ΔΕ = 5$ (από το α)ii. ερώτημα), οπότε $ΔΓ = 5 + 8 = 13$.
- $ΑΔ = 5$ (από το α)ii. ερώτημα)

Άρα $\Pi = 8 + 5 + 13 + 5 = 31$.



ΘΕΜΑ 2

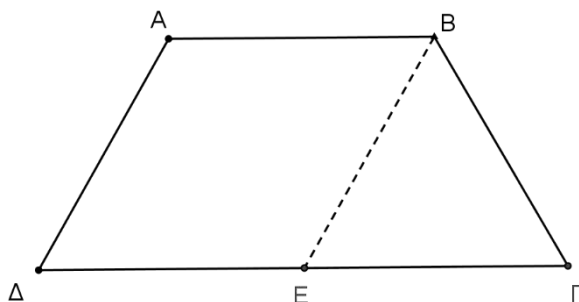
Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις AB και $\Delta\Gamma$, $AD = B\Gamma$ και η BE είναι παράλληλη στην AD .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

β) Αν είναι $AB = AD = 12$ και $\Delta\Gamma = 2AB$,

i. να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου $ABE\Delta$. (Μονάδες 9)

ii. να δείξετε ότι το σημείο E είναι το μέσο του τμήματος $\Delta\Gamma$. (Μονάδες 7)



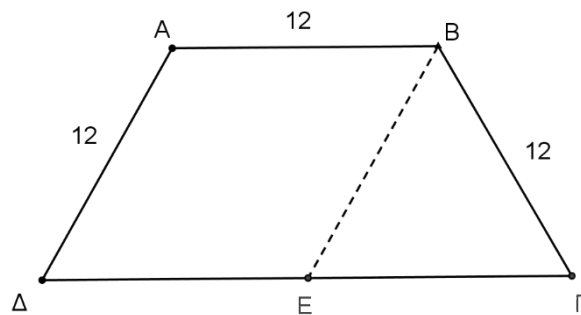
ΛΥΣΗ

α) Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις AB και $\Delta\Gamma$, τότε η AB είναι παράλληλη στην $\Delta\Gamma$, άρα AB παράλληλη και στην ΔE . Από τα δεδομένα έχουμε ότι και οι BE , AD είναι παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

β)

i. Αφού το $ABE\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, θα έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, δηλαδή $AB = \Delta E$ και $AD = BE$, και επειδή από τα δεδομένα έχουμε ότι $AB = AD = 12$, προκύπτει ότι $AB = BE = \Delta E = AD = 12$ (1). Οπότε η περίμετρος Π του $ABE\Delta$ είναι : $\Pi = AB + BE + \Delta E + AD = 12 + 12 + 12 + 12 = 4 \cdot 12 = 48$.

ii. Είναι $\Delta\Gamma = 2AB$ με $AB = 12$, άρα $\Delta\Gamma = 2 \cdot 12 = 24$. Έχουμε ότι $\Delta\Gamma = \Delta E + E\Gamma$ με $\Delta\Gamma = 24$ και $\Delta E = 12$ από τη σχέση (1), οπότε $E\Gamma = 24 - 12 = 12$. Συνεπώς, $\Delta E = E\Gamma = 12$ άρα το E είναι μέσο του $\Delta\Gamma$.



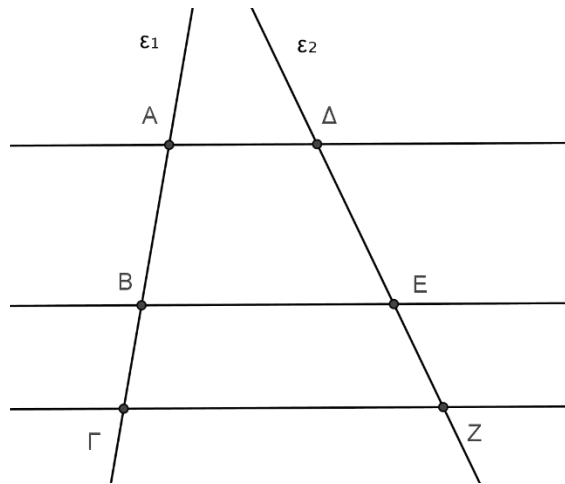
ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι παράλληλες, οι οποίες τέμνουν τις ευθείες ε_1 και ε_2 . Αν είναι $AB = 12$, $DE = 15$ και $EZ = 10$,

α) να υπολογίσετε το λόγο $\frac{EZ}{\Delta E}$. (Μονάδες 7)

β) να δείξετε ότι $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{2}{3}$. (Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Αφού $EZ = 10$ και $ΔΕ = 15$, τότε $\frac{EZ}{ΔΕ} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

β) Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται από τις παράλληλες ευθείες $ΑΔ$, $ΒΕ$ και $ΓΖ$, οπότε τα τμήματα που ορίζουν οι παράλληλες στις ε_1 και ε_2 θα είναι ανάλογα (Θεώρημα Θαλή), δηλαδή θα ισχύει: $\frac{AB}{ΔΕ} = \frac{BΓ}{EZ} = \frac{AΓ}{ΔΖ}$ (1)

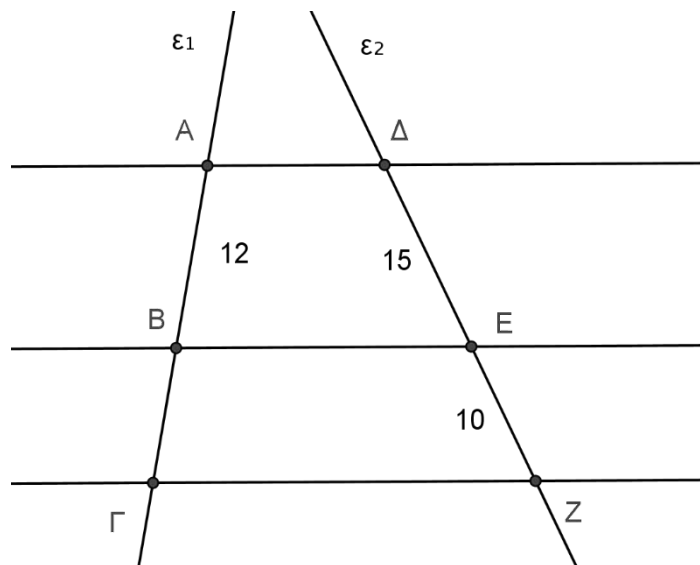
Από τη σχέση (1) έχουμε ότι $\frac{AB}{ΔΕ} = \frac{BΓ}{EZ}$ ή $\frac{EZ}{ΔΕ} = \frac{BΓ}{AB}$ με $\frac{EZ}{ΔΕ} = \frac{2}{3}$ από το ερώτημα α), άρα

$$\frac{2}{3} = \frac{BΓ}{AB}, \text{ δηλαδή } \frac{BΓ}{AB} = \frac{2}{3}.$$

γ)

Α' τρόπος: Από τη σχέση (1) του β) ερωτήματος έχουμε ότι $\frac{AB}{ΔΕ} = \frac{AΓ}{ΔΖ}$ ή $\frac{12}{15} = \frac{AΓ}{ΔΖ}$, όπου $ΔΖ = ΔΕ + EZ = 15 + 10 = 25$, οπότε $15 \cdot AΓ = 12 \cdot 25$ ή $AΓ = 20$.

Β' τρόπος: από το β) ερώτημα έχουμε ότι $\frac{BΓ}{AB} = \frac{2}{3}$ με $AB = 12$, άρα $\frac{BΓ}{12} = \frac{2}{3}$ ή $BΓ = \frac{2 \cdot 12}{3}$, άρα $BΓ = 8$. Όμως $AΓ = AB + BΓ = 12 + 8 = 20$.



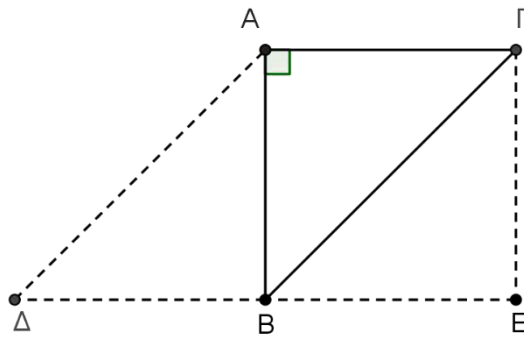
ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB = A\Gamma = 12$. Έστω ότι η παράλληλη από το σημείο Γ στην AB και η παράλληλη από το σημείο B στην $A\Gamma$ τέμνονται στο σημείο E .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $A\Gamma EB$ είναι τετράγωνο και να υπολογίσετε την περίμετρό του. (Μονάδες 16)

β) Αν η παράλληλη από το A στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την ευθεία BE (προς το μέρος του B) σε σημείο Δ , να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $A\Gamma B\Delta$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

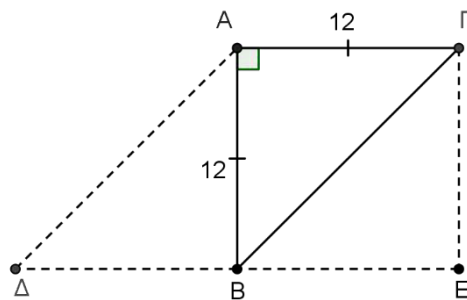
α) Αφού είναι $AB \parallel \Gamma E$ και $A\Gamma \parallel BE$, το τετράπλευρο $A\Gamma E B$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Το παραλληλόγραμμο $A\Gamma E B$ έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες, τις AB και $A\Gamma$ από τα δεδομένα, και μια γωνία ορθή, την $\hat{A} = 90^\circ$ επίσης από τα δεδομένα, άρα είναι τετράγωνο.

Αφού το $A\Gamma E B$ είναι τετράγωνο θα έχει όλες τις πλευρές του ίσες, δηλαδή

$$A\Gamma = \Gamma E = E B = B A = 12$$

Επομένως η περίμετρος Π του $A\Gamma E B$ θα είναι $\Pi = 4 \cdot AB = 4 \cdot 12 = 48$.

β) Έχουμε ότι $A\Gamma \parallel BE$ (από τα δεδομένα), άρα $A\Gamma \parallel \Delta B$. Επίσης είναι $A\Delta \parallel B\Gamma$ από την υπόθεση του β) ερωτήματος, άρα το τετράπλευρο $A\Gamma B \Delta$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με παράλληλες πλευρές τις AB , $\Delta\Gamma$ και $A\Delta$, $B\Gamma$ και διαγωνίους $A\Gamma$ και ΔB , οι οποίες τέμνονται σε σημείο O . Αν επιπλέον είναι $A\Gamma = 5$, $O\Delta = 2,1$ και $AB = 4,2$, να απαντήσετε στις ερωτήσεις που ακολουθούν, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

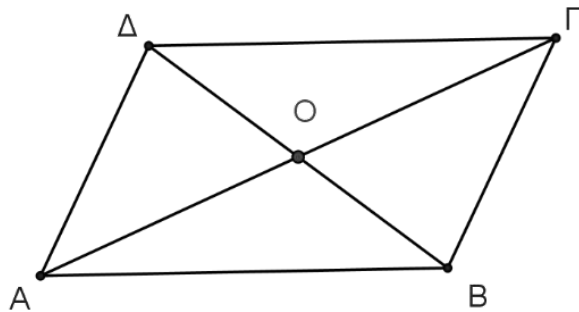
α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς $\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε

- i. το μήκος της διαγωνίου ΔB ,
- ii. το μήκος του τμήματος $O\Gamma$.

(Μονάδες 20)



ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta\Gamma = AB$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 4,2$.

Άρα $\Delta\Gamma = 4,2$.

β) Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται και το σημείο τομής τους είναι το κοινό τους μέσο, δηλαδή στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ για τις διαγωνίους του $B\Delta$ και $A\Gamma$, που τέμνονται στο O , θα ισχύει ότι το O είναι το κοινό τους μέσο. Δηλαδή, θα ισχύει ότι:

$$OB = OD \text{ και } OA = OG.$$

- i. Αφού είναι $OD = OB$ και $OD = 2,1$ τότε $OB = 2 \cdot OD = 2 \cdot 2,1 = 4,2$.
- ii. Είναι $AG = OA + OG$ με $AG = 5$ και $OA = OG$. Άρα $5 = 2 \cdot OG$ ή $OG = 2,5$.

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με παράλληλες πλευρές τις AB , $\Delta\Gamma$ και $A\Delta$, $B\Gamma$, το σημείο O είναι το κέντρο του, και $A\Delta = \Delta\Gamma = 5$. Να απαντήσετε στα ερωτήματα που ακολουθούν, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ και να υπολογίσετε την περίμετρό του.

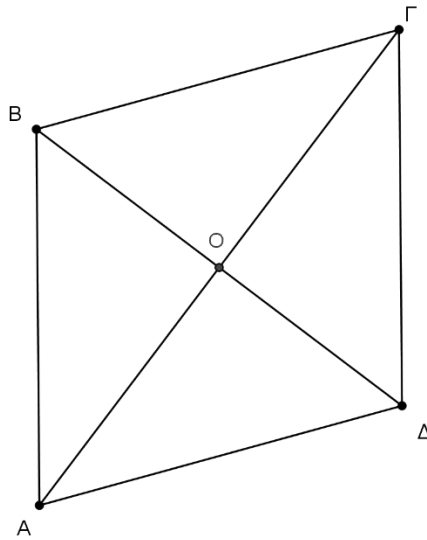
(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\hat{O}\Delta}$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν είναι $O\Delta = 3$ και $A\Gamma = 8$, να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΔB και $O\Gamma$.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες, τις ΑΔ και ΔΓ από τα δεδομένα, τότε θα είναι ρόμβος. Αφού το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος θα έχει όλες του τις πλευρές ίσες, δηλαδή $AB = BG = ΓΔ = ΔΑ = 5$. Οπότε η περίμετρός του Π θα είναι $\Pi = 4 \cdot AB = 4 \cdot 5 = 20$.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, οπότε οι διαγώνιοί του θα τέμνονται κάθετα, άρα η γωνία $\widehat{A\hat{O}D} = 90^\circ$.

γ) Γνωρίζουμε ότι, οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το κοινό τους μέσο. Οπότε στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ για τις διαγωνίους του ΒΔ και ΑΓ, που τέμνονται στο Ο, θα ισχύει ότι το Ο είναι το κοινό τους μέσο. Δηλαδή, θα ισχύει ότι:

$$OB = OD \text{ και } OA = OG.$$

Αφού είναι $OD = OB$ και $OD = 3$ τότε $OB = 2 \cdot OD = 2 \cdot 3 = 6$.

Είναι $AG = OA + OG$ με $AG = 8$ και $OA = OG$.

Άρα $8 = 2 \cdot OG$ ή $OG = 4$.

ΘΕΜΑ 2

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος είναι ισοσκελές με $\Gamma A = \Gamma B = 8$, το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς του $A\Gamma$ και η ευθεία ΔE είναι παράλληλη στην πλευρά του AB , όπου $AB = 6$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς ΓB του τριγώνου $AB\Gamma$.

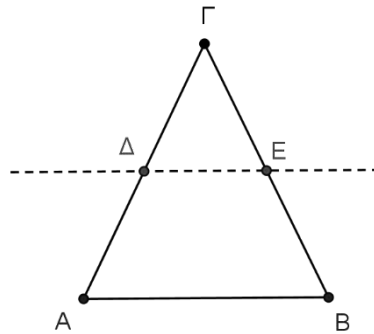
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΔE , ΔA και EB , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $A\Delta E B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε την περιμέτρό του.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι, το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ και η ΔΕ είναι παράλληλη στην πλευρά του ΑΒ, οπότε η ΔΕ θα περνάει από το μέσο της τρίτης πλευράς ΓΒ του τριγώνου, δηλαδή το σημείο Ε θα είναι το μέσο του ΓΒ.

β) Από τα δεδομένα και το α) ερώτημα έχουμε ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ίσων πλευρών ΓΑ και ΓΒ του τριγώνου ΑΒ, οπότε:

$$\Delta A = \frac{\Gamma A}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ και } E B = \frac{\Gamma B}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ όπου } \Gamma A = \Gamma B = 8$$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα Δ και Ε των πλευρών του ΓΑ και ΓΒ αντίστοιχα, οπότε θα είναι παράλληλο στην πλευρά ΑΒ και ίσο με το μισό της, δηλαδή είναι $\Delta E \parallel A B$ και $\Delta E = \frac{A B}{2}$ με $A B = 6$. Άρα $\Delta E = \frac{6}{2} = 3$.

γ) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο γιατί έχει μόνο ένα ζεύγος απέναντι πλευρών παράλληλες, τις ΔΕ και ΑΒ από το β) ερώτημα, και οι άλλες δύο, οι ΑΔ και ΒΕ, δεν είναι παράλληλες καθώς ως πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Γ. Επίσης από το β) ερώτημα έχουμε ότι $\Delta A = E B = 4$. Επομένως το τραπέζιο ΑΔΕΒ είναι ισοσκελές.

Η περίμετρος του Π θα είναι : $\Pi = A B + \Delta A + \Delta E + E B = 6 + 4 + 3 + 4 = 17$.

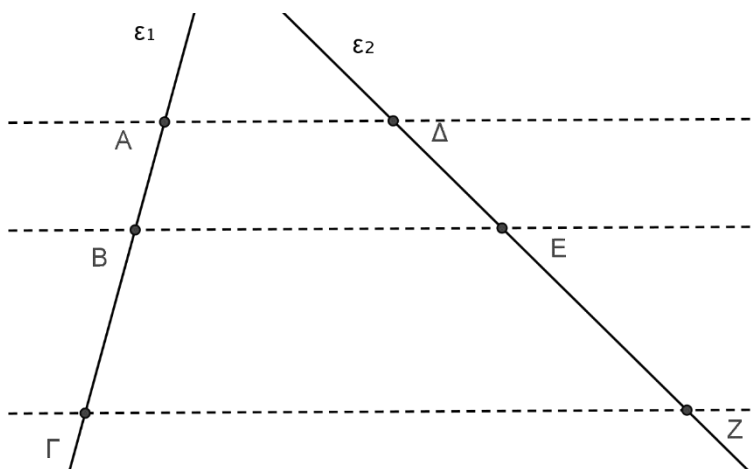
ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες AD , BE και ΓZ είναι παράλληλες, οι οποίες τέμνουν τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία A , B , Γ και Δ , E , Z αντίστοιχα. Αν είναι $AB = 4$, $B\Gamma = 8$ και $\Delta Z = 18$, τότε

α) να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AB}{\Gamma\Gamma'}$, (Μονάδες 5)

β) να αιτιολογήσετε γιατί είναι $\frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{1}{3}$, (Μονάδες 12)

γ) να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΔE και EZ . (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

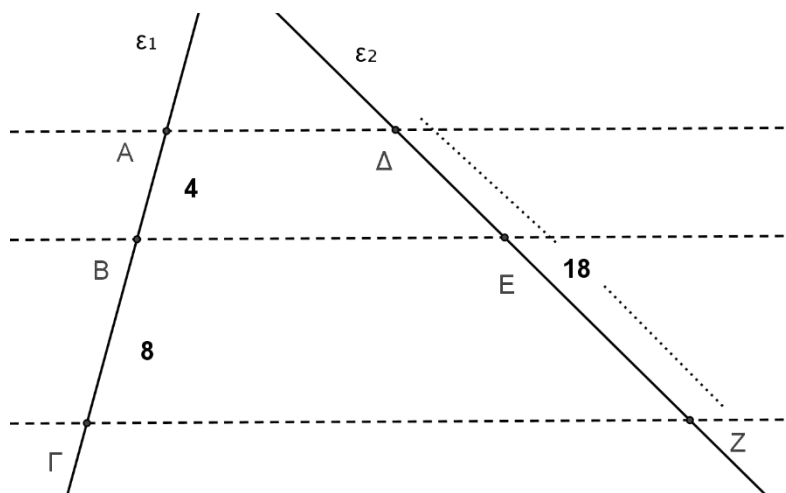
α) Αφού $AB = 4$ και $BΓ = 8$, τότε $AΓ = AB + BΓ = 4 + 8 = 12$. Οπότε $\frac{AB}{AΓ} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

β) Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται από τις παράλληλες ευθείες $AΔ$, BE και $ΓZ$, οπότε τα τμήματα που ορίζουν οι παράλληλες στις ε_1 και ε_2 θα είναι ανάλογα (Θεώρημα Θαλή), δηλαδή θα ισχύει: $\frac{AB}{ΔE} = \frac{BΓ}{EZ} = \frac{AΓ}{ΔZ}$ (1)

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι $\frac{AB}{ΔE} = \frac{AΓ}{ΔZ}$ ή $\frac{AB}{AΓ} = \frac{ΔE}{ΔZ}$ με $\frac{AB}{AΓ} = \frac{1}{3}$ από το ερώτημα α), άρα $\frac{ΔE}{ΔZ} = \frac{1}{3}$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι $\frac{ΔE}{ΔZ} = \frac{1}{3}$ με $ΔZ = 18$, οπότε $\frac{ΔE}{18} = \frac{1}{3}$, άρα $ΔE = 6$.

Αφού $ΔZ = 18$ και $ΔE = 6$, άρα $EZ = 18 - 6 = 12$.



ΘΕΜΑ 4

Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ του σχήματος είναι ίσα και ισοσκελή με $AB = AK$ και $\Gamma\Lambda = \Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Τα σημεία Λ και K είναι τα μέσα των BK και $\Delta\Lambda$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

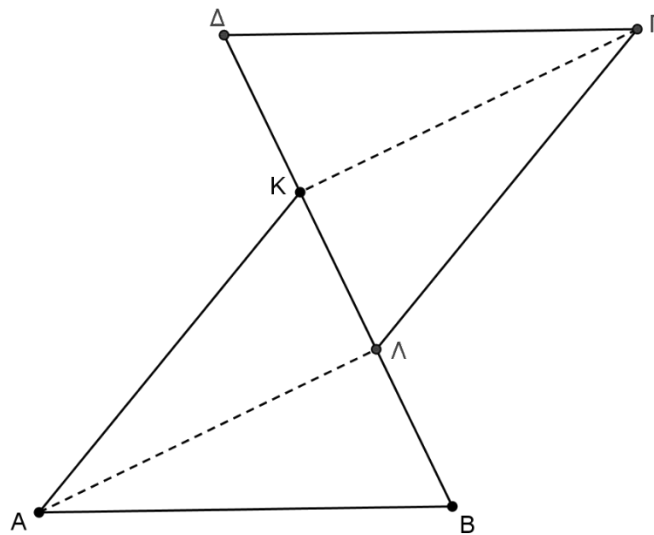
i. $AK = \Gamma\Lambda$. (Μονάδες 8)

ii. $AK = \Gamma K$. (Μονάδες 4)

iii. Το τετράπλευρο $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Θα μπορούσε το παραλληλόγραμμο $AK\Gamma\Lambda$ να είναι ρόμβος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

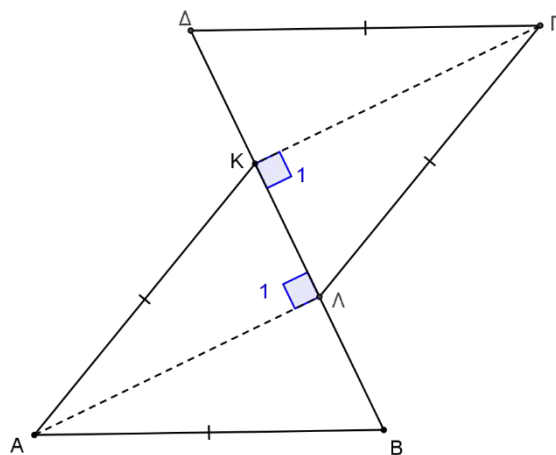


ΛΥΣΗ

α)

- i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ισοσκελή με $AB = AK$ και $\Gamma\Lambda = \Gamma\Delta$ αντίστοιχα και ότι είναι ίσα, οπότε θα έχουν τις ίσες πλευρές τους ίσες, δηλαδή $AB = AK = \Gamma\Delta = \Gamma\Lambda$, άρα $AK = \Gamma\Lambda$ (1).
- ii. Τα σημεία Λ και K είναι τα μέσα των πλευρών KB και $\Delta\Lambda$ των ισοσκελών τριγώνων AKB και $\Gamma\Delta\Lambda$, οπότε τα AL και ΓK είναι ύψη στις πλευρές KB και $\Delta\Lambda$ αντίστοιχα. Άρα τα τρίγωνα ALK και $\Gamma K\Lambda$ είναι ορθογώνια με $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = 90^\circ$, τα οποία έχουν την πλευρά $K\Lambda$ κοινή και τις πλευρές τους $AK, \Gamma\Lambda$ ίσες (από σχέση (1)). Επομένως τα τρίγωνα ALK και $\Gamma K\Lambda$ είναι ίσα, γιατί έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν και τις άλλες κάθετες πλευρές του ίσες, δηλαδή $AL = \Gamma K$ (2).
- iii. Το τετράπλευρο $AK\Gamma\Lambda$ θα είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του $AK, \Gamma\Lambda$ και $AL, \Gamma K$ ίσες (σχέσεις (1) και (2)).

β) Έστω ότι το παραλληλόγραμμο $AK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος, τότε όλες οι πλευρές του είναι ίσες, άρα και $AK = AL$. Όμως $AK > AL$, γιατί το AK είναι η υποτείνουσα και το AL είναι κάθετη πλευρά στο ορθογώνιο τρίγωνο ALK . Επομένως, οι πλευρές AK και AL του παραλληλογράμμου $AK\Gamma\Lambda$ δεν μπορεί να είναι ίσες, οπότε το παραλληλόγραμμο $AK\Gamma\Lambda$ δεν μπορεί να είναι ρόμβος.



ΘΕΜΑ 4

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος που ακολουθεί τα K , Λ και M είναι τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας:

i. Αν είναι $K\Lambda = 6$, τότε το $B\Gamma$ είναι ίσο με:

A: 6 B: 12 Γ: 3 Δ: 16 (Μονάδες 8)

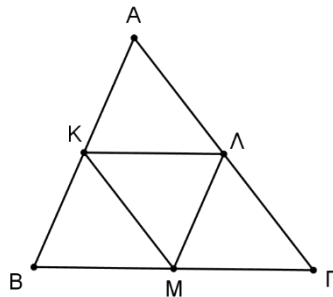
ii. Αν είναι $K\Lambda + \Lambda M + KM = 12$, τότε το άθροισμα $AB + B\Gamma + A\Gamma$ είναι ίσο με:

A: 12 B: 6 Γ: 24 Δ: 16 (Μονάδες 9)

β) Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Πρόταση : «Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, τότε το τετράπλευρο $K\Lambda MB$ είναι ρόμβος».

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) i. Σωστή απάντηση είναι το Β.

Αφού τα Κ, Λ είναι μέσα πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, το ΚΛ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα

τους είναι $ΚΛ = \frac{ΒΓ}{2}$ ή $6 = \frac{ΒΓ}{2}$, άρα ΒΓ= 12.

ii. Σωστή απάντηση είναι το Γ.

- Τα Κ, Λ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το ΚΛ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα τους είναι $ΚΛ = \frac{ΒΓ}{2}$.
- Τα Λ, Μ είναι μέσα των πλευρών ΑΓ, ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το ΛΜ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα τους είναι $ΛΜ = \frac{ΑΒ}{2}$.
- Τα Κ, Μ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το ΚΜ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα τους είναι $ΚΜ = \frac{ΑΓ}{2}$.

Οπότε $ΚΛ + ΛΜ + ΚΜ = \frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΑΓ}{2}$ ή $12 = \frac{ΒΓ+ΑΒ+ΑΓ}{2}$ ή $ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ = 24$.

β) Αφού τα Κ, Λ είναι μέσα πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, το ΚΛ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα

τους θα είναι παράλληλο προς την πλευρά ΒΓ και ίσο με το μισό της, δηλαδή $ΚΛ = \frac{ΒΓ}{2}$ και

αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ, τότε $ΚΛ = \frac{2 \cdot ΒΜ}{2}$ ή $ΚΛ = ΒΜ$.

Επειδή είναι ΚΛ παράλληλο την πλευρά ΒΓ, το ΚΛ θα είναι παράλληλο και στο τμήμα ΒΜ, δηλαδή $ΚΛ // ΒΜ$.

Αφού είναι $ΚΛ // ΒΜ$ και $ΚΛ = ΒΜ$, τότε το τετράπλευρο ΚΛΜΒ θα είναι παραλληλόγραμμο.

Από υπόθεση το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ$ και $ΚΒ = ΒΜ$ ως μισά των ίσων πλευρών του ΑΒ και ΒΓ και Κ, Μ τα αντίστοιχα μέσα τους.

Επομένως, το τετράπλευρο ΚΛΜΒ είναι ρόμβος γιατί είναι παραλληλόγραμμο που έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Συνεπώς, η Πρόταση είναι αληθής.

ΘΕΜΑ 4

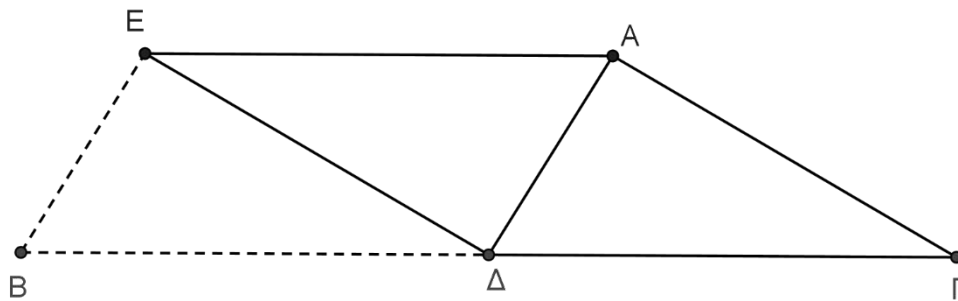
Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο ΕΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο με $EA = 2 AD$. Η παράλληλη από το Ε προς την ΑΔ τέμνει την προέκταση της ΓΔ προς το Δ σε σημείο Β.

α) Να αποδείξετε ότι:

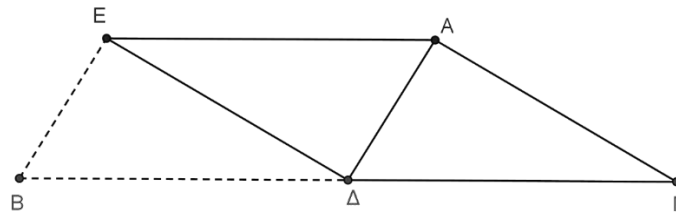
- i. Το τμήμα ΕΑ είναι παράλληλο στο τμήμα ΒΔ. (Μονάδες 4)
- ii. Το τετράπλευρο ΕΑΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)
- iii. Το σημείο Δ είναι το μέσο του ΒΓ και ότι $BΓ = 4 AD$. (Μονάδες 10)

β) Αν το παραλληλόγραμμο ΕΑΓΔ είναι ρόμβος, να βρείτε το είδος του τριγώνου ΒΕΓ ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ



α)i. Το τετράπλευρο ΕΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι $EA \parallel \Delta\Gamma$ ως απέναντι πλευρές του, οπότε η ΕΑ θα είναι παράλληλη στη ΒΓ, άρα και το τμήμα ΕΑ θα είναι παράλληλο με το τμήμα ΒΔ.

α)ii. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι οι πλευρές ΕΑ και ΒΔ του τετραπλεύρου ΕΑΔΒ είναι παράλληλες. Από τα δεδομένα έχουμε ότι η ΕΒ είναι παράλληλη στη ΑΔ. Επομένως το τετράπλευρο ΕΑΔΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ΕΑ, ΒΔ και ΑΔ, ΕΒ ανά δύο παράλληλες.

α)iii. Από το ερώτημα α)ii. έχουμε ότι το ΕΑΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι $EA = BD$ ως απέναντι πλευρές του. Από τα δεδομένα έχουμε ότι το ΕΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι $EA = \Delta\Gamma$ ως απέναντι πλευρές του.

Επομένως θα έχουμε $EA = BD = \Delta\Gamma$, οπότε και $BD = \Delta\Gamma$. Άρα το Δ είναι μέσο της ΒΓ.

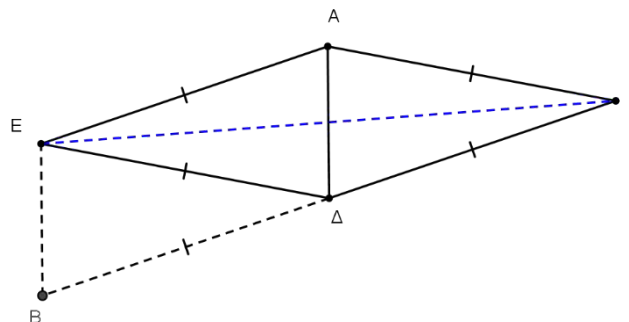
Οπότε $B\Gamma = 2\Delta\Gamma = 2EA = 2(2A\Delta) = 4A\Delta$, όπου $EA = 2A\Delta$ (από τα δεδομένα).

β) Αν το τετράπλευρο ΕΑΓΔ είναι ρόμβος, τότε ως ρόμβος θα έχει όλες του τις πλευρές ίσες, δηλαδή $EA = ED = \Delta\Gamma = A\Gamma$ (1).

Αφού Δ είναι το μέσο του ΒΓ (από το β) ερώτημα), θα είναι $BD = \Delta\Gamma$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) θα προκύπτει ότι $ED = \Delta\Gamma = BD = \frac{B\Gamma}{2}$.

Οπότε, στο τρίγωνο ΒΕΓ η ΕΔ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΒΓ και ισούται με το μισό της πλευράς, άρα το τρίγωνο ΒΕΓ θα είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΒΓ και ορθή τη γωνία $\widehat{B\hat{E}\hat{G}}$.



ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο με διαγώνιο $ZE = 60$ και το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με πλευρά $AB = 16$. Αν είναι $ZA = \Gamma E = 20$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $ZA = A\Gamma = \Gamma E$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε:

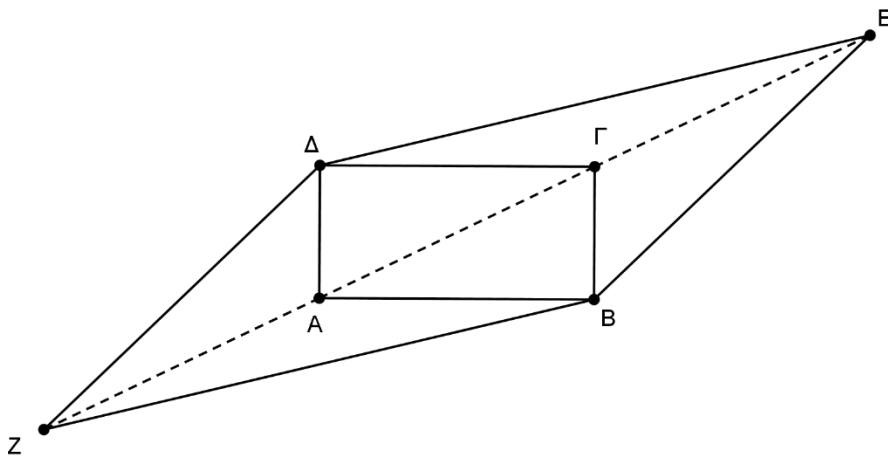
i. το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ και την περίμετρο του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$,

(Μονάδες 10)

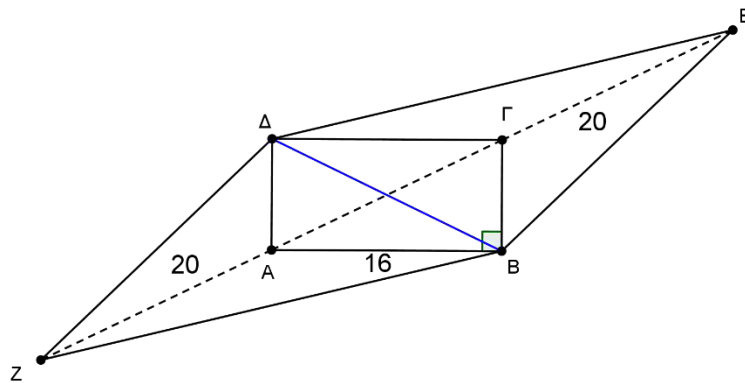
ii. τη διαγώνιο ΔB του παραλληλογράμμου ΔEBZ .

(Μονάδες 7)

Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



ΛΥΣΗ



α) Είναι $ZE = ZA + ΑΓ + ΓΕ$ με $ZE = 60$ και $ZA = ΓΕ = 20$, οπότε έχουμε $60 = 20 + ΑΓ + 20$ ή $ΑΓ = 60 - 40$ ή $ΑΓ = 20$. Συνεπώς $ZA = ΑΓ = ΓΕ = 20$.

β)

i. Αφού το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο θα έχει τις γωνίες του ορθές, οπότε το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο με $\widehat{B}=90^{\circ}$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ θα έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 \text{ ή } ΒΓ^2 = ΑΓ^2 - ΑΒ^2 \text{ ή } ΒΓ^2 = 20^2 - 16^2 \text{ ή } ΒΓ^2 = 144 \text{ ή } ΒΓ = 12$$

Αφού το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο, άρα είναι και παραλληλόγραμμο, θα έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες δηλαδή $ΑΔ = ΒΓ = 12$ και $ΔΓ = ΑΒ = 16$. Επομένως η περίμετρος Π του $ΑΒΓΔ$ είναι: $\Pi = 2ΑΒ + 2ΒΓ = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 12$ ή $\Pi = 56$.

ii. Αφού το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο, θα έχει ίσες τις διαγωνίους του, δηλαδή $ΑΓ = ΔΒ$ με $ΑΓ = 20$ από το α) ερώτημα, άρα $ΔΒ = 20$ η οποία είναι διαγώνιος και του παραλληλογράμμου $ΔΕΒΖ$.

ΘΕΜΑ 2

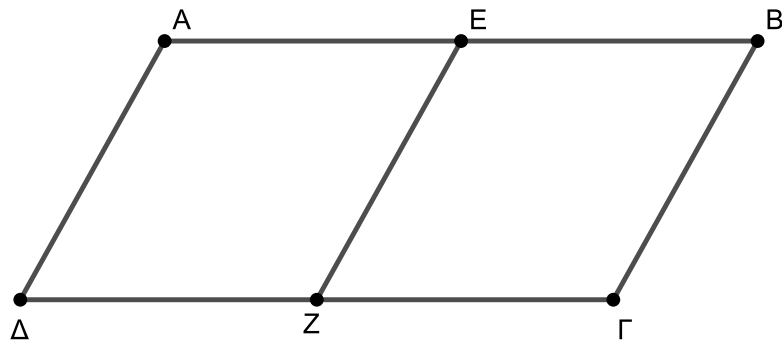
Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ η πλευρά AB είναι διπλάσια της πλευράς του $B\Gamma$. Αν E, Z τα μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα,

α) Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $AEZ\Delta$ και $BEZ\Gamma$ είναι ρόμβοι. (Μονάδες 16)

β) Τι είδους τετράπλευρο είναι το $AE\Gamma Z$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ



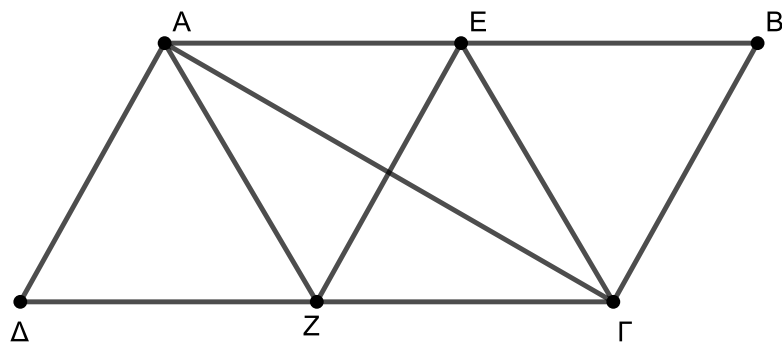
α) Τα τμήματα AB και ΓΔ είναι ίσα ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών τους αντίστοιχα, επομένως $AE=EB=ΓZ=ZΔ$. Επίσης $ΑΔ=ΒΓ$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ABΓΔ και επειδή $AB=2BΓ$ ή $\frac{AB}{2} = BΓ$ ισχύει τελικά ότι:

$$AE=EB=ΒΓ=ΓZ=ZΔ=ΑΔ \text{ (1).}$$

Το τετράπλευρο AEZΔ έχει τις απέναντι πλευρές του AE και ZΔ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον λόγω της σχέσης (1) δύο διαδοχικές πλευρές του AE και ΑΔ είναι ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

Ομοίως το τετράπλευρο BEZΓ έχει τις απέναντι πλευρές του BE και ZΓ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον λόγω της σχέσης (1) δύο διαδοχικές πλευρές του BE και BΓ είναι ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

β)



Το τετράπλευρο AEΓZ έχει τις απέναντι πλευρές του AE και ZΓ ίσες λόγω της σχέσης (1) και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

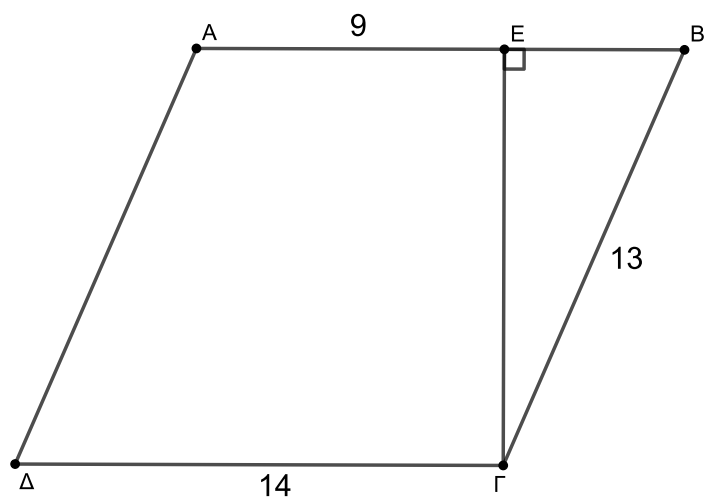
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $B\Gamma=13$ και $\Gamma\Delta=14$. Αν ΓE είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά AB και το τμήμα AE έχει μήκος 9, να αποδείξετε ότι:

α) Το μήκος του τμήματος ΓE είναι 12. (Μονάδες 10)

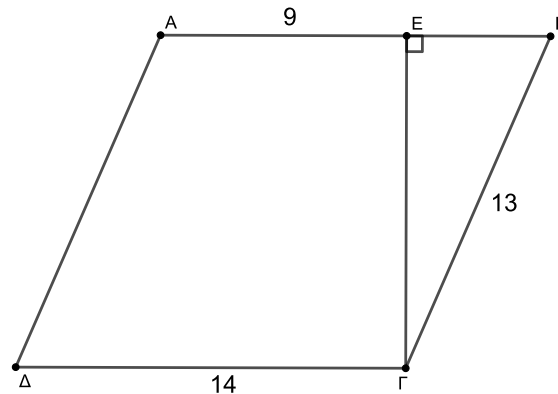
β) Τα μήκη των πλευρών $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ και $A\Gamma$ του τριγώνου $A\Delta\Gamma$ είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί.

(Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α)



$AB = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Για το μήκος BE έχουμε:

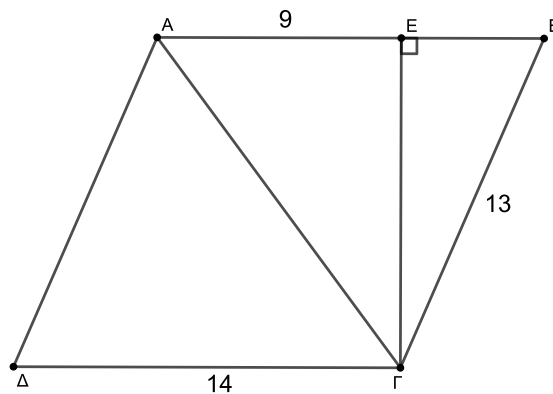
$$BE = AB - AE = 14 - 9 = 5.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓEB εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\Gamma E^2 = \Gamma B^2 - BE^2 \text{ ή } \Gamma E^2 = 13^2 - 5^2 \text{ ή } \Gamma E^2 = 169 - 25 \text{ ή } \Gamma E^2 = 144,$$

$$\text{άρα } \Gamma E = 12.$$

β)



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Gamma$ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα για την υποτείνουσά του

$A\Gamma$, έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AE^2 + \Gamma E^2 \text{ ή } A\Gamma^2 = 9^2 + 12^2 \text{ ή } A\Gamma^2 = 81 + 144 \text{ ή } A\Gamma^2 = 225,$$

$$\text{άρα } A\Gamma = 15.$$

Η πλευρά $A\Delta$ του τριγώνου $A\Delta\Gamma$ είναι ίση με την πλευρά $B\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, οπότε $A\Delta = 13$. Η πλευρά $\Delta\Gamma$ είναι ίση 14 από την υπόθεση και αποδείξαμε ότι $A\Gamma = 15$. Επομένως, τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $A\Delta\Gamma$ είναι οι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί 13, 14 και 15.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, τα σημεία Α, Β, Γ και Δ είναι σημεία του κύκλου με κέντρο το Ο. Η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου και η ευθεία ε εφαπτόμενή του στο σημείο του Δ.

Αν $\hat{\Gamma}_1 = 65^\circ$ και $\hat{\Delta}_1 = 35^\circ$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή.

(Μονάδες 05)

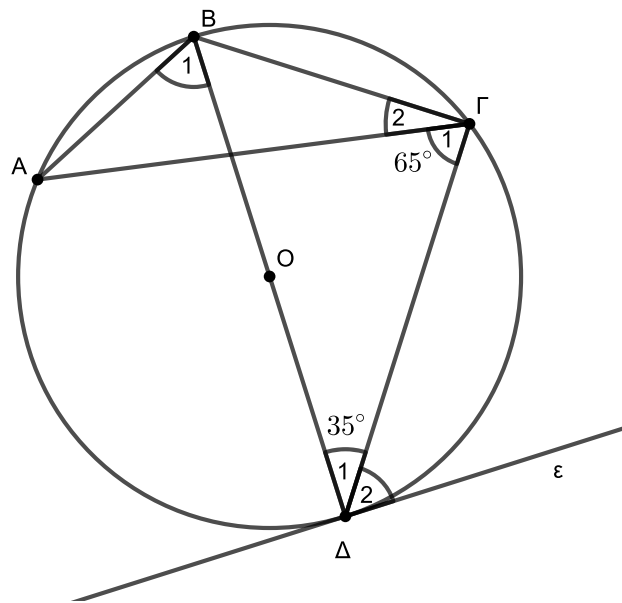
β)

i. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}_2$ και $\hat{\Delta}_2$.

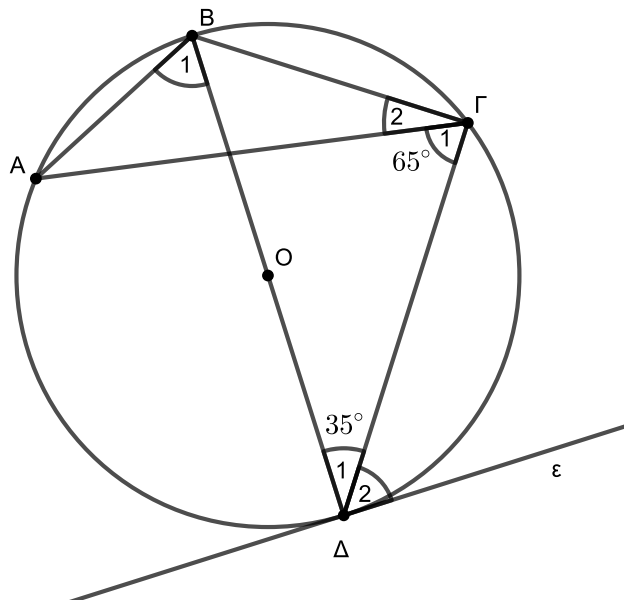
(Μονάδες 12)

ii. Να δικαιολογήσετε γιατί $\hat{B}_1 = 65^\circ$.

(Μονάδες 08)



ΛΥΣΗ



α) Η γωνία $\widehat{B\Gamma\Delta}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο, αφού η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου, επομένως $\widehat{B\Gamma\Delta} = 90^\circ$.

β)

i. Για τη γωνία $\widehat{\Gamma_2}$ έχουμε: $\widehat{\Gamma_2} = \widehat{B\Gamma\Delta} - \widehat{\Gamma_1} = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$.

Η γωνία $\widehat{O\Delta\epsilon}$ είναι ορθή γιατί η ακτίνα OD είναι κάθετη στην εφαπτομένη ευθεία ϵ στο σημείο επαφής Δ . Άρα $\widehat{\Delta_2} = \widehat{O\Delta\epsilon} - \widehat{\Delta_1} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

ii. Οι γωνίες $\widehat{B_1}$ και $\widehat{\Gamma_1}$ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο AD , οπότε είναι ίσες. Άρα $\widehat{B_1} = \widehat{\Gamma_1} = 65^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος δίνεται ότι, $A\Gamma=10$ και $B\Gamma=8$. Το τμήμα ΓE είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά AB με $\Gamma E=6$.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

Το τμήμα AE ονομάζεται προβολή της πλευράς στην πλευρά

Το τμήμα είναι η προβολή της πλευράς $B\Gamma$ στην πλευρά

(Μονάδες 08)

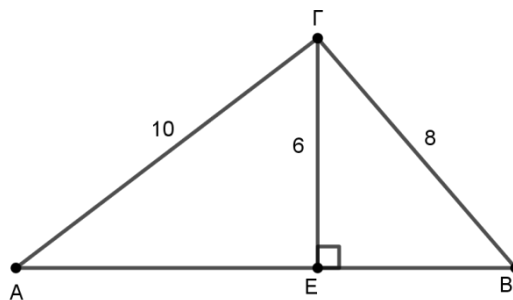
β)

i. Να υπολογίσετε το τμήμα AE .

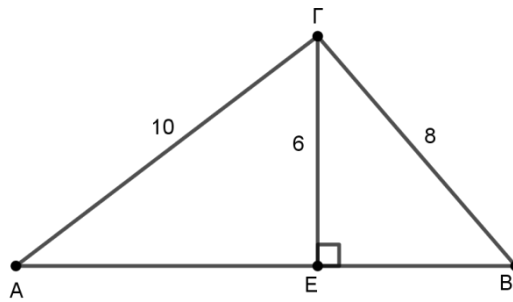
(Μονάδες 08)

ii. Να βρείτε το μήκος της πλευράς AB .

(Μονάδες 09)



ΛΥΣΗ



α) Το τμήμα ΑΕ ονομάζεται προβολή της πλευράς **ΑΓ** στην πλευρά **ΑΒ**.

Το τμήμα **ΒΕ** είναι η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά **ΑΒ**.

β)

i. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε:

$$ΑΕ^2 = ΑΓ^2 - ΓΕ^2 \text{ ή } ΑΕ^2 = 10^2 - 6^2 \text{ ή } ΑΕ^2 = 100 - 36, \text{ δηλαδή } ΑΕ^2 = 64, \text{ άρα } ΑΕ = 8.$$

ii. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΕΒ έχουμε:

$$ΒΕ^2 = ΒΓ^2 - ΓΕ^2 \text{ ή } ΒΕ^2 = 8^2 - 6^2 \text{ ή } ΒΕ^2 = 64 - 36 \text{ ή } ΒΕ^2 = 28, \text{ δηλαδή } ΒΕ = \sqrt{4 \cdot 7}, \text{ άρα } ΒΕ = 2\sqrt{7}.$$

$$\text{Για την πλευρά ΑΒ έχουμε: } ΑΒ = ΑΕ + ΕΒ = 8 + 2\sqrt{7}.$$

ΘΕΜΑ 2

Οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ ενός κύκλου τέμνονται στο σημείο E , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

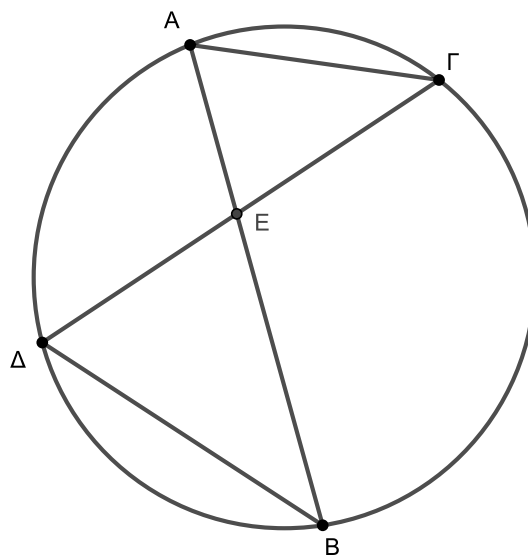
α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AE\Gamma$ και ΔEB είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β)

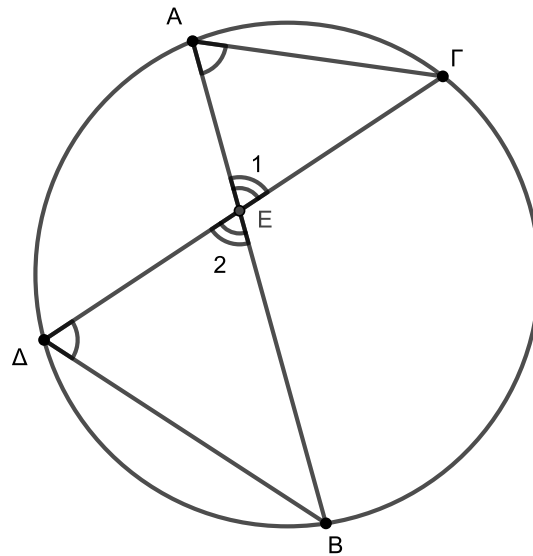
i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 09)

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

(Μονάδες 06)



ΛΥΣΗ



α) Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΓ, άρα $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Οι γωνίες $\hat{E}_1$ και $\hat{E}_2$ είναι ίσες ως κατακορυφήν γωνίες. Άρα τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΔΕΒ έχουν δύο γωνίες ίσες, άρα είναι όμοια.

β)

- i. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους.

Δηλαδή οι πλευρές ΕΓ και ΕΒ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$. Οι πλευρές ΑΓ και ΔΒ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{E}_1$ και $\hat{E}_2$. Τέλος οι πλευρές ΑΕ και ΔΕ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\text{Β}}$.

- ii. Οι ίσοι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{ΕΓ}{ΕΒ} = \frac{ΑΓ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΔΕ}$.

ΘΕΜΑ 2

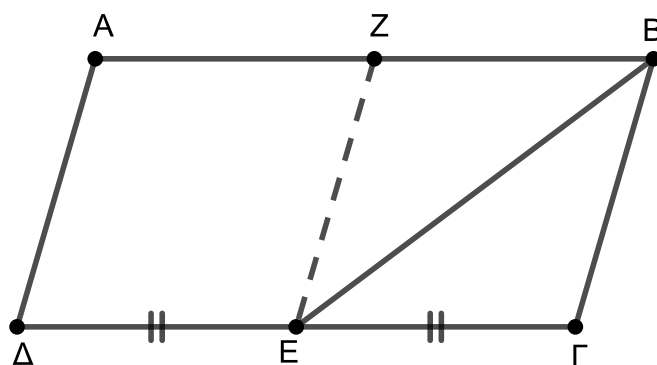
Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB=2B\Gamma$ και E είναι το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τμήμα BE διχοτομεί τη γωνία $\widehat{B}$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

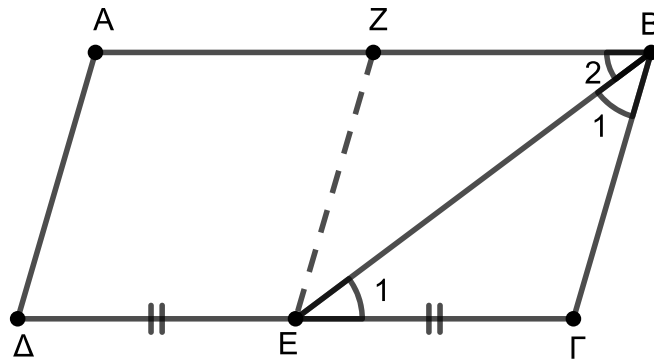
(Μονάδες 12)

β) Αν το σημείο Z είναι το μέσο της πλευράς AB , τι είδους τετράπλευρο είναι το $ZB\Gamma E$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) Οι πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Επειδή το E είναι το μέσο της $\Gamma\Delta$, έχουμε $GE=ED=\frac{\Gamma\Delta}{2}=\frac{AB}{2}=BG$. Άρα το τρίγωνο BGE είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά BE . Οπότε οι γωνίες της βάσης του θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$. Όμως $\hat{E}_1 = \hat{B}_2$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και $\Gamma\Delta$ όταν τέμνονται από τη BE . Συνεπώς $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, δηλαδή η BE διχοτομεί τη γωνία $\hat{B}$ του παραλληλογράμμου.

β) Το σημείο Z είναι το μέσο της πλευράς AB , άρα $ZB=\frac{AB}{2}=BG=GE$. Επιπλέον $ZB \parallel EG$ ως τμήματα στις απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Άρα το τετράπλευρο $ZBGE$ έχει τις απέναντι πλευρές του ZB και GE ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Όμως η διαγώνιος BE διχοτομεί τη γωνία του $\hat{B}$, οπότε είναι τελικά ρόμβος.

ΘΕΜΑ 4

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ η πλευρά AB είναι διπλάσια της πλευράς του $B\Gamma$. Αν E, Z τα μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα,

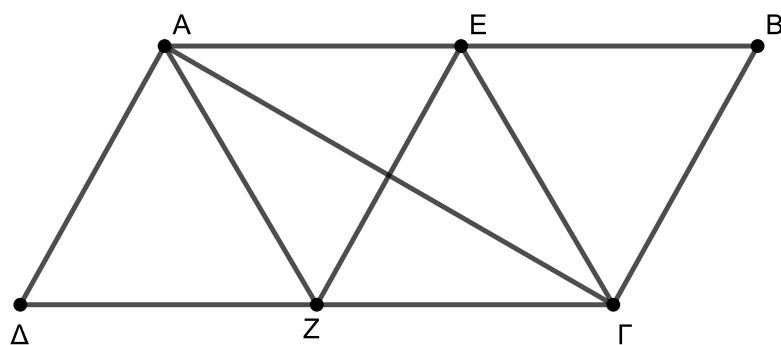
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα $AEZ\Delta$ και $BEZ\Gamma$ είναι ρόμβοι. (Μονάδες 12)

ii. Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 07)

β) Πόσων μοιρών πρέπει να είναι η γωνία $\widehat{B}$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, ώστε το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ρόμβος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 06)

ΛΥΣΗ



α)

- i. Τα τμήματα AB και ΓΔ είναι ίσα ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών τους αντίστοιχα, επομένως $AE=EB=ΓZ=ZΔ$. Επίσης $AD=BG$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ABΓΔ και επειδή $AB=2BG$ ή $\frac{AB}{2} = BG$ ισχύει τελικά ότι $AE=EB=BG=ΓZ=ZΔ=AD$ (1).

Το τετράπλευρο AEZΔ έχει τις απέναντι πλευρές του AE και ZΔ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον λόγω της σχέσης (1) δύο διαδοχικές πλευρές του AE και AD είναι ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

Ομοίως το τετράπλευρο BEZΓ έχει τις απέναντι πλευρές του BE και ZΓ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον λόγω της σχέσης (1) δύο διαδοχικές πλευρές του BE και BG είναι ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

- ii. Το τετράπλευρο AEGZ έχει τις απέναντι πλευρές του AE και ZΓ ίσες λόγω της σχέσης (1) και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Στο α) ii. ερώτημα το τετράπλευρο AEGZ είναι παραλληλόγραμμο. Αν επιπλέον είναι ρόμβος, τότε όλες οι πλευρές του είναι ίσες. Δηλαδή $AE = EG = ΓZ = ZA$. Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι $AE = \frac{AB}{2} = EB = BG$, από το α)i. ερώτημα ότι $BG = ΓZ$ και $ΓZ = EG$, δηλαδή το τρίγωνο BEΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως οι γωνίες του είναι όλες 60° , άρα η γωνία $\widehat{B}$ του παραλληλογράμμου ABΓΔ πρέπει να είναι 60° .

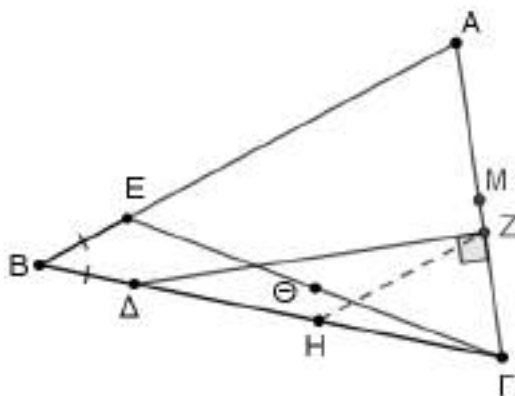
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ και E στις πλευρές $B\Gamma$ και BA αντίστοιχα, ώστε $B\Delta = BE$. Φέρνουμε την ΔZ κάθετη στην $A\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα H , Θ , M των $\Delta\Gamma$, $E\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

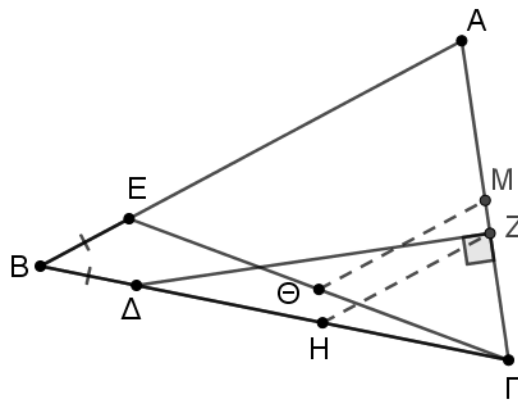
α) $ZH = \frac{\Delta\Gamma}{2}$. (Μονάδες 09)

β) $M\Theta = \frac{AE}{2}$. (Μονάδες 09)

γ) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του, ώστε $ZH = M\Theta$; (Μονάδες 07)



ΛΥΣΗ



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\text{H}$ η διάμεσος ZH που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $\Delta\Gamma$ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή:

$$Z_H = \frac{\Delta \Gamma}{2} \quad (1)$$

β) Στο τρίγωνο ΑΕΓ, το σημείο Μ είναι μέσο της πλευράς ΑΓ και το σημείο Θ είναι μέσο της πλευράς ΓΕ, οπότε το τμήμα ΜΘ που τα ενώνει θα είναι ίσο μισό της τρίτης πλευράς ΑΕ, δηλαδή :

$$M\Theta = \frac{AE}{2} \quad (2)$$

γ) Θέλουμε $ZH = MO$. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AE}{2}$, άρα $\Delta\Gamma = AE$.

Από υπόθεση έχουμε $BD = BE$. Προσθέτουμε αυτές τις σχέσεις κατά μέλη και έχουμε $ΔΓ + BD = AE + BE$, άρα $BF = AB$. Επομένως το τρίγωνο ABF είναι ισοσκελές, με βάση AB .

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$). Έστω K, Λ, M τα μέσα των πλευρών $A\Gamma, AB, B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

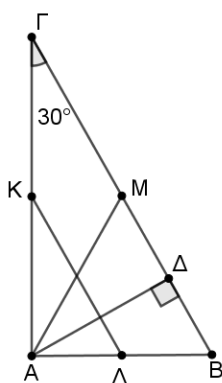
i. $K\Lambda = AM$. (Μονάδες 09)

ii. Το $AKM\Lambda$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 09)

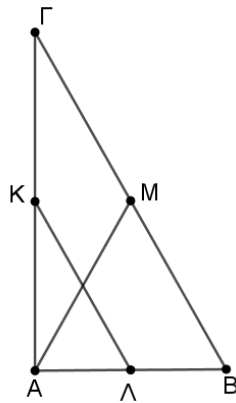
β) Έστω $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$ και $A\Delta$ ύψος του τριγώνου. Προεκτείνουμε το $A\Delta$ κατά ίσο τμήμα ΔZ .

Τι είδους τετράπλευρο είναι το $AMZB$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)



ΛΥΣΗ



α)

- i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα ισούται με το μισό της, δηλαδή:

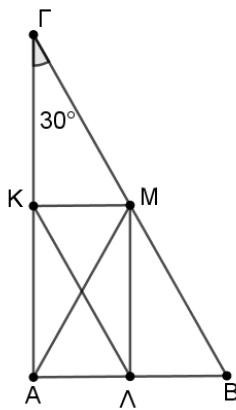
$$AM = \frac{BG}{2} \quad (1)$$

Το σημείο K είναι μέσο της πλευράς AG και το σημείο Λ μέσο της πλευράς AB, οπότε το τμήμα KΛ θα ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς BG, δηλαδή:

$$KΛ = \frac{BG}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι $KΛ = AM$.

ii.



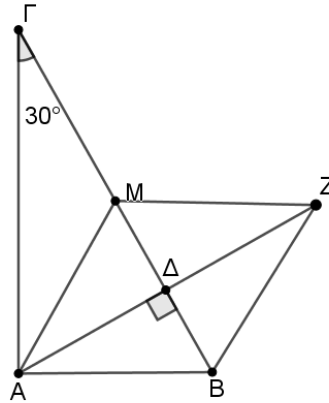
Το σημείο K είναι μέσο της πλευράς AG και το σημείο M μέσο της πλευράς BG, οπότε το τμήμα KM θα ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς AB και θα είναι παράλληλο σε αυτήν, δηλαδή:

$$KM = \frac{AB}{2} = AΛ$$

Επομένως το τετράπλευρο AKML είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι

πλευρές του ίσες και παράλληλες, $KM \parallel AL$. Στο ερώτημα α) αποδείξαμε ότι $KL = AM$. Επομένως το παραλληλόγραμμο $AKML$ είναι ορθογώνιο γιατί έχει τις διαγωνιές του ίσες.

β)



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά AB θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας $B\Gamma$, δηλαδή:

$$AB = \frac{B\Gamma}{2} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε ότι $AM = AB = BM$, δηλαδή το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο, οπότε το ύψος του $A\Delta$ θα είναι και διάμεσος, δηλαδή $M\Delta = \Delta B$. Από υπόθεση έχουμε ότι $A\Delta = \Delta Z$. Επομένως, το τετράπλευρο $AMZB$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγωνιοί του MB και AZ διχοτομούνται. Επειδή όπως αναφέραμε, $AM = AB$, το παραλληλόγραμμο $AMZB$ είναι ρόμβος γιατί δύο διαδοχικές του πλευρές είναι ίσες.

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι τραπέζιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $A\Delta = 12$, $\Delta\Gamma = 11$, $B\Gamma = 13$ και GE το ύψος του.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

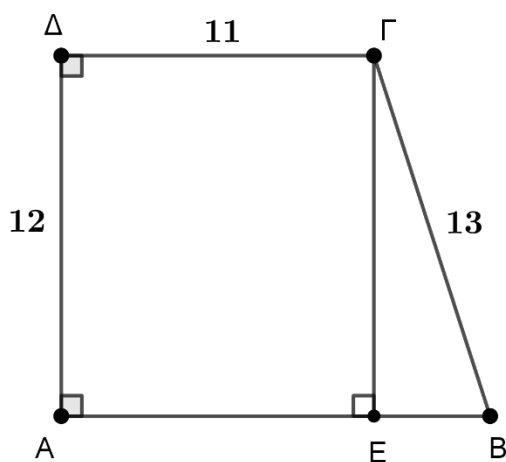
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $EB = 5$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου.

(Μονάδες 7)

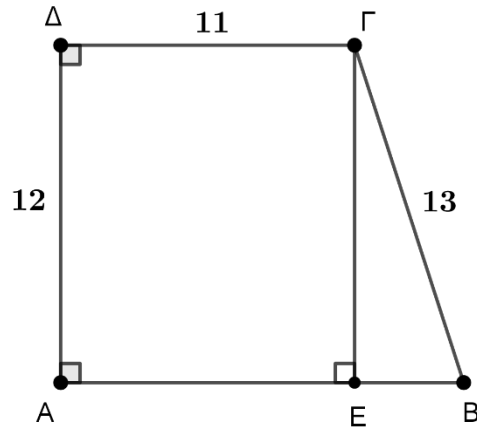


ΛΥΣΗ

α) Το ΓΕ είναι ύψος του τραπεζίου, άρα $\hat{\Gamma}\hat{E}\hat{A} = 90^\circ$. Στο τετράπλευρο ΑΔΓΕ είναι

$$\hat{A} = \hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{E}\hat{A} = 90^\circ$$

δηλαδή έχει τρεις γωνίες ορθές, συνεπώς είναι ορθογώνιο.



β) Επειδή το τετράπλευρο ΑΔΓΕ είναι ορθογώνιο έχουμε ότι $\Gamma E = \Delta \Delta = 12$, $AE = \Gamma \Delta = 11$ και το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ορθογώνιο στο Ε, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$B\Gamma^2 = \Gamma E^2 + E\Gamma^2 \text{ ή } 13^2 = 12^2 + E\Gamma^2 \text{ ή } 169 = 144 + E\Gamma^2 \text{ άρα } E\Gamma^2 = 169 - 144 = 25$$

άρα

$$E\Gamma = \sqrt{25} = 5$$

γ) Η πλευρά ΑΒ του τραπεζίου είναι $AB = AE + E\Gamma = 11 + 5 = 16$, άρα η περίμετρος του Τ θα είναι:

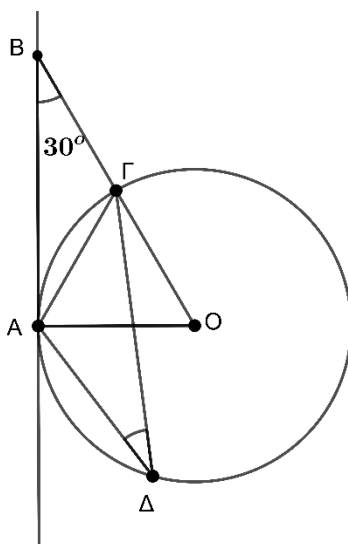
$$T = AB + B\Gamma + \Gamma \Delta + \Delta A = 16 + 13 + 11 + 12 = 52$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία AB είναι εφαπτομένη σε σημείο A κύκλου κέντρου O, η γωνία $\widehat{B}$ είναι 30° και η γωνία $\widehat{A\Delta\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο AG.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{AOB} = 60^\circ$. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή η εφαπτομένη AB του κύκλου στο σημείο του A είναι κάθετη στην ακτίνα του OA το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο στο A. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB οι οξείες γωνίες του $\hat{B}$ και $\hat{A\hat{O}B}$ είναι συμπληρωματικές, άρα

$$\hat{B} + \hat{A\hat{O}B} = 90^\circ \quad \text{ή} \quad 30^\circ + \hat{A\hat{O}B} = 90^\circ \quad \text{ή} \quad \hat{A\hat{O}B} = 60^\circ$$

β) Η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{A\hat{D}\hat{G}}$ και η επίκεντρη γωνία $\hat{A\hat{O}G}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{AG}$. Επειδή κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο, έχουμε:

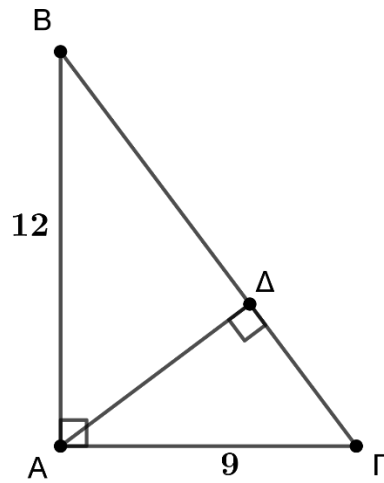
$$\hat{A\hat{D}\hat{G}} = \frac{1}{2} \cdot \hat{A\hat{O}B} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές $AB = 12$ και $A\Gamma = 9$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 15$. (Μονάδες 12)

β) Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $\Delta\Gamma$. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$$

άρα

$$ΒΓ = \sqrt{225} = 15.$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα, επομένως για την κάθετη πλευρά ΑΓ έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΔΓ \quad \text{ή} \quad 9^2 = 15 \cdot ΔΓ \quad \text{ή} \quad 81 = 15 \cdot ΔΓ \quad \text{ή} \quad ΔΓ = \frac{81}{15} = 5,4$$

ΘΕΜΑ 2

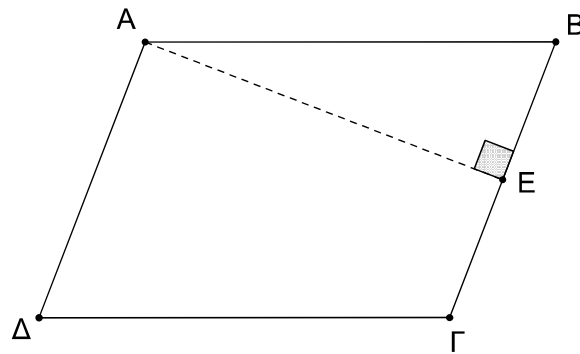
Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, E είναι το μέσο της πλευράς του $B\Gamma$ και η AE είναι κάθετη στην $B\Gamma$. Αν $AB = 13$ και $BE = 5$, να βρείτε το μήκος:

α) της πλευράς $A\Delta$ του παραλληλογράμμου.

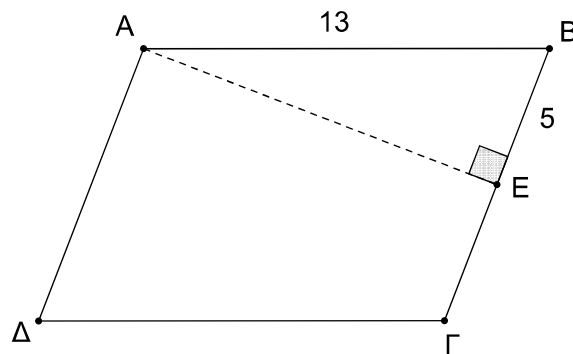
(Μονάδες 12)

β) του ευθύγραμμου τμήματος AE .

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) Το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς BΓ και $BE = 5$, επομένως

$$B\Gamma = 2BE = 2 \cdot 5 = 10.$$

Οι απέναντι πλευρές AΔ, BΓ του παραλληλογράμμου ABΓΔ είναι ίσες, άρα $A\Delta = 10$.

β) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE. Είναι

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 \text{ ή } AE^2 = 13^2 - 5^2 \text{ ή } AE^2 = 144 \text{ ή } AE = 12.$$

ΘΕΜΑ 2

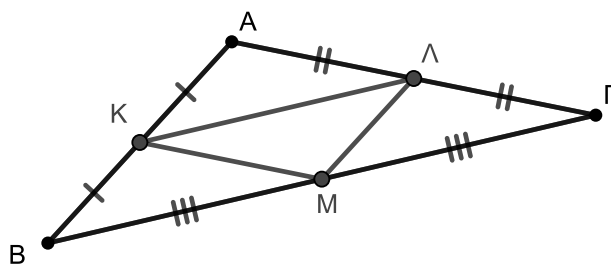
Οι πλευρές AB , AG και BG του τριγώνου ABG έχουν μήκη 6, 8 και 12 αντίστοιχα. Τα σημεία K , L και M είναι τα μέσα των πλευρών AB , AG και BG με τη σειρά που δίνονται.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $KLGM$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του παραλληλογράμμου $KLGM$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, οπότε το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο στη ΒΓ και ίσο με $\frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $K\Lambda \parallel M\Gamma$ και $K\Lambda = \frac{12}{2} = 6$.

Επιπλέον το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ, οπότε $M\Gamma = 6$.

Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Οι απέναντι πλευρές ΚΜ και ΛΓ του παραλληλογράμμου ΚΛΓΜ είναι ίσες, οπότε $KM = \Lambda\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} = 4$. Από α) ερώτημα $K\Lambda = M\Gamma = 6$. Οπότε η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΚΛΓΜ είναι ίση με : $K\Lambda + \Lambda\Gamma + \Gamma M + MK = 6 + 4 + 6 + 4 = 20$.

ΘΕΜΑ 2

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία κάθετη πλευρά του είναι μεγαλύτερη από την άλλη κατά 3 cm. Αν οι δύο κάθετες πλευρές έχουν άθροισμα 21 cm, τότε :

- α) Να δείξετε ότι οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη 9 cm και 12 cm. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Το άθροισμα των κάθετων πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου είναι 21 cm και επειδή η μία κάθετη πλευρά του είναι 3 cm μεγαλύτερη από την άλλη, αν αφαιρέσω 3 από το άθροισμά τους και διαιρέσω με το 2 θα προκύψει το διπλάσιο της μικρής.

Έτσι η μικρή κάθετη θα είναι ίση με $\frac{21-3}{2} = 9$ cm. Οπότε η μεγαλύτερη κάθετη πλευρά είναι $9 + 3 = 12$ cm.

β) Αν x είναι το μήκος της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε: $x^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$. Οπότε $x = \sqrt{225} = 15$.

ΘΕΜΑ 2

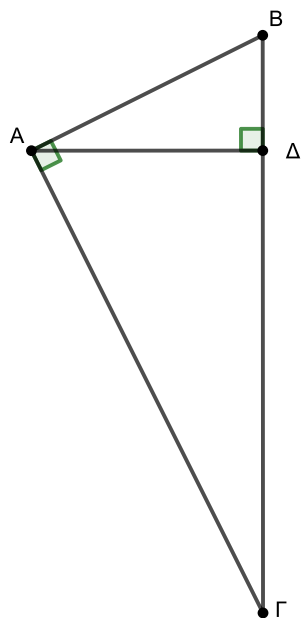
Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ οι προβολές ΔB και $\Delta \Gamma$ των κάθετων πλευρών AB και $A\Gamma$ στην υποτείνουσα $B\Gamma$ έχουν μήκη 3 cm και 12 cm αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του ύψους $A\Delta$ προς την υποτείνουσα $B\Gamma$ είναι 6.

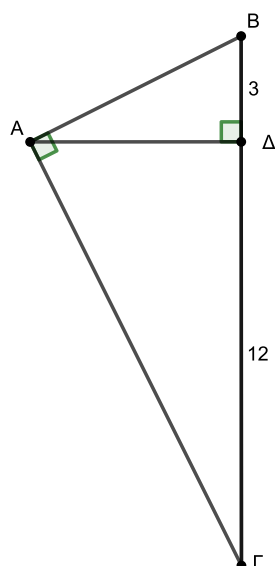
(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου.

(Μονάδες 16)



ΛΥΣΗ



α) Αν AD είναι το ύψος του τριγώνου προς την υποτείνουσα $BΓ$, τότε $ΔB$, $ΔΓ$ είναι οι προβολές των κάθετων πλευρών AB και $AΓ$ αντίστοιχα προς την υποτείνουσα $BΓ$. Ισχύει ότι $AD^2 = ΔB \cdot ΔΓ$ ή $AD^2 = 3 \cdot 12 = 36$ ή $AD = 6$.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AΔB$ έχουμε:
 $AB^2 = AD^2 + BΔ^2$ ή $AB^2 = 6^2 + 3^2 = 45$ ή $AB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Όμοια από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AΔΓ$ έχουμε:
 $AΓ^2 = AD^2 + ΓΔ^2$ ή $AΓ^2 = 6^2 + 12^2 = 180$ ή $AΓ = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$.

ΘΕΜΑ 2

Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει περίμετρο 28. Τα σημεία K, Λ και M είναι τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

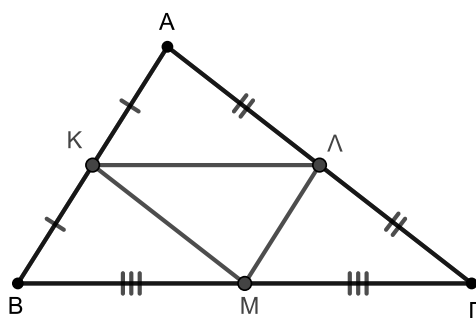
α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $K\Lambda M$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο ABΓ τα σημεία K, Λ είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, οπότε $KΛ \parallel BΓ$ και $KΛ = \frac{BΓ}{2}$ (1).

Επιπλέον το σημείο M είναι το μέσο της BΓ, οπότε $MΓ = \frac{BΓ}{2}$.

Το τετράπλευρο KΛΜΓ έχει τις πλευρές του KΛ και MΓ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Στο τρίγωνο ABΓ τα σημεία K και M είναι τα μέσα των πλευρών AB και BΓ αντίστοιχα, οπότε $KM \parallel AΓ$ και $KM = \frac{AΓ}{2}$ (2).

Αντίστοιχα, τα σημεία Λ και M είναι τα μέσα των πλευρών AG και BΓ, οπότε $ΛΜ \parallel AB$ και $ΛΜ = \frac{AB}{2}$ (3).

Η περίμετρος του τριγώνου KΛΜ είναι ίση με $\Pi = KΛ + ΛΜ + ΜΚ$ και από τις σχέσεις

$$(1), (2) \text{ και } (3) \quad \Pi = \frac{BΓ}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{AΓ}{2} = \frac{BΓ + AB + AΓ}{2} = \frac{28}{2} = 14.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα K, Λ και M των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο.

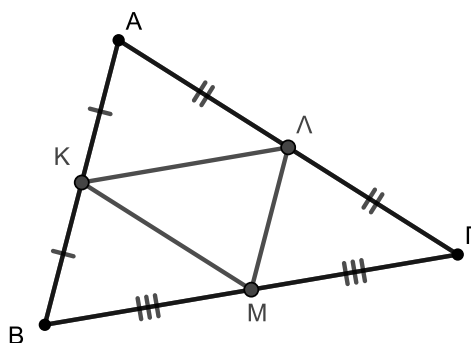
(Μονάδες 9)

β) Να γράψετε όλα τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται με κορυφές 4 από τα σημεία A, B, Γ, K, Λ και M .

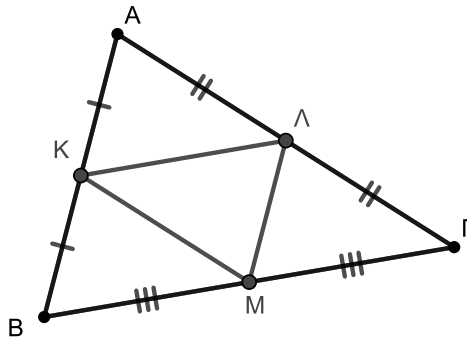
(Μονάδες 9)

γ) Αν επιπλέον δίνεται ότι το τετράπλευρο $AKM\Lambda$ είναι ρόμβος να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

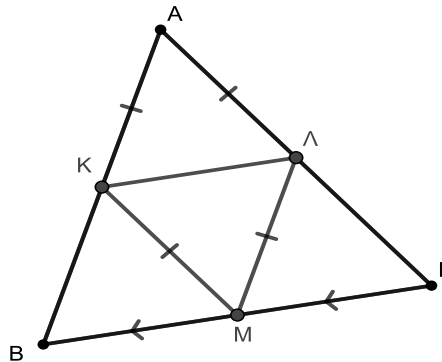


α) Στο τρίγωνο ABΓ τα σημεία K, Λ είναι τα μέσα των πλευρών AB και AΓ αντίστοιχα, οπότε το τμήμα KΛ είναι παράλληλο στη BΓ και ίσο με $\frac{B\Gamma}{2}$. Επιπλέον το σημείο M

είναι το μέσο της BΓ, οπότε $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$. Το τετράπλευρο KΛΓM έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι το τετράπλευρο KΛΓM είναι παραλληλόγραμμο. Σχηματίζονται επίσης τα παραλληλόγραμμα AKML και KΛMB.

γ)



Αν το τετράπλευρο AKML είναι ρόμβος τότε όλες οι πλευρές του είναι ίσες. Δηλαδή

$AK = KM = \Lambda M = A\Lambda$. Ισχύει ότι $AK = \frac{AB}{2}$ και $A\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$ και επειδή

$AK = A\Lambda$ θα έχουμε $\frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$ ή $AB = A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με

$AB = A\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα K, Λ και M των πλευρών AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $K\Lambda MB$ είναι παραλληλόγραμμο.

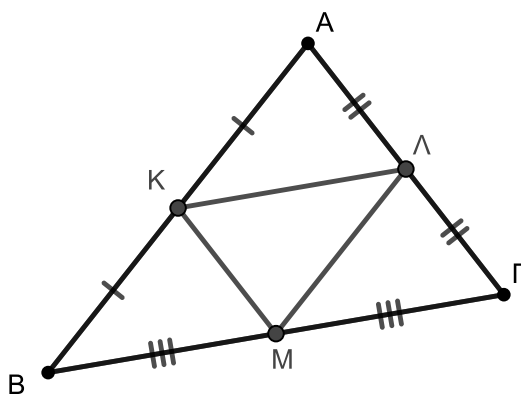
(Μονάδες 9)

β) Να γράψετε όλα τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται με κορυφές τέσσερα από τα σημεία A, B, Γ, K, Λ και M .

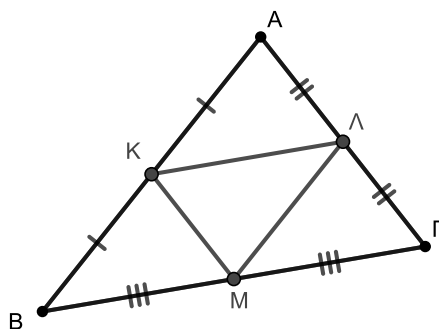
(Μονάδες 9)

γ) Αν επιπλέον δίνεται ότι το τετράπλευρο $AKML$ είναι ορθογώνιο να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις γωνίες του. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ



- α) Στο τρίγωνο ABΓ τα σημεία K, Λ είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, οπότε το τμήμα KΛ είναι παράλληλο στη BG και ίσο με $\frac{BG}{2}$. Επιπλέον το σημείο M είναι το μέσο της BG, οπότε $MB = \frac{BG}{2}$. Άρα $KΛ \parallel MB$ και $KΛ = MB$. Το τετράπλευρο KΛMB έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι το τετράπλευρο KΛMB είναι παραλληλόγραμμο. Σχηματίζονται επίσης τα παραλληλόγραμμα AKML και KΛΓM.
- γ) Αν το τετράπλευρο AKML είναι ορθογώνιο, τότε όλες οι γωνίες του είναι ορθές. Οπότε $\hat{A} = 90^\circ$. Το τρίγωνο ABΓ έχει τη γωνία του $\hat{A}$ ορθή, άρα είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα K, Λ και M των πλευρών $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

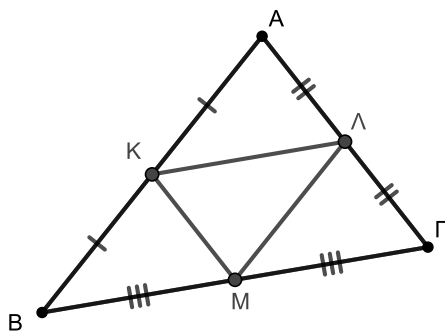
α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $AKM\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

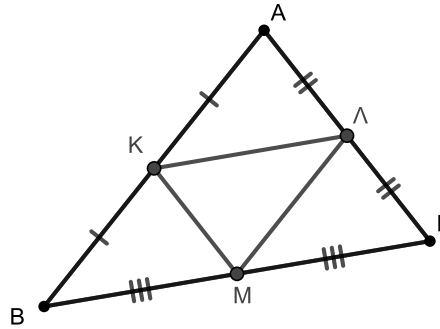
β) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$:

- i. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AKM\Lambda$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)
- ii. Ποιό πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε το τετράπλευρο $AKM\Lambda$ να είναι τετράγωνο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

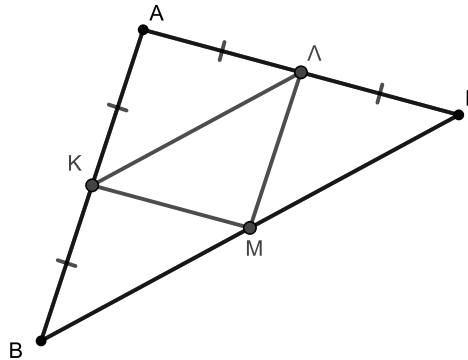


ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο ABΓ τα σημεία M, Λ είναι τα μέσα των πλευρών BG και AG αντίστοιχα, οπότε το τμήμα MΛ είναι παράλληλο στη AB και ίσο με $\frac{AB}{2}$. Επιπλέον επειδή το σημείο K είναι το μέσο της AB, οπότε $AK = \frac{AB}{2}$. Άρα $MΛ \parallel AK$ και $MΛ = AK$. Το τετράπλευρο AKML έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αν το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$, τότε :



- i. Ισχύει $MΛ = \frac{AB}{2} = \frac{AG}{2} = AL$, αφού το Λ είναι το μέσο της AG. Το παραλληλόγραμμο AKML έχει δυο διαδοχικές πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.
- ii. Όπως αποδείξαμε στο βi) το τετράπλευρο AKML είναι ρόμβος. Για να είναι το AKML τετράγωνο, θα πρέπει να είναι και ορθογώνιο, δηλαδή να έχει τις γωνίες του ορθές. Άρα θέλουμε να ισχύει $\hat{A} = 90^\circ$. Οπότε για να είναι το τετράπλευρο AKML τετράγωνο πρέπει το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB = AG$.

ΘΕΜΑ 4

Σε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 12, AD είναι το ύψος του και E, Z τα μέσα των πλευρών του AB και AG αντίστοιχα. Αν το τμήμα EH είναι κάθετο στην πλευρά $BΓ$, με H σημείο της $BΓ$, τότε :

α) Να αποδείξετε ότι :

- i. $EZ // HD$
- ii. $EZ = 6$ και $HD = 3$.

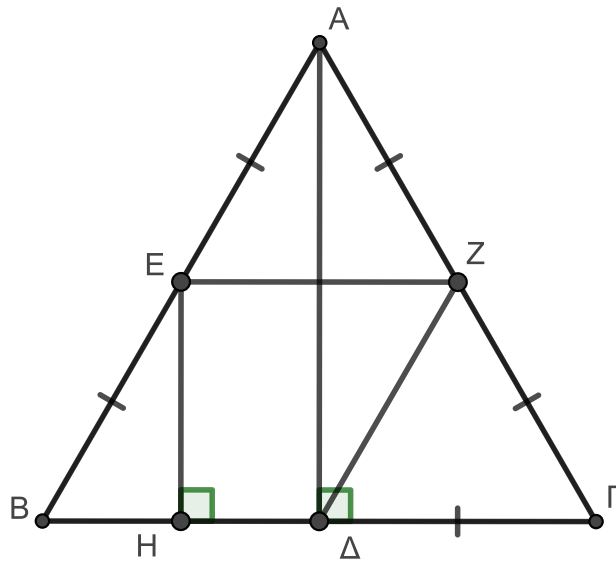
(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $EZDH$ είναι παραλληλόγραμμο και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

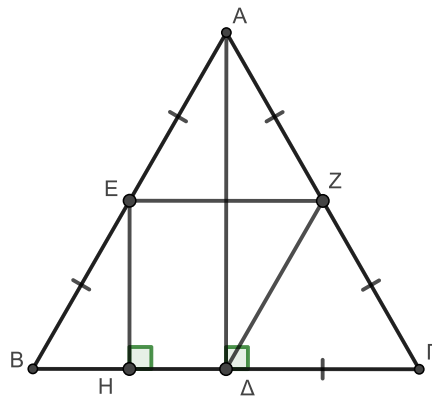
(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZDH$ είναι τραπέζιο, του οποίου η βάση του EZ είναι ίση με τη μία από τις μη παράλληλες πλευρές του τη DZ .

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ



α)

i. Το τμήμα EZ ενώνει τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου, άρα $EZ \parallel BG$, οπότε και $EZ \parallel HD$.

ii. Το τμήμα EZ ενώνει τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου, οπότε $EZ = \frac{BG}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Το AD είναι ύψος του ισόπλευρου τριγώνου προς την πλευρά BG, άρα είναι και διάμεσος. Οπότε $BD = DG = 6$. Επιπλέον, $EH \perp BG$ και $AD \perp BG$, άρα $EH \parallel AD$, ως κάθετες στη ίδια ευθεία BG σε διαφορετικά σημεία της.

Στο τρίγωνο ABD το E είναι το μέσο της πλευράς AB και $EH \parallel AD$, άρα το H είναι το μέσο της πλευράς BD. Οπότε $HD = HB = \frac{BD}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

β) Στο τετράπλευρο EZDH οι δύο απέναντι πλευρές του, οι EZ και DH, είναι παράλληλες. Θα εξετάσουμε αν είναι παράλληλες και οι πλευρές EH και DZ. Έχουμε $EH \parallel AD$ (από ερώτημα αii). Η ευθεία DZ που είναι διαφορετική από την AD δεν μπορεί να είναι παράλληλη στην EH, γιατί από το σημείο Δ μόνο μια ευθεία παράλληλη προς την EH μπορούμε να φέρουμε. Έχουμε ήδη $AD \parallel EH$, οπότε η DZ δεν είναι παράλληλη στην EH. Το τετράπλευρο EZDH έχει μόνο ένα ζευγάρι παράλληλων πλευρών, άρα δεν είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Όπως αποδείχθηκε στο β) ερώτημα το τετράπλευρο EZDH έχει ένα ζευγάρι απέναντι πλευρών του παράλληλες και ένα ζευγάρι μη παράλληλες, οπότε το τετράπλευρο EZDE είναι τραπέζιο. Από το ερώτημα αii) έχουμε $EZ = \frac{BG}{2} = 6$.

Για το τμήμα DZ έχουμε ότι $DZ = \frac{AG}{2} = 6$, ως διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου προς την υποτείνουσα.

Άρα στο τραπέζιο EZDH ισχύει $EZ = DZ = 6$.

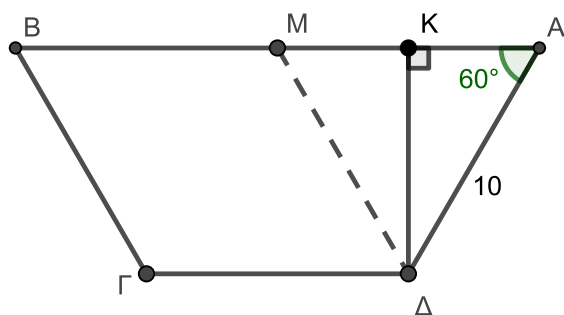
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές και η μεγάλη βάση του AB είναι διπλάσια από την πλευρά $A\Delta$. Επιπλέον η γωνία A είναι 60° και η πλευρά $A\Delta$ είναι 10 cm .

α) Να υπολογίσετε το ύψος ΔK του τραpezίου. (Μονάδες 10)

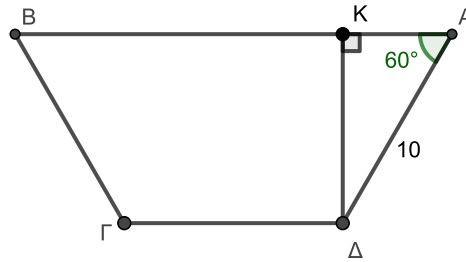
β) Αν M είναι το μέσο της AB να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο ΔMA είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 05)
- ii. Το τετράπλευρο $\Delta MB\Gamma$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

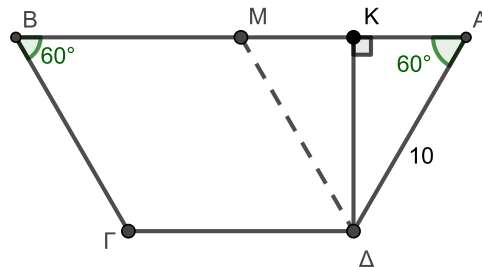
α)



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΚΑ η μία οξεία γωνία του είναι 60° , άρα $\widehat{ΑΔΚ} = 30^\circ$, οπότε η κάθετη πλευρά που είναι απέναντι από τη γωνία των 30° θα είναι μισή από την υποτείνουσα. Δηλαδή $ΚΑ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΚΑ έχουμε :

$$ΔΚ^2 = ΑΔ^2 - ΑΚ^2 \text{ ή } ΔΚ^2 = 10^2 - 5^2 \text{ ή } ΔΚ^2 = 100 - 25 = 75 \text{ ή } ΔΚ = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

β)



- i. Έστω Μ το μέσο της βάσης ΑΒ, τότε $ΑΜ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{2 ΑΔ}{2} = ΑΔ = 10$. Το τρίγωνο ΔΜΑ είναι ισοσκελές με γωνία της κορυφής $\widehat{Α} = 60^\circ$, άρα το τρίγωνο ΔΜΑ είναι ισόπλευρο με $ΔΜ = 10$ και $\widehat{ΔΜΑ} = 60^\circ$.
- ii. Στο τετράπλευρο ΔΜΒΓ οι πλευρές ΔΜ και ΒΓ είναι ίσες αφού $ΒΓ = ΑΔ = 10$ (ισοσκελές τραπέζιο) και $ΔΜ = 10$. Επιπλέον $\widehat{Β} = \widehat{Α} = 60^\circ$ (ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς τραπεζίου) και $\widehat{ΔΜΑ} = 60^\circ$ (από ερώτημα αi), οπότε $ΔΜ \parallel ΒΓ$ αφού σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες όταν τέμνονται από την ΒΜ. Δηλαδή $ΔΜ \parallel ΒΓ$ και $ΔΜ = ΒΓ$ οπότε το τετράπλευρο ΔΜΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον $ΔΜ = ΜΒ = 10$, οπότε το παραλληλόγραμμο ΔΜΒΓ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

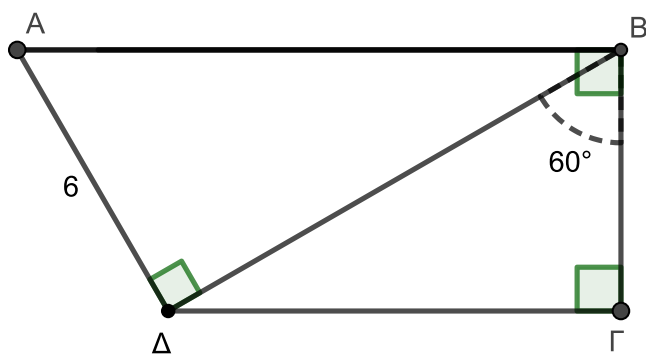
ΘΕΜΑ 4

Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος με $AB \parallel \Gamma\Delta$, είναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$. Η πλευρά AD είναι 6 και η διαγώνιος BD είναι κάθετη στην πλευρά AD και σχηματίζει με την πλευρά $B\Gamma$ γωνία $\widehat{\Delta B \Gamma} = 60^\circ$.

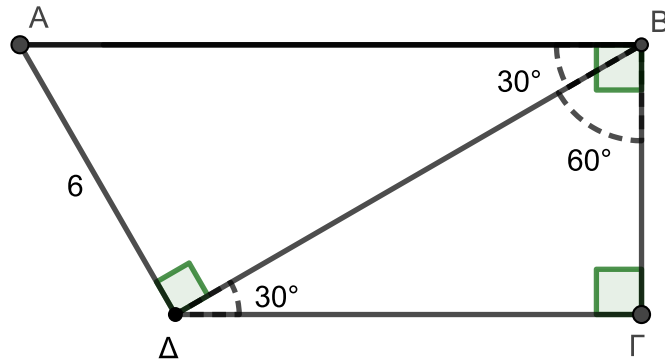
α) Να αποδείξετε ότι η βάση AB του τραpezίου είναι 12. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη διαγώνιο BD . (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ είναι $27 + 3\sqrt{3}$. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ



α) Δίνεται ότι $\widehat{B} = 90^\circ$ και $\widehat{\Delta\Gamma\Gamma} = 60^\circ$, άρα $\widehat{\Delta\Gamma\Delta} = 30^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$ η πλευρά $\Delta\Delta$ βρίσκεται απέναντι από γωνία 30° , οπότε ισούται με το μισό της υποτείνουσας $\Delta\Gamma$. Άρα $\Delta\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ ή $\Delta\Gamma = 2 \Delta\Delta = 12$.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$ έχουμε $\Delta\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta\Delta^2$ ή $\Delta\Delta^2 = 12^2 - 6^2$ ή $\Delta\Delta^2 = 144 - 36 = 108$ ή $\Delta\Delta = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$ δίνεται ότι $\widehat{\Delta\Gamma\Gamma} = 60^\circ$. Άρα η άλλη οξεία γωνία του τριγώνου ισούται με 30° , δηλαδή $\widehat{\Delta\Gamma\Delta} = 30^\circ$. Η πλευρά $\Delta\Gamma$ βρίσκεται απέναντι από γωνία 30° στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$, άρα $\Delta\Gamma = \frac{\Delta\Delta}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$ έχουμε $\Delta\Gamma^2 = \Delta\Delta^2 - \Delta\Gamma^2$ ή $\Delta\Gamma^2 = 108 - (3\sqrt{3})^2$ ή $\Delta\Gamma^2 = 108 - 27 = 81$ ή $\Delta\Gamma = 9$.

Η περίμετρος του τραπεζίου $\Delta\Gamma\Delta$ είναι ίση με $\Delta\Gamma + \Delta\Delta + \Delta\Gamma + \Delta\Delta = 12 + 3\sqrt{3} + 9 + 6 = 27 + 3\sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $R = 3$. Θεωρούμε το εφαπτόμενο τμήμα AB ώστε $AB = 4$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η γωνία $O\hat{B}A$ είναι ορθή.

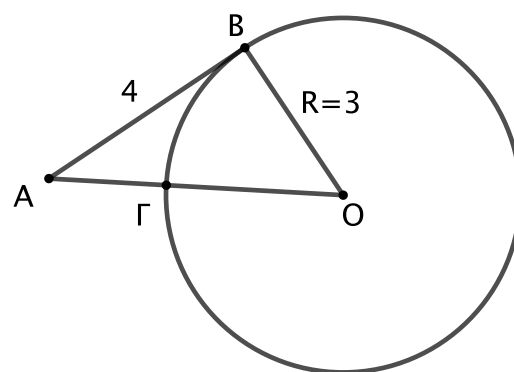
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $OA = 5$.

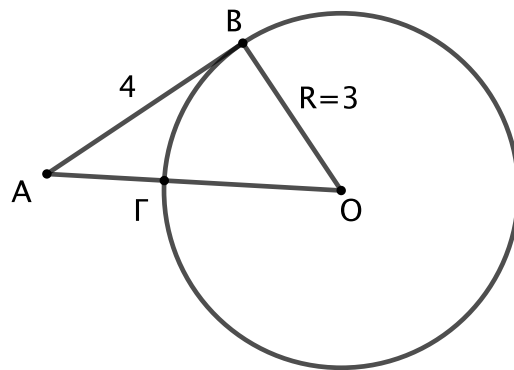
(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $A\Gamma$.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ



α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε $AB \perp OB$. Άρα, η γωνία $O\hat{B}A$ είναι ορθή.

β) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο OBA έχουμε:

$$OA^2 = AB^2 + OB^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

Άρα, $OA = \sqrt{25} = 5$.

γ) Από το σχήμα έχουμε:

$$A\Gamma = OA - O\Gamma = OA - R = 5 - 3 = 2$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, το AD είναι το ύψος στην υποτείνουσα $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. Αν είναι $B\Gamma = 10$ και $\Delta\Gamma = 8$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος BD .

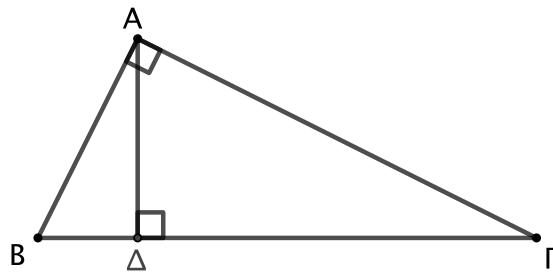
(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι $AD = 4$.

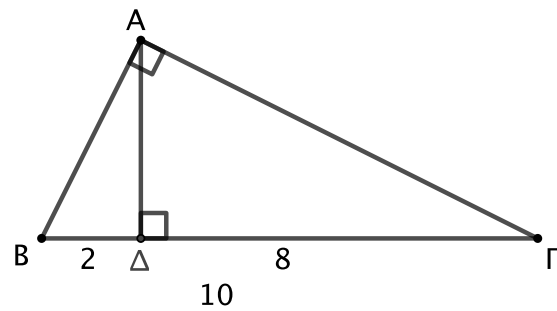
(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AB .

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ



α) Είναι:

$$B\Delta = B\Gamma - \Delta\Gamma = 10 - 8 = 2$$

β) Για το ύψος $A\Delta$ στην υποτείνουσα $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου ισχύει:

$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = 2 \cdot 8 = 16$$

Επομένως, $A\Delta = \sqrt{16} = 4$.

γ) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$$

Άρα, $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και οι παράλληλες χορδές του AB και $\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν E είναι το σημείο τομής των $A\Delta$ και $B\Gamma$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{A\Gamma} = 50^\circ$.

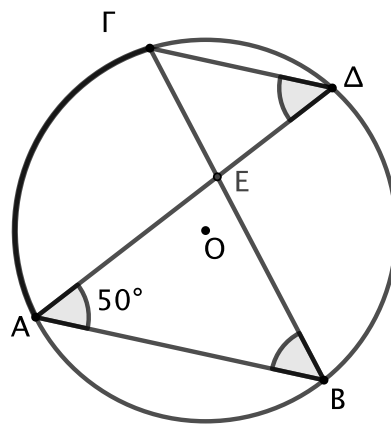
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{B}\Gamma$.

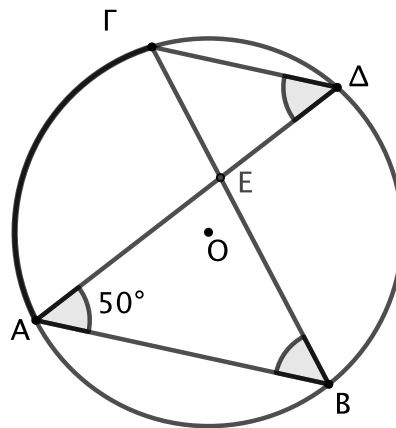
(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου $\widehat{A\Gamma}$.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ



α) Οι γωνίες $\widehat{B\hat{A}\Delta}$ και $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και ΓΔ οι οποίες τέμνονται από την ΑΔ. Άρα, $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 50^\circ$.

β) Οι γωνίες $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ και $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$ είναι ίσες ως εγγεγραμμένες στο τόξο $\widehat{A\hat{\Gamma}}$. Άρα $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = 50^\circ$.

γ) Το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της $\widehat{A\hat{\Gamma}}$, δηλαδή:

$$\widehat{A\hat{B}\Gamma} = \frac{\widehat{A\hat{\Gamma}}}{2}$$

Άρα:

$$\widehat{A\hat{\Gamma}} = 2\widehat{A\hat{B}\Gamma} = 2 \cdot 50^\circ = 100^\circ$$

ΘΕΜΑ 2

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) του σχήματος, το $A\Delta$ είναι ύψος και το AM διάμεσος. Αν $B\Delta = 4$ και $\Delta\Gamma = 16$, τότε:

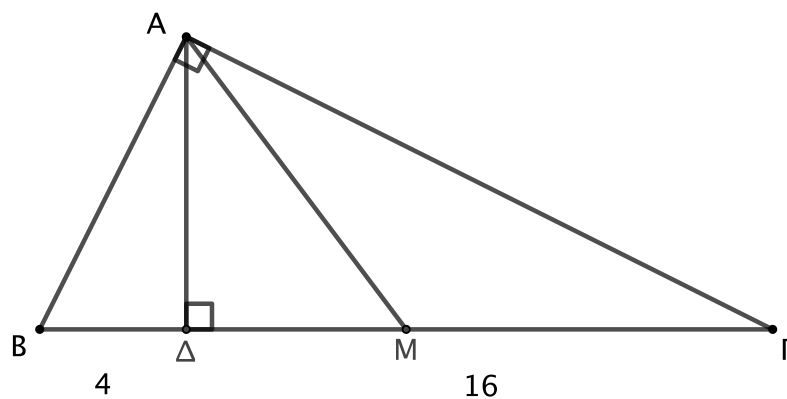
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $A\Delta = 8$.
- ii. $AB = 4\sqrt{5}$.

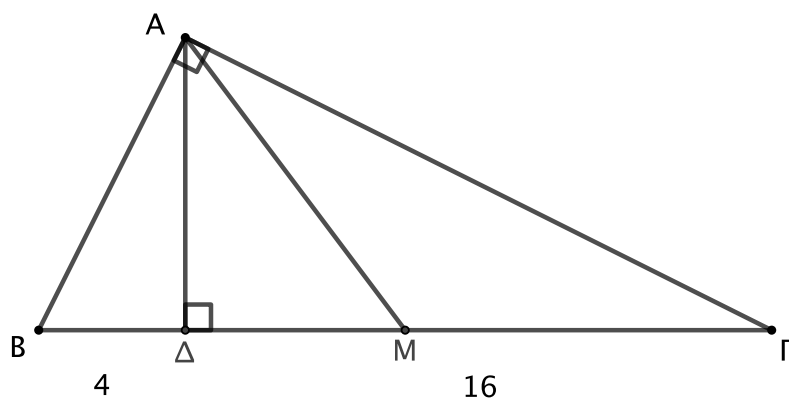
(Μονάδες 16)

β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο AM .

(Μονάδες 09)



ΛΥΣΗ



α)

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ, το ύψος AΔ στην υποτείνουσα είναι:

$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = 4 \cdot 16 = 64$$

$$\text{Άρα, } A\Delta = \sqrt{64} = 8.$$

ii. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο AΒΔ έχουμε:

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$$

$$\text{Άρα, } AB = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}.$$

β) Η διάμεσος ΑΜ του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή:

$$AM = \frac{B\Gamma}{2}$$

Αφού $B\Gamma = 4 + 16 = 20$, θα είναι:

$$AM = \frac{20}{2} = 10$$

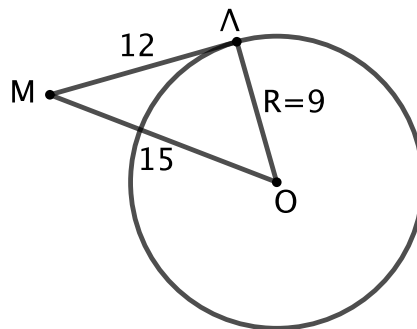
ΘΕΜΑ 4

α) Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AB = 12$ και $B\Gamma = 15$. Να υπολογίσετε την κάθετη πλευρά $A\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι στο σχήμα, «το $M\Lambda$ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R) στο σημείο του Λ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής και να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$$

$$ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2$$

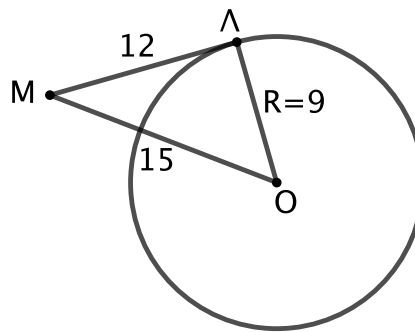
$$ΑΓ^2 = 15^2 - 12^2$$

$$ΑΓ^2 = 225 - 144$$

$$ΑΓ^2 = 81$$

$$ΑΓ = 9$$

β)



Το τρίγωνο ΜΛΟ έχει πλευρές $ΟΜ = 15$, $ΛΜ = 12$, $ΟΛ = 9$.

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι το τρίγωνο με μήκη πλευρών 15, 12 και 9 είναι ορθογώνιο, δηλαδή οι αριθμοί 15, 12 και 9 αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα. Επομένως, το τρίγωνο ΜΛΟ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά $ΟΜ = 15$ και $\widehat{ΟΛΜ} = 90^\circ$. Αφού το τμήμα ΜΛ είναι κάθετο στην ακτίνα ΟΛ στο σημείο του Λ, συμπεραίνουμε ότι το ΜΛ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου $(Ο, R)$ στο σημείο του Λ. Συνεπώς, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.

ΘΕΜΑ 4

Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους κύκλους (K,r) και (Λ,R) στα σημεία A και B αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής της διακέντρου $K\Lambda$ και της ευθείας (ε).

α) Να αιτιολογήσετε ότι οι γωνίες $\widehat{K\Lambda\Gamma}$ και $\widehat{\Lambda\Gamma B}$ είναι ορθές.

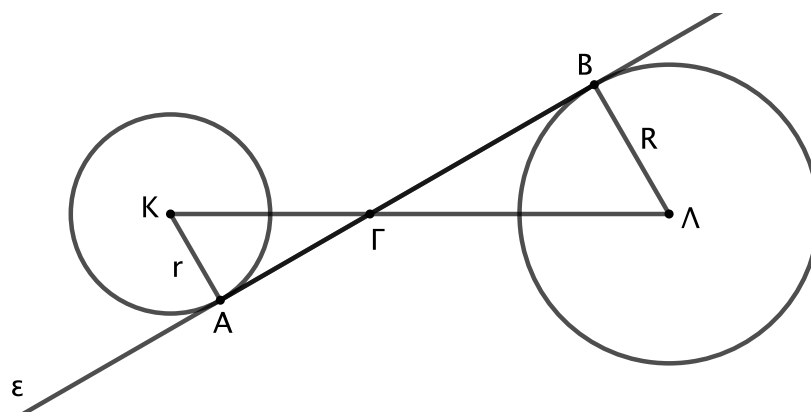
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $K\Lambda\Gamma$ και $\Lambda\Gamma B$ είναι όμοια.

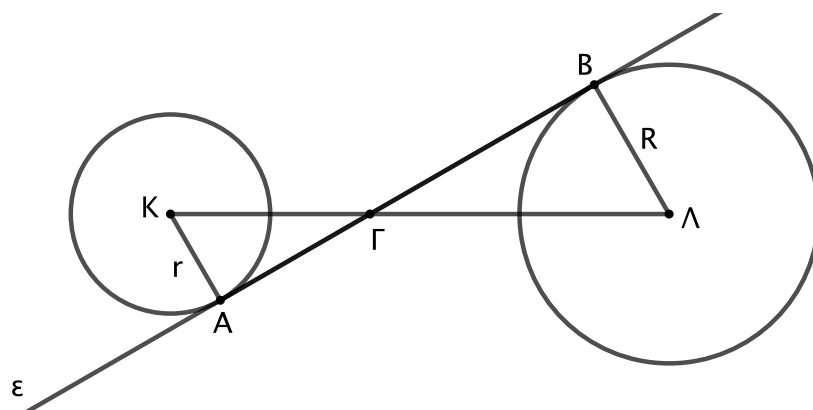
(Μονάδες 10)

γ) Ποια είναι η θέση του σημείου Γ στη διάκεντρο $K\Lambda$ όταν η ακτίνα R είναι διπλάσια της ακτίνας r ;

(Μονάδες 05)



ΛΥΣΗ



α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής. Οπότε, $KA \perp AB$ και $LB \perp AB$. Άρα, οι γωνίες $\widehat{K\hat{A}\Gamma}$ και $\widehat{L\hat{B}\Gamma}$ είναι ορθές.

β) Τα τρίγωνα $K\hat{A}\Gamma$ και $L\hat{B}\Gamma$ έχουν $\widehat{K\hat{A}\Gamma} = \widehat{L\hat{B}\Gamma}$ (ως κατακορυφήν) και $\widehat{K\hat{A}\Gamma} = \widehat{L\hat{B}\Gamma} = 90^\circ$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

γ) Τα τρίγωνα $K\hat{A}\Gamma$ και $L\hat{B}\Gamma$ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{K\hat{A}\Gamma} = \widehat{L\hat{B}\Gamma}$	$\widehat{K\hat{A}\Gamma} = \widehat{L\hat{B}\Gamma}$	$\widehat{A\hat{K}\Gamma} = \widehat{B\hat{L}\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $K\hat{A}\Gamma$	KA	KΓ	AΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $L\hat{B}\Gamma$	ΛB	ΛΓ	BΓ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{KA}{\Lambda B} = \frac{K\Gamma}{\Lambda\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{r}{R} = \frac{K\Gamma}{\Lambda\Gamma}$$

Όταν είναι $R = 2r$, τότε:

$$\frac{r}{2r} = \frac{K\Gamma}{\Lambda\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} = \frac{K\Gamma}{\Lambda\Gamma} \quad \text{ή} \quad \Lambda\Gamma = 2K\Gamma$$

Επομένως, το σημείο Γ διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα KΛ σε λόγο $\frac{1}{2}$.

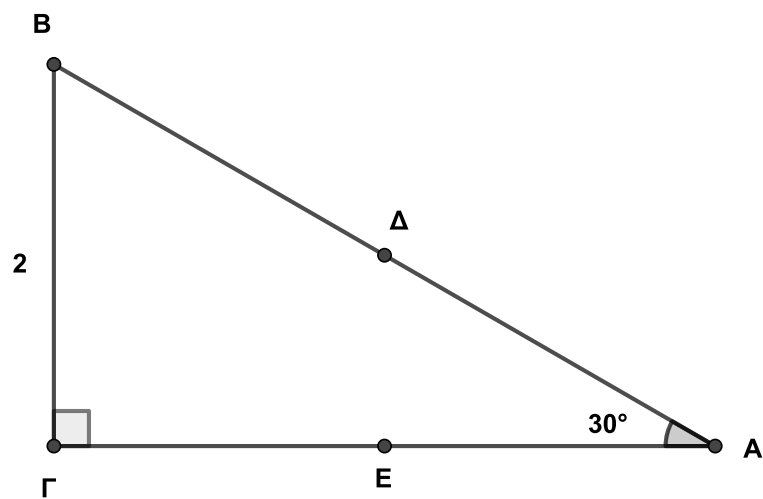
ΘΕΜΑ 2

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος δίνονται $\hat{A} = 30^\circ$, $B\Gamma=2$ και τα σημεία Δ , E μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

α) το μήκος του ΔE . (Μονάδες 9)

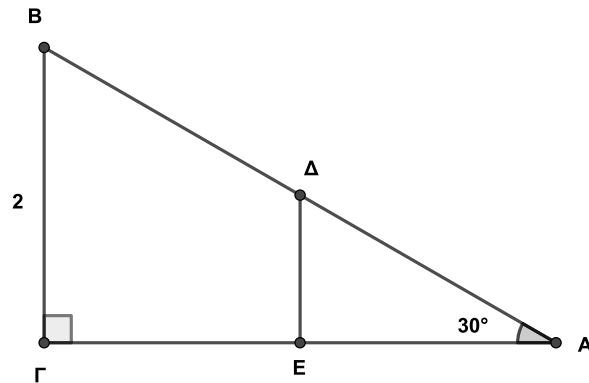
β) το μήκος της πλευράς AB . (Μονάδες 9)

γ) το μήκος του $\Gamma\Delta$. (Μονάδες 7)



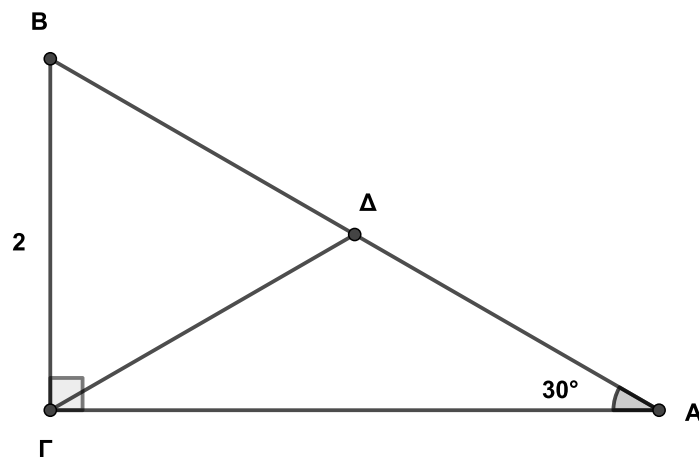
ΛΥΣΗ

α) Τα Δ, Ε είναι μέσα των δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ οπότε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς. Δηλαδή $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2}{2} = 1$.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η $\hat{A} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή $B\Gamma = \frac{AB}{2}$ ή $AB = 2 \cdot B\Gamma = 2 \cdot 2 = 4$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΓΔ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Άρα θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή $\Gamma\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$.



ΘΕΜΑ 2

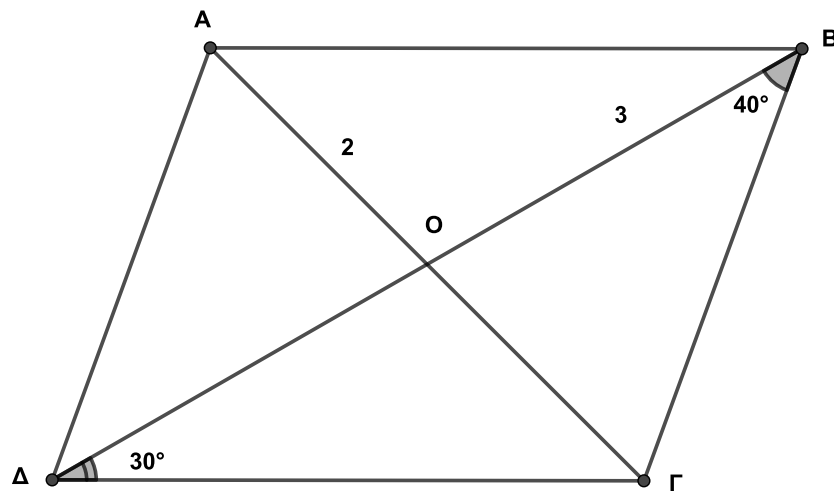
Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος ισχύουν $AB = \Gamma\Delta$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$.
Παίρνοντας υπόψιν και τα υπόλοιπα δεδομένα όπως αυτά φαίνονται στο σχήμα, να υπολογίσετε:

α) Τα μήκη των τμημάτων $Ο\Gamma$, $Ο\Delta$, όπου $Ο$ είναι το σημείο τομής των $Α\Gamma$, $Β\Delta$.

(Μονάδες 13)

β) Τα μέτρα των γωνιών A , B , Γ , Δ του τετραπλεύρου.

(Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΓΔ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ θα διχοτομούνται στο Ο. Άρα $ΟΓ = ΟΑ = 2$ και $ΟΔ = ΟΒ = 3$.

β) Στο τρίγωνο ΒΓΔ ισχύει: $\widehat{ΒΓΔ} + \widehat{ΓΒΔ} + \widehat{ΓΔΒ} = 180^\circ$ ή $\widehat{ΒΓΔ} + 40^\circ + 30^\circ = 180^\circ$ ή $\widehat{ΒΓΔ} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Όμως στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, άρα $\widehat{Α} = \widehat{Γ} = 110^\circ$. Επίσης $\widehat{Α} + \widehat{Β} = 180^\circ$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ). Άρα $110^\circ + \widehat{Β} = 180^\circ$ ή $\widehat{Β} = 70^\circ$. Οπότε και $\widehat{Δ} = \widehat{Β} = 70^\circ$.

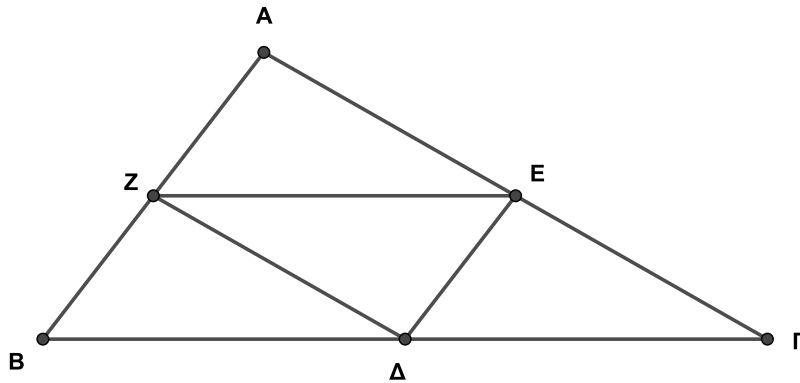
ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος τα Δ , E , Z είναι μέσα των πλευρών του. Αν $B\Gamma = 10$, $\Delta Z = 4$ και $\Delta E = 2,5$:

α) να αποδείξετε ότι $ZE \parallel B\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) να υπολογίσετε το μήκος της ZE . (Μονάδες 7)

γ) να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών AB , $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Ζ, Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Επομένως $ZE \parallel BG$.

β) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Ζ, Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Επομένως το $ZE = \frac{BG}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

γ) Για τον ίδιο λόγο που αναφέρθηκε στο ερώτημα β) θα ισχύει:

$$\Delta E = \frac{AB}{2} \text{ ή } AB = 2\Delta E \text{ ή } AB = 2 \cdot 2,5 = 5 \text{ και } \Delta Z = \frac{AG}{2} \text{ ή } AG = 2\Delta Z \text{ ή } AG = 2 \cdot 4 = 8.$$

ΘΕΜΑ 2

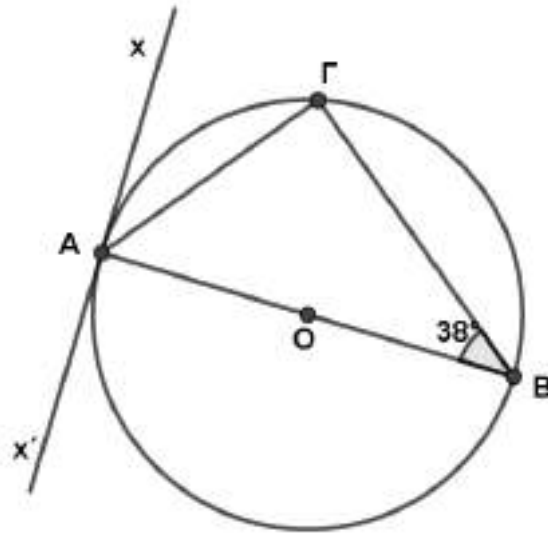
Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο το σημείο O . Αν η AB είναι διάμετρος και η $x'x$ εφαπτομένη του κύκλου στο A , να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\Gamma B}$

(Μονάδες 12)

β) το μέτρο της γωνίας $\widehat{\Gamma Ax}$

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Εφόσον η AB είναι διάμετρος του κύκλου, η γωνία $\widehat{A\Gamma B}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο άρα θα είναι ορθή. Επομένως $\widehat{A\Gamma B} = 90^\circ$.

β) Η γωνία $\widehat{\Gamma\Lambda\chi}$ είναι γωνία της χορδής $A\Gamma$ και της εφαπτομένης $\chi\chi$ στο άκρο A της χορδής. Επομένως θα ισούται με την εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AB\Gamma}$, που βαίνει στο τόξο της χορδής. Άρα $\widehat{\Gamma\Lambda\chi} = \widehat{AB\Gamma} = 38^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

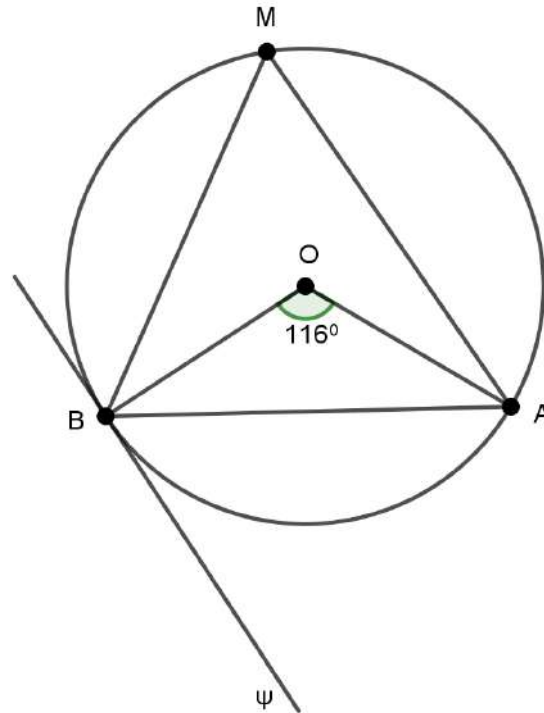
Στο παρακάτω σχήμα η γωνία AOB ισούται με 116° και η $B\psi$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο B . Να υπολογίσετε:

α) πόσες μοίρες είναι η γωνία AMB .

(Μονάδες 13)

β) πόσες μοίρες είναι η γωνία $AB\psi$.

(Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία AMB είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο άρα θα ισούται με το μισό της

αντίστοιχης επίκεντρης AOB. Δηλαδή $\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{116^0}{2} = 58^0$.

β) Η γωνία ABψ είναι γωνία χορδής AB και εφαπτομένης Bψ στον κύκλο. Επομένως θα ισούται με την εγγεγραμμένη AMB που βαίνει στο τόξο της χορδής.

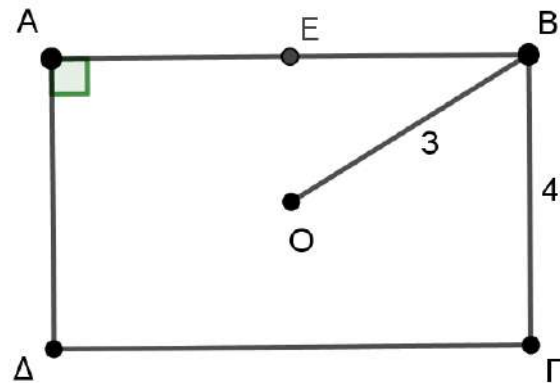
Άρα $\widehat{AB\psi} = \widehat{AMB} = 58^0$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος, στο οποίο το O είναι το Κέντρο του και το τμήμα $OB = 3$. Αν E είναι το μέσο της AB και η $B\Gamma = 4$ τότε:

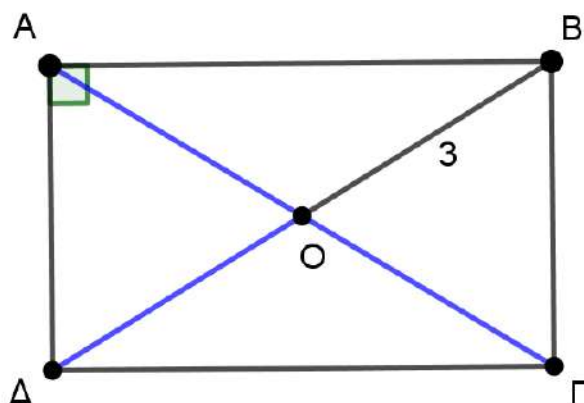
α) να χαράξετε τις διαγώνιες $A\Gamma$, $B\Delta$ του ορθογωνίου και να υπολογίσετε τα μήκη τους. (Μονάδες 13)

β) να υπολογίσετε το μήκος του OE . (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α)



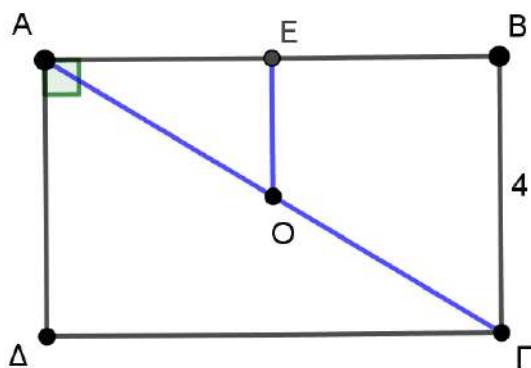
Οι διαγώνιες του ορθογωνίου τέμνονται στο κέντρο του παραλληλογράμμου. Οπότε χαράσσουμε τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ του ορθογωνίου να διέρχονται από το Ο.

Το Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, επομένως το μέσο της διαγωνίου ΒΔ.

Άρα η $ΒΔ = 2 \cdot ΒΟ = 2 \cdot 3 = 6$.

Στο ορθογώνιο οι διαγώνιές του είναι ίσες. Επομένως η διαγώνιος $ΑΓ = ΒΔ = 6$.

β)



Το Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, άρα το μέσο της διαγωνίου ΑΓ.

Επίσης από τα δεδομένα το Ε είναι το μέσον της ΑΒ. Έτσι στο τρίγωνο ΑΒΓ το ευθύγραμμο τμήμα ΟΕ ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών του, επομένως θα ισούται

με το μισό της τρίτης πλευράς. Δηλαδή $ΟΕ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα $ΒΑΓ$ με $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΕΖ$ με $ΔΕ = ΔΖ$. Δίνεται επίσης ότι $\hat{Β} = 36^\circ$, $\hat{Ε} = 72^\circ$ και $ΑΒ = 2ΔΕ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{Δ} = 36^\circ$.

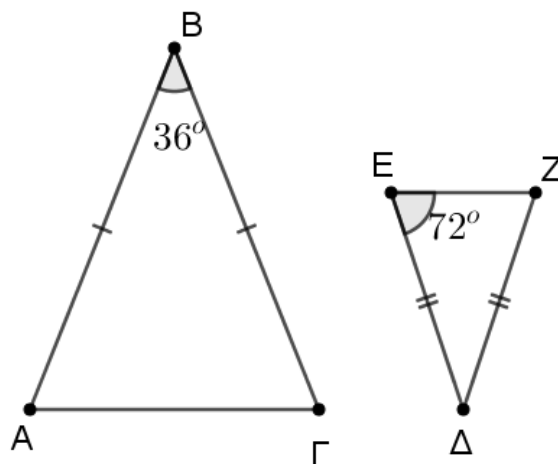
(Μονάδες 08)

ii. $ΒΓ = 2ΔΖ$.

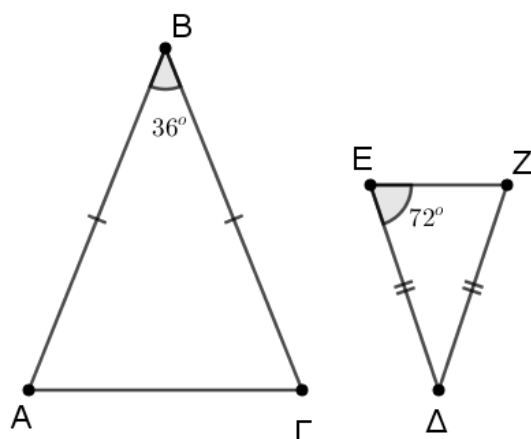
(Μονάδες 08)

β) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα $ΒΑΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι όμοια.

(Μονάδες 09)



ΛΥΣΗ



α)

- i. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΕΖ είναι $ΔΕ = ΔΖ$, άρα $\hat{Z} = \hat{E} = 72^\circ$. Για τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ είναι:

$$\hat{\Delta} + \hat{Z} + \hat{E} = 180^\circ$$

άρα $\hat{\Delta} + 72^\circ + 72^\circ = 180^\circ$ και τελικά $\hat{\Delta} = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$.

- ii. Δίνεται ότι $AB = 2ΔΕ$, $AB = BΓ$ και $ΔΕ = ΔΖ$. Άρα, $BΓ = 2ΔΕ = 2ΔΖ$.

β) Τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΔΕΖ έχουν:

$$\frac{AB}{ΔΕ} = \frac{2ΔΕ}{ΔΕ} = 2$$

$$\frac{BΓ}{ΔΖ} = \frac{2ΔΖ}{ΔΖ} = 2$$

$$\hat{B} = \hat{\Delta} = 36^\circ$$

Αφού τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΔΕΖ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, θα είναι όμοια.

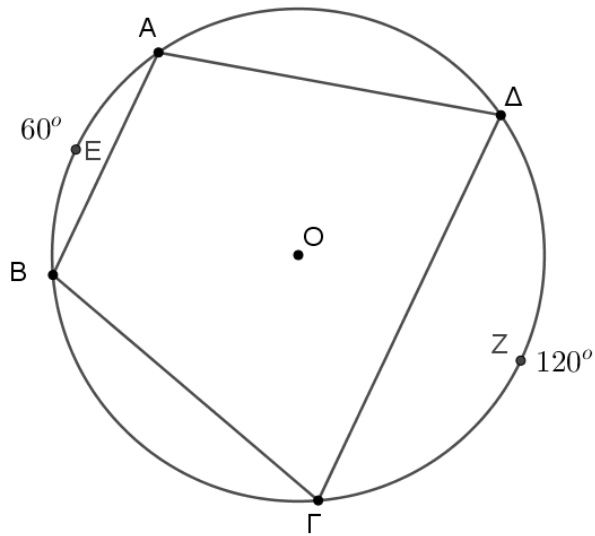
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ, Δ του κύκλου τέτοια ώστε τα τόξα $A\Delta$ και $B\Gamma$ να είναι ίσα και $AB = 60^\circ$, $\Gamma\Delta = 120^\circ$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

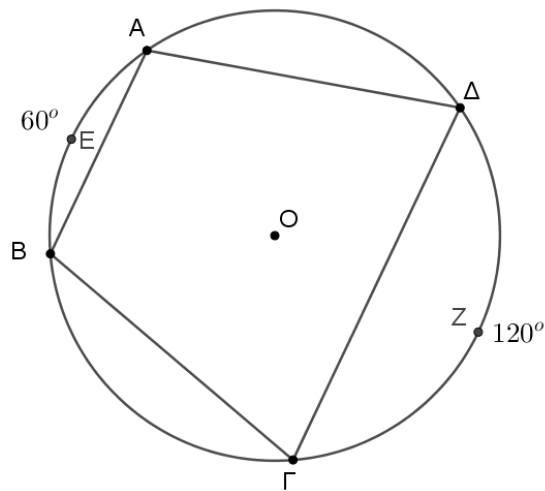
α) Τα τόξα $B\Gamma$ και $A\Delta$ έχουν μέτρο ίσο με 90° . (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = B\Gamma$. (Μονάδες 05)

γ) Δίνεται ότι τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των τόξων AB και $\Gamma\Delta$. Να εξετάσετε αν το EZ διέρχεται από το κέντρο O . (Μονάδες 08)



ΛΥΣΗ

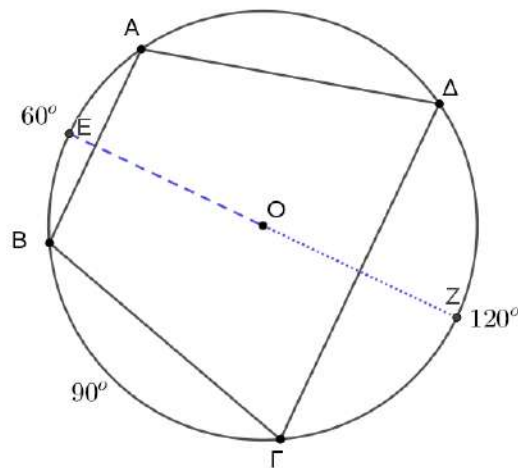


α) Έχουμε $\widehat{AB} = 60^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta} = 120^\circ$, $\widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Delta}$ και $\widehat{AB} + \widehat{B\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta} + \widehat{A\Delta} = 360^\circ$.

Αντικαθιστούμε και έχουμε $60^\circ + \widehat{B\Gamma} + 120^\circ + \widehat{B\Gamma} = 360^\circ$ ή $2\widehat{B\Gamma} = 360^\circ - 120^\circ - 60^\circ = 180^\circ$
ή $\widehat{B\Gamma} = 90^\circ$.

β) Επειδή τα τόξα $\widehat{B\Gamma}$ και $\widehat{A\Delta}$ είναι ίσα τότε οι αντίστοιχες σε αυτά χορδές θα είναι ίσες, δηλαδή $B\Gamma = A\Delta$.

γ)



Ενώνουμε το σημείο O με το σημείο E και με το σημείο Z. Για να διέρχεται η EZ από το κέντρο O θα πρέπει η γωνία $\widehat{Z\hat{O}E}$ να ισούται με 180° .

Επειδή το E είναι το μέσο του τόξου $\widehat{AB}$, θα έχουμε $\widehat{BE} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Επειδή το Z είναι το μέσο του τόξου $\widehat{\Gamma\Delta}$, θα έχουμε $\widehat{\Gamma Z} = \frac{\widehat{\Gamma\Delta}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

$\widehat{E\Gamma Z} = \widehat{E\Gamma} + \widehat{\Gamma Z} = 30^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, άρα είναι ημικύκλιο, δηλαδή η EZ είναι διάμετρος και επομένως θα διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου.

ΘΕΜΑ 2

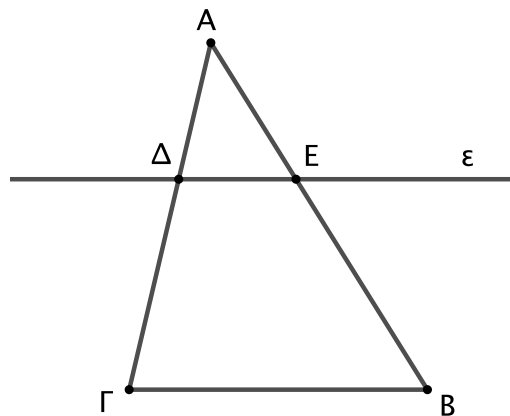
Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AE\Delta$ είναι όμοια.

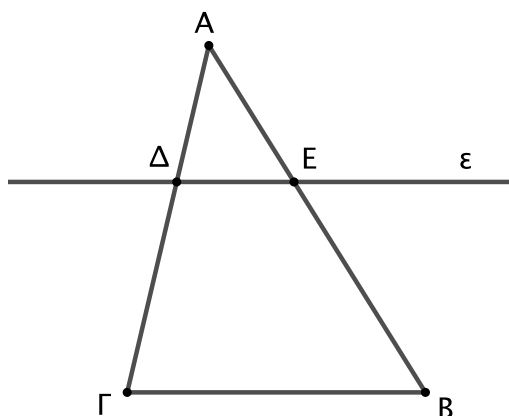
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔE , αν είναι $A\Delta = 2$, $\Delta\Gamma = 6$ και $B\Gamma = 4$.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AE\Delta$ έχουν $\hat{B} = \hat{A\hat{E}\Delta}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $E\Delta$ και $B\Gamma$ που τέμνονται από την EB) και κοινή τη γωνία $\hat{A}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AE\Delta$ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{A}$	$\hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{B}$	$\hat{A\hat{\Delta}E} = \hat{\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $AE\Delta$	ΔE	$A\Delta$	AE
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $AB\Gamma$	$B\Gamma$	$A\Gamma$	AB

Επίσης, δίνεται ότι $A\Delta = 2$, $\Delta\Gamma = 6$ και $B\Gamma = 4$. Έτσι έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta E}{4} = \frac{2}{8} \quad \text{ή} \quad \Delta E = \frac{2 \cdot 4}{8} \quad \text{ή} \quad \Delta E = 1$$

ΘΕΜΑ 4

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$.

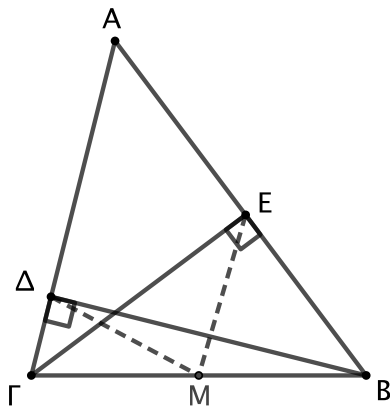
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta M = EM$.

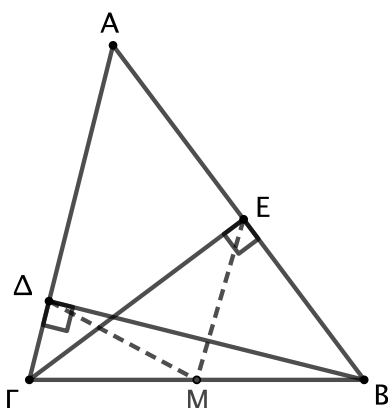
(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ , E , B και Γ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

(Μονάδες 05)



ΛΥΣΗ



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ, η διάμεσος ΔΜ αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ, οπότε ισούται με το μισό της δηλαδή

$$\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} \quad (1)$$

β) Όμοια, η διάμεσος ΕΜ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΓ αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ, οπότε ισούται με το μισό της δηλαδή

$$ΕΜ = \frac{B\Gamma}{2} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\Delta M = ΕΜ$.

γ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε ότι

$$\Delta M = ΕΜ = \frac{B\Gamma}{2}$$

Επίσης, το Μ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ οπότε

$$BM = \Gamma M = \frac{B\Gamma}{2}$$

Επομένως, είναι $\Delta M = ΕΜ = BM = \Gamma M$, δηλαδή τα σημεία Δ, Ε, Β και Γ ισαπέχουν από το σημείο Μ. Άρα, είναι σημεία του κύκλου με κέντρο Μ.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο Δ της πλευράς $A\Gamma$ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E .

α) Να αιτιολογήσετε ότι $\Gamma\Delta = BE$.

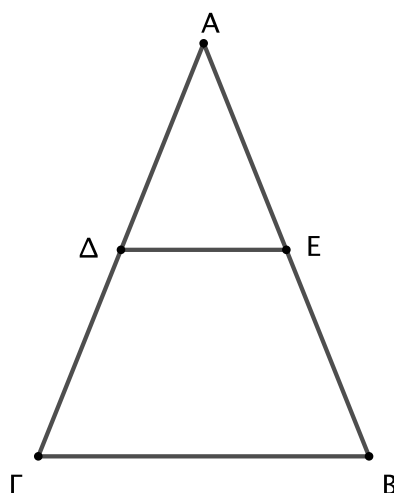
(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Gamma BE\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

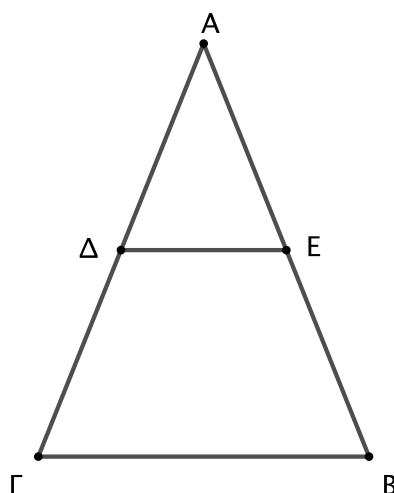
(Μονάδες 12)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχει κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Γ , B , E και Δ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός αυτός είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)



ΛΥΣΗ



α) Το σημείο Δ είναι μέσο της πλευράς ΑΓ και το ΔΕ είναι παράλληλο στην ΒΓ, οπότε το Ε θα είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ. Επομένως, τα τμήματα ΓΔ και ΒΕ θα είναι ίσα ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

β) Στο τετράπλευρο ΓΒΕΔ είναι $ΔΕ // ΓΒ$ και οι πλευρές του ΓΔ και ΒΕ τέμνονται στο Α. Οπότε, το ΓΒΕΔ είναι τραπέζιο. Επίσης, $ΓΔ = ΒΕ$. Συνεπώς, το τετράπλευρο ΓΒΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Γνωρίζουμε ότι κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο, αφού οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές ($\hat{Β} + \hat{Ε} = 180^\circ$ και $\hat{Β} = \hat{Γ}$, οπότε $\hat{Γ} + \hat{Ε} = 180^\circ$). Επομένως, υπάρχει κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Γ, Β, Ε και Δ. Συνεπώς, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.

ΘΕΜΑ 2

Έστω Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τριγώνου ΑΒΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $ΔΕ \parallel ΒΓ$.

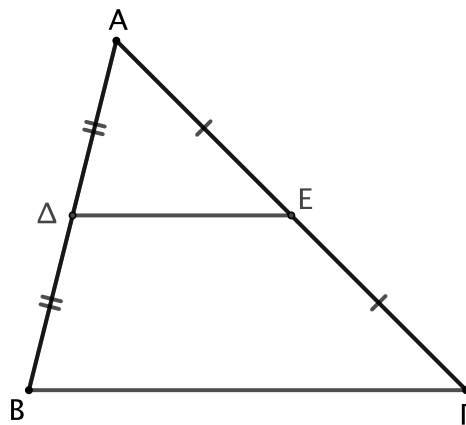
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

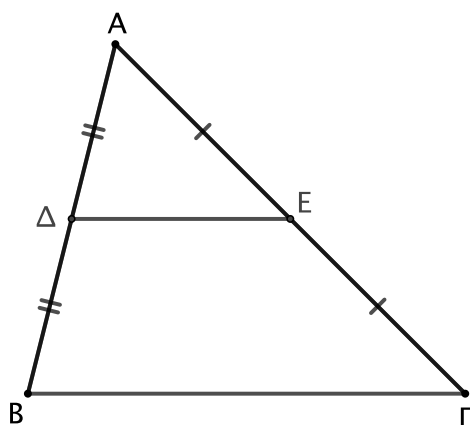
(Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ.

(Μονάδες 05)



ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επομένως, το ΔΕ είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή $\Delta E \parallel B\Gamma$.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $\widehat{A\Delta E} = \widehat{B}$ (ως εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΒΔ) και κοινή τη γωνία $\widehat{A}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

γ) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{A} = \widehat{A}$	$\widehat{A\Delta E} = \widehat{B}$	$\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΕ	ΔΕ	ΑΕ	ΑΔ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$$

Θέμα 2

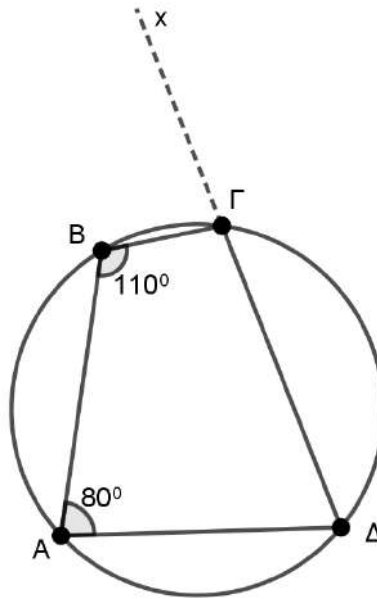
Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος, είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Προεκτείνουμε την πλευρά του $\Delta\Gamma$ κατά την ημιευθεία $\Gamma\chi$. Αν η γωνία A του τετραπλεύρου ισούται με 80° και η γωνία B ισούται με 110° , να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνίας $B\Gamma\chi$.

(Μονάδες 12)

β) το μέτρο της γωνίας $A\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία $B\Gamma x$ είναι εξωτερική στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, άρα θα ισούται με την απέναντι εσωτερική του γωνία. Δηλαδή $\widehat{B\Gamma x} = \widehat{A} = 80^\circ$.

β) Στα εγγράψιμα τετράπλευρα οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές. Επομένως η γωνία $A\Delta\Gamma$ είναι παραπληρωματική της γωνίας B του τετραπλεύρου. Δηλαδή $\widehat{A\Delta\Gamma} + \widehat{B} = 180^\circ$ ή $\widehat{A\Delta\Gamma} + 110^\circ = 180^\circ$ ή $\widehat{A\Delta\Gamma} = 70^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

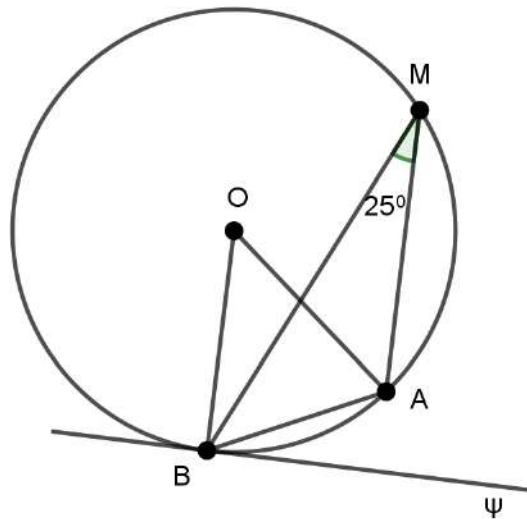
Στο παρακάτω σχήμα η γωνία AMB ισούται με 25° και η $B\psi$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο B . Να υπολογίσετε:

α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $AB\psi$.

(Μονάδες 12)

β) πόσες μοίρες είναι η γωνία AOB .

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία $\widehat{AB\psi}$ είναι γωνία της χορδής AB και της εφαπτομένης $B\psi$ του κύκλου. Επομένως θα ισούται με την εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AMB}$ που βαίνει στο τόξο της χορδής. Άρα $\widehat{AB\psi} = \widehat{AMB} = 25^\circ$.

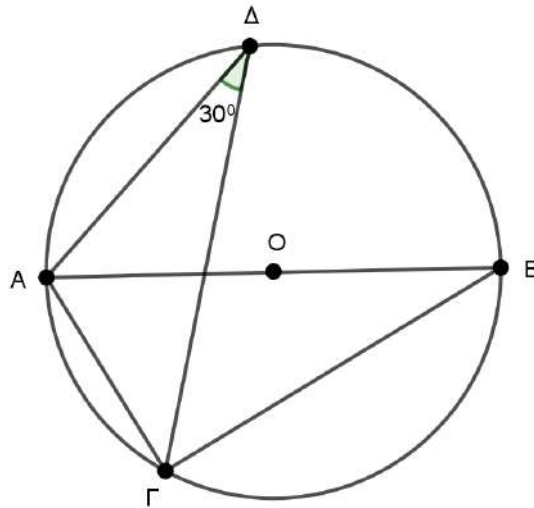
β) Η γωνία $\widehat{AMB}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο που βαίνει στο τόξο AB και η γωνία $\widehat{AOB}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη. Επομένως η επίκεντρη θα ισούται με το διπλάσιο της εγγεγραμμένης. Δηλαδή $\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AMB} = 2 \cdot 25^\circ = 50^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η γωνία $\Delta\Gamma\Lambda$ ισούται με 30° και η AB είναι διάμετρος του κύκλου. Να υπολογίσετε:

α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $AB\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) πόσες μοίρες είναι η γωνία $A\Gamma B$. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

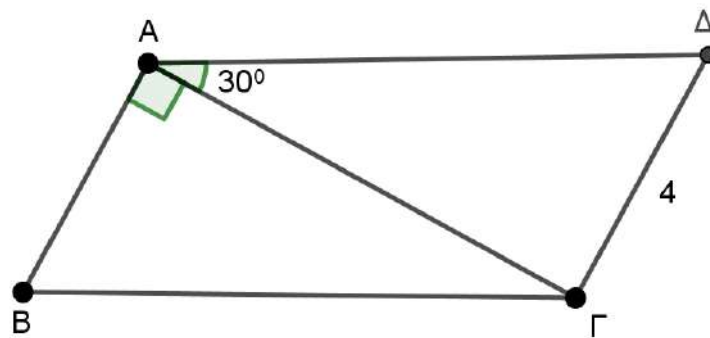
α) Οι γωνίες $\widehat{AD\Gamma}$ και $\widehat{AB\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{AG}$. Άρα θα είναι ίσες, οπότε $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{AD\Gamma} = 30^\circ$.

β) Εφόσον η AB είναι διάμετρος, η γωνία $\widehat{AGB}$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, οπότε θα είναι ορθή. Δηλαδή $\widehat{AGB} = 90^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο στο οποίο η διαγώνιος $A\Gamma$ είναι κάθετη στην πλευρά του AB . Επίσης η πλευρά του $\Gamma\Delta = 4$ και η γωνία $\Gamma A\Delta$ ισούται με 30° .

- α) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\Gamma\Delta$. (Μονάδες 10)
- β) Πόσο είναι το μήκος της πλευράς AB ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
- γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 8)



Θέμα 2

α) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, οπότε:

$$\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{B\hat{A}\Gamma} + \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = 90^0 + 30^0 = 120^0.$$

β) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, οπότε:

$$AB = \Gamma\Delta = 4.$$

γ) Λόγω του παραλληλογράμμου έχουμε $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = 30^0$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΓB και $A\Delta$ που τέμνονται από την ΓA .

Οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία του $A\Gamma B$ ισούται με 30^0 . Επομένως η απέναντι κάθετη πλευρά θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

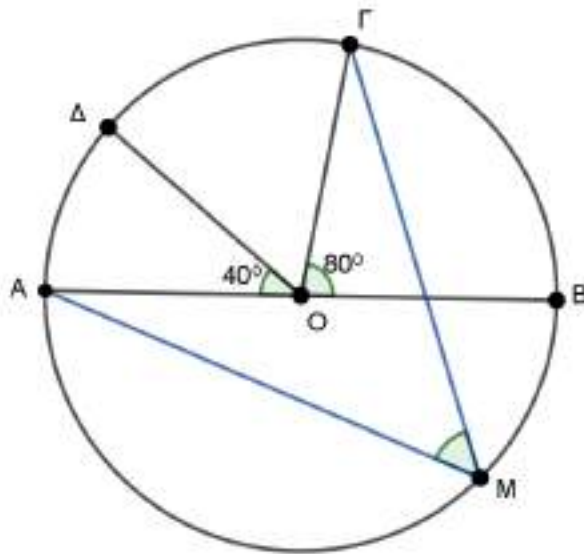
$$\text{Δηλαδή } AB = \frac{B\Gamma}{2} \text{ ή } B\Gamma = 2 \cdot AB = 2 \cdot 4 = 8.$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται κύκλος με κέντρο το O . Η AB είναι μια διάμετρος του και Γ, Δ είναι σημεία του ίδιου ημικυκλίου ώστε η γωνία $BO\Gamma$ να ισούται με 80° και η γωνία $AO\Delta$ να ισούται με 40° . Αν M είναι σημείο του ημικυκλίου στο οποίο δεν ανήκουν τα σημεία Γ, Δ τότε:

α) Να υπολογίσετε με πόσες μοίρες ισούται η επίκεντρη γωνία $\Delta O\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) Αν $\widehat{\Delta\Gamma} = 60^\circ$, να υπολογίσετε με πόσες μοίρες ισούται η γωνία $AM\Gamma$. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή η ΑΒ είναι διάμετρος θα ισχύει:

$$\widehat{ΑΟΔ} + \widehat{ΔΟΓ} + \widehat{ΓΟΒ} = 180^0 \text{ ή } 40^0 + \widehat{ΔΟΓ} + 80^0 = 180^0 \text{ ή } \widehat{ΔΟΓ} = 60^0.$$

β) Η γωνία ΑΜΓ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, άρα θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης, δηλαδή της ΑΟΓ.

$$\text{Όμως } \widehat{ΑΟΓ} = \widehat{ΑΟΔ} + \widehat{ΔΟΓ} = 40^0 + 60^0 = 100^0.$$

$$\text{Άρα } \widehat{ΑΜΓ} = \frac{\widehat{ΑΟΓ}}{2} = \frac{100^0}{2} = 50^0.$$

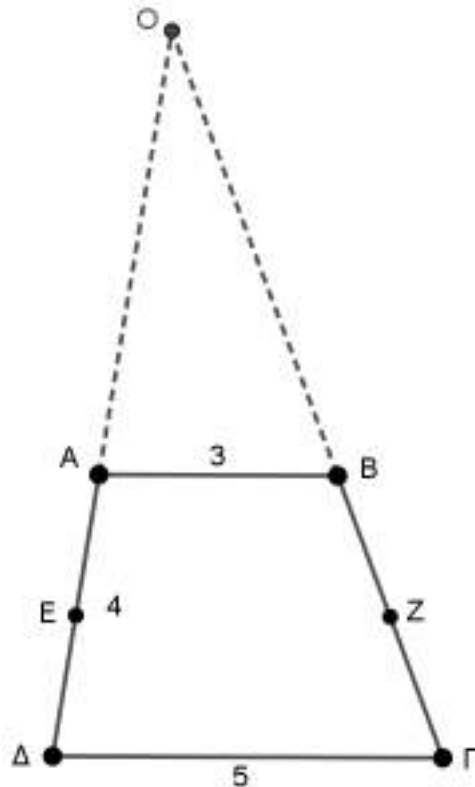
ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και E, Z τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του $A\Delta, B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν $AB = 3, \Delta\Gamma = 5, A\Delta = 4$ και οι μη παράλληλες πλευρές του $A\Delta, B\Gamma$ τέμνονται στο O , τότε:

α) να υπολογίσετε το μήκος του EZ . (Μονάδες 9)

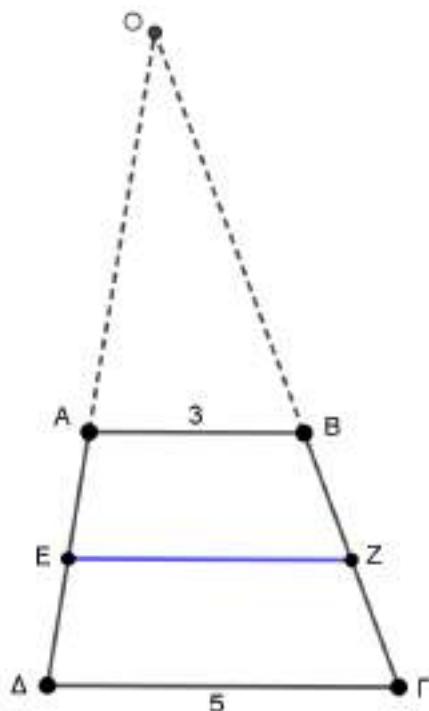
β) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OAB και OEZ είναι όμοια. (Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος OA . (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α)



Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ τα Ε, Ζ είναι τα μέσα των δύο μη παραλλήλων πλευρών, οπότε η ΕΖ θα είναι η διάμεσός του. Άρα θα ισούται με το ημιάθροισμα των δύο βάσεων.

$$\text{Δηλαδή } EZ = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

β) Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τραπέζιου είναι παράλληλη στις βάσεις του, άρα η ΑΒ // ΕΖ οπότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΕΖ έχουν:

$\widehat{OAB} = \widehat{OEZ}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΕΖ που τέμνονται από την ΟΕ.

$\widehat{OBA} = \widehat{OZE}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΒΑ, ΖΕ που τέμνονται από την ΟΖ.

Δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν από δύο γωνίες ίσες μία προς μία, επομένως είναι όμοια.

γ) Λόγω του ερωτήματος (β), τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΕΖ είναι όμοια, άρα θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες οπότε θα ισχύει: $\frac{OA}{OE} = \frac{AB}{EZ}$ (1).

Από τα δεδομένα η ΑΒ = 3 και λόγω του ερωτήματος (α) η ΕΖ = 4.

Το Ε είναι μέσο της ΑΔ και η ΑΔ = 4, οπότε το ΑΕ = 2. Έτσι το ΟΕ = ΟΑ + ΑΕ = ΟΑ + 2.

Επομένως η (1) γράφεται: $\frac{OA}{OA+2} = \frac{3}{4}$ ή $4 \cdot OA = 3 \cdot OA + 6$ ή $OA = 6$.

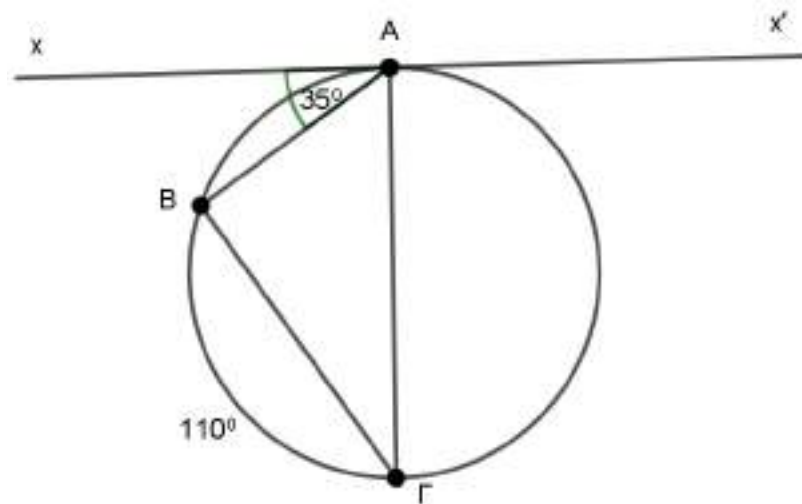
Θέμα 4

Στο παρακάτω σχήμα η xx' είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A και επιπλέον ισχύουν: $\widehat{BAx} = 35^\circ$ και $\widehat{B\Gamma} = 110^\circ$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Γ . (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η χορδή $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Στον κύκλο που δόθηκε, η $\widehat{B\hat{A}x}$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η γωνία Γ είναι η εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, επομένως θα είναι ίσες.

Άρα $\hat{\Gamma} = \widehat{B\hat{A}x} = 35^\circ$.

β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, η γωνία του A είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, που βαίνει στο τόξο $B\Gamma$. Άρα το μέτρο της θα ισούται με το μισό του του μέτρου του τόξου στο

οποίο βαίνει. Δηλαδή $\hat{A} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

γ) Η χορδή $A\Gamma$ θα είναι διάμετρος του κύκλου αν η εγγεγραμμένη γωνία $AB\Gamma$ είναι ορθή. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 55^\circ + 35^\circ = 90^\circ$, οπότε η $\hat{B} = 90^\circ$, επομένως η $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου.

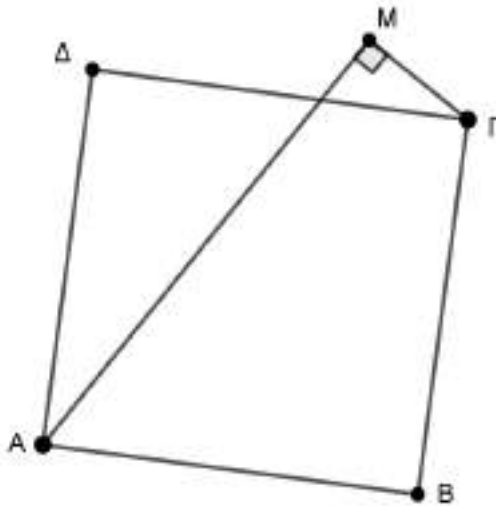
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο M εκτός του τετραγώνου ώστε η γωνία $AM\Gamma$ να είναι ορθή.

α) Να υπολογίσετε σε μοίρες τα μέτρα των γωνιών $A\Gamma\Delta$ και $A\Delta\Gamma$, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

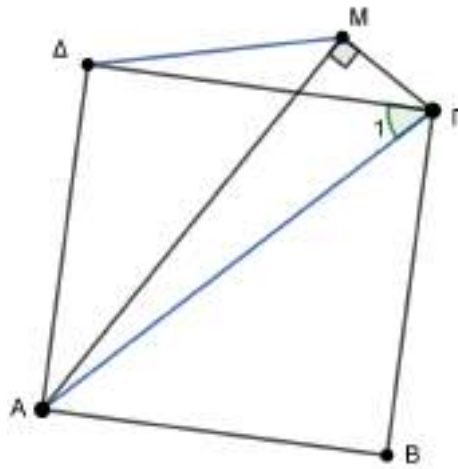
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma M\Delta$ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $AM\Delta$. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α)



Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ η ΑΓ είναι διαγώνιος, άρα διχοτομεί τη γωνία Γ. Οπότε η $\hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$. Άρα η $\hat{ΑΓΔ} = 45^\circ$. Επίσης η γωνία ΑΔΓ είναι γωνία του τετραγώνου, άρα θα είναι ορθή. Δηλαδή $\hat{ΑΔΓ} = 90^\circ$.

β) Από την υπόθεση έχουμε $\hat{ΑΜΓ} = 90^\circ$. Επίσης από το ερώτημα (α) η $\hat{ΑΔΓ} = 90^\circ$. Έτσι έχουμε: $\hat{ΑΜΓ} = \hat{ΑΔΓ}$, δηλαδή στο τετράπλευρο ΑΓΜΔ η πλευρά του ΑΓ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Μ και Δ υπό ίσες γωνίες. Επομένως το τετράπλευρο ΑΓΜΔ είναι εγγράψιμο.

γ) Λόγω του (β) ερωτήματος στο εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΓΜΔ η πλευρά ΑΔ θα φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Μ και Γ υπό ίσες γωνίες. Οπότε λόγω και του (α) ερωτήματος η $\hat{ΑΜΔ} = \hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$.

Θέμα 4

Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, στο οποίο η γωνία Α είναι ορθή και η γωνία Δ είναι διπλάσια της γωνίας Β. Αν το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο τότε:

α) να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Γ.

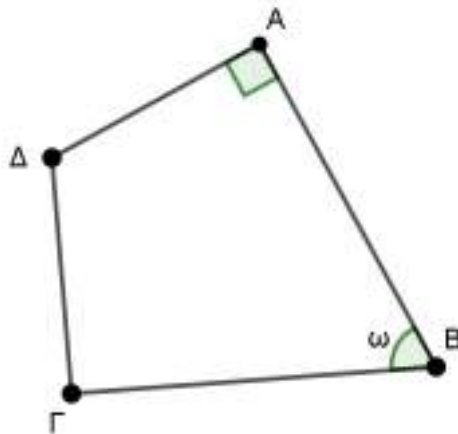
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{\omega} = 60^\circ$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η διαγώνιος ΒΔ = 10 και το σημείο Μ είναι το μέσον της, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΜ.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

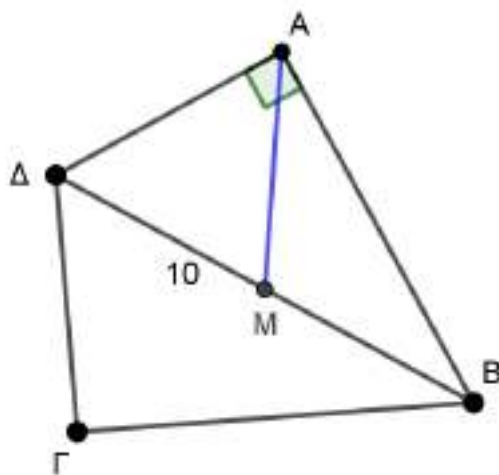
α) Γνωρίζουμε ότι αν ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

Οπότε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ή $90^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ άρα η $\hat{\Gamma} = 90^\circ$.

β) Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\hat{A} = 2\hat{B}$ ή $\hat{A} = 2\hat{\omega}$ (1), εφόσον η $\hat{B} = \hat{\omega}$.

Επίσης το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο οπότε οι απέναντι γωνίες του Β και Δ θα είναι παραπληρωματικές. Επομένως $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$, η οποία λόγω της (1) γράφεται $\hat{\omega} + 2\hat{\omega} = 180^\circ$ ή $3\hat{\omega} = 180^\circ$ άρα $\hat{\omega} = 60^\circ$.

γ)



Λόγω της υπόθεσης, η γωνία Α είναι ορθή, οπότε η ΑΜ είναι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στη υποτείνουσα. Επομένως θα ισούται με

το μισό της. Δηλαδή $AM = \frac{BD}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

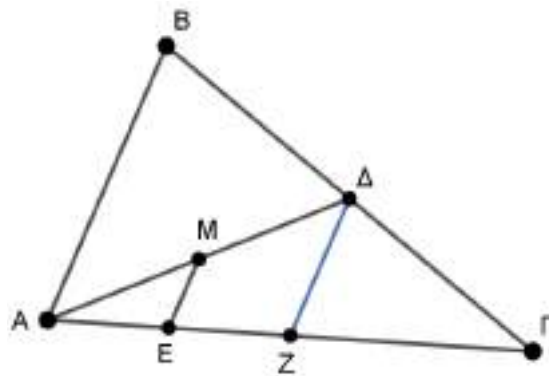
Θέμα 4

Στο παρακάτω σχήμα, από το μέσο M της διαμέσου AD τριγώνου ABΓ, φέρουμε παράλληλη στην AB που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν η παράλληλη από το Δ στην AB τέμνει την ΑΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α) το Ζ είναι μέσο της ΑΓ και $\Delta Z = \frac{AB}{2}$. (Μονάδες 9)

β) το $ME = \frac{AB}{4}$. (Μονάδες 9)

γ) το ΑΕ ισούται με το $\frac{1}{4}$ του ΑΓ. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ABΓ, εφόσον από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά AB, αυτή θα περάσει από το μέσο της τρίτης πλευράς. Επομένως το Z είναι το μέσον της πλευράς ΑΓ. Επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς.

$$\text{Άρα } \Delta Z = \frac{AB}{2}.$$

β) Λόγω του (α) ερωτήματος το $\Delta Z = \frac{AB}{2}$ (1).

Στο τρίγωνο ΑΔΖ, το Μ είναι μέσο της πλευράς του ΑΔ και η ΜΕ // ΔΖ, εφόσον και οι δύο είναι παράλληλες στην ΑΒ. Επομένως το Ε είναι μέσο της ΑΖ, άρα το $ME = \frac{\Delta Z}{2}$

και λόγω της (1) είναι τελικά $ME = \frac{AB}{4}$.

γ) Λόγω του ερωτήματος (α), το Z είναι μέσο της πλευράς ΑΓ, οπότε $AZ = \frac{A\Gamma}{2}$ (2).

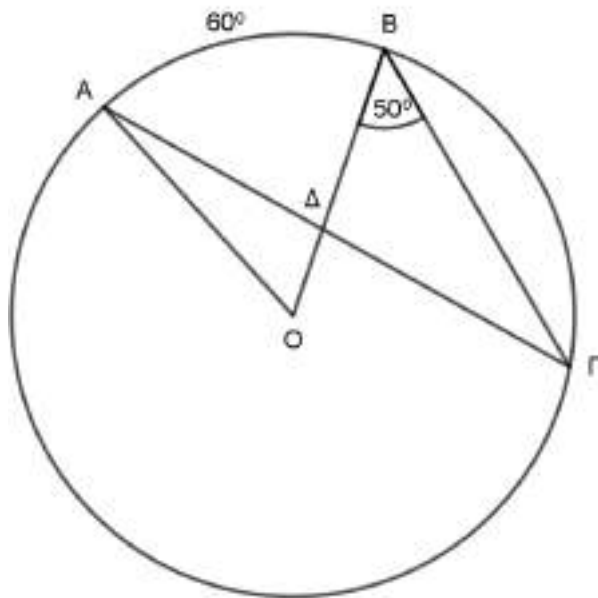
Λόγω του ερωτήματος (β), το Ε είναι μέσο της ΑΖ, οπότε $AE = \frac{AZ}{2}$ (3).

Οπότε η (3) λόγω της (2) δίνει: $AE = \frac{1}{4} A\Gamma$.

Θέμα 4

Στον κύκλο του παρακάτω σχήματος, το O είναι το κέντρο του, το τόξο AB ισούται με 60° και η γωνία B ισούται με 50° .

- α) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία AOB . (Μονάδες 9)
- β) Να υπολογίστε πόσες μοίρες είναι η γωνία Γ . (Μονάδες 9)
- γ) Μπορείτε να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η εγγεγραμμένη γωνία ΓAO ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία AOB είναι επίκεντρη, επομένως θα ισούται με το μέτρο του τόξου AB στο οποίο βαίνει. Άρα $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

β) Η γωνία Γ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, που βαίνει στο τόξο AB άρα θα ισούται

με το μισό του τόξου στο οποίο βαίνει. Δηλαδή $\widehat{\Gamma} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

γ) Στο τρίγωνο BΓΔ είναι: $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{B\Delta\Gamma} = 180^\circ$ ή $50^\circ + 30^\circ + \widehat{B\Delta\Gamma} = 180^\circ$

οπότε η $\widehat{B\Delta\Gamma} = 100^\circ$, επομένως και η $\widehat{A\Delta O} = 100^\circ$ ως κατά κορυφήν της.

Έτσι στο τρίγωνο AΔO έχουμε: $\widehat{A} + \widehat{O} + \widehat{A\Delta O} = 180^\circ$ ή $\widehat{A} + 60^\circ + 100^\circ = 180^\circ$ ή $\widehat{A} = 20^\circ$,

Οπότε $\widehat{\Gamma\Delta O} = 20^\circ$.

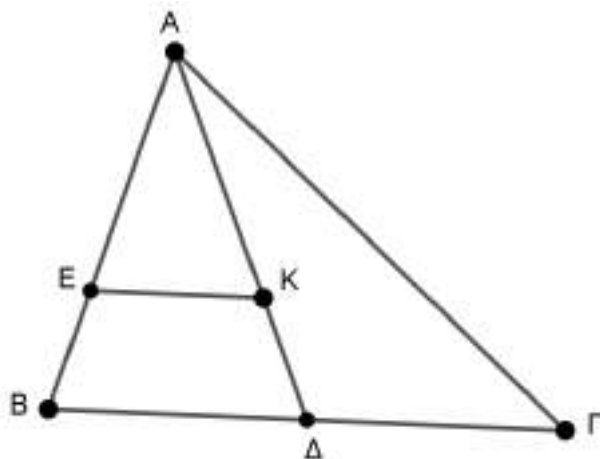
ΘΕΜΑ 4

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, η $A\Delta$ είναι διάμεσος και το σημείο K είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Από το K φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Δίνεται ότι η $AB = 6$.

α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AK}{A\Delta}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEK και $AB\Delta$ είναι όμοια. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του AE . (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου απέχει από την κορυφή τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου, οπότε $AK = \frac{2}{3} AD$. Επομένως $\frac{AK}{AD} = \frac{2}{3}$.

β) Από τα δεδομένα η $EK \parallel BD$ οπότε τα τρίγωνα AEK και ABD έχουν:

$\widehat{AK} = \widehat{BD}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων EK , BD που τέμνονται από την AB .

$\widehat{KE} = \widehat{DB}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων KE , DB που τέμνονται από την AD .

Δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν από δύο γωνίες ίσες μία προς μία, επομένως είναι όμοια.

γ) Λόγω του ερωτήματος (β), τα τρίγωνα AEK και ABD είναι όμοια, άρα θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες οπότε θα ισχύει: $\frac{AE}{AB} = \frac{AK}{AD}$ (1).

Από τα δεδομένα η $AB = 6$ και λόγω του ερωτήματος (α): $\frac{AK}{AD} = \frac{2}{3}$.

Επομένως η (1) γράφεται: $\frac{AE}{6} = \frac{2}{3}$ ή $3 \cdot AE = 12$ ή $AE = 4$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Φέρνουμε το ύψος BH . Να αποδείξετε ότι:

α)

i. $Z\Delta = E\Gamma$

(Μονάδες 07)

ii. $HE = E\Gamma$.

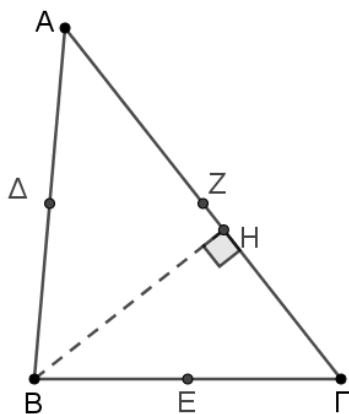
(Μονάδες 07)

β) Η ΔE είναι παράλληλη στην $A\Gamma$.

(Μονάδες 06)

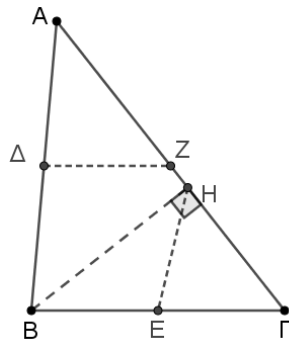
γ) $\Delta H = ZE$.

(Μονάδες 05)



ΛΥΣΗ

α)

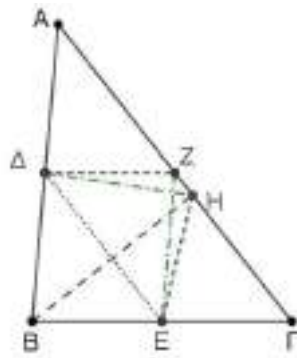


- i. Στο τρίγωνο ABΓ τα σημεία Δ και Z είναι μέσα των πλευρών AB και ΑΓ αντίστοιχα. Επομένως, το τμήμα ΔZ θα είναι ίσο και παράλληλο με το μισό της ΒΓ, δηλαδή:

$$\Delta Z = \frac{B\Gamma}{2} = E\Gamma$$

- ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο BHΓ η HE είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ. Επομένως, η HE θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή:

$$HE = \frac{B\Gamma}{2} = E\Gamma$$



- β) Στο τρίγωνο ABΓ τα σημεία Δ και E είναι μέσα των πλευρών AB και ΒΓ αντίστοιχα. Επομένως, το τμήμα ΔE θα είναι ίσο και παράλληλο με το μισό της ΑΓ, δηλαδή ΔE//ΑΓ.

- γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο BHA η ΗΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΑ.

Επομένως, η ΗΔ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΑ, δηλαδή: $H\Delta = \frac{AB}{2}$. (1)

Στο τρίγωνο ABΓ τα σημεία E και Z είναι μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Επομένως, το τμήμα EZ θα είναι ίσο και παράλληλο με το μισό της AB, δηλαδή: $ZE = \frac{AB}{2}$. (2)

Από (1) και (2) ZE και ΔH θα είναι ίσες.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2 και Ε είναι το μέσο της ΔΓ.

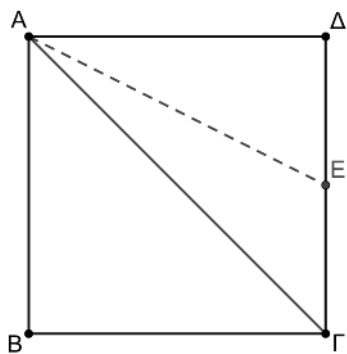
Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΓ = 2\sqrt{2}$.

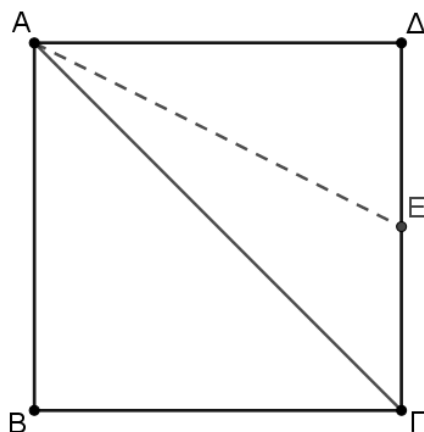
(Μονάδες 12)

β) $ΑΕ = \sqrt{5}$.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο AΔΓ:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = (2)^2 + (2)^2 = 8, \text{ άρα } ΑΓ = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

β) Αφού το Ε είναι μέσο της ΔΓ θα είναι $ΔΕ = \frac{ΔΓ}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ:

$$ΑΕ^2 = ΑΔ^2 + ΔΕ^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5, \text{ άρα } ΑΕ = \sqrt{5}.$$

ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο με κέντρο O θεωρούμε τη διάμετρο $ΑΓ = 10$ και τη χορδή $ΑΒ = 5$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

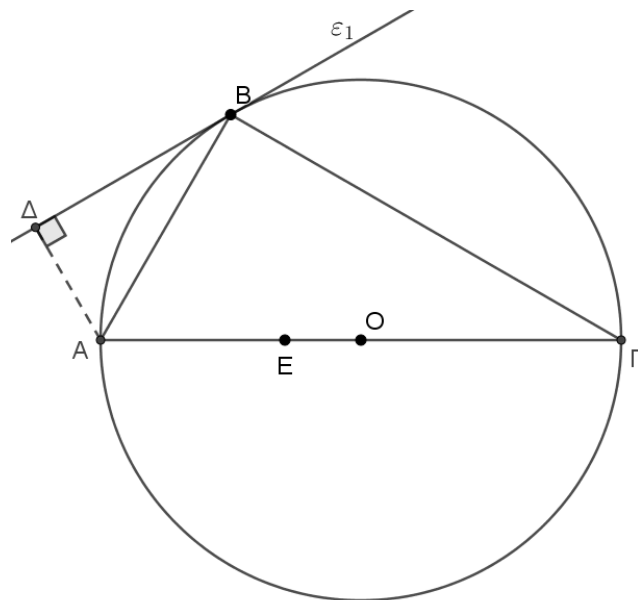
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = 90^\circ$. (Μονάδες 10)

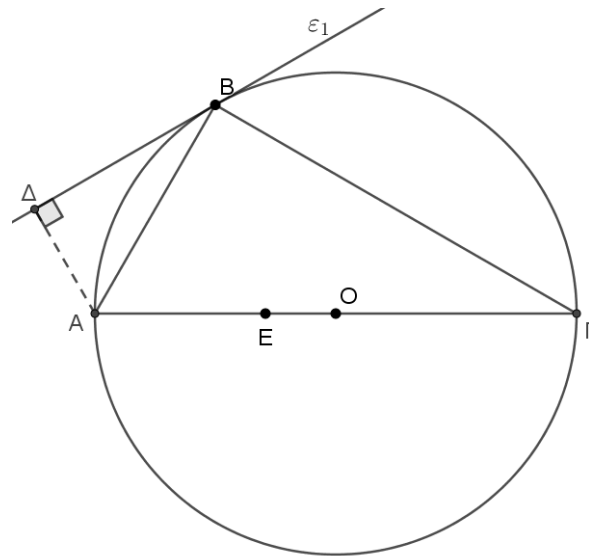
ii. $ΒΓ = 5\sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

β) Έστω E τυχαίο σημείο του τμήματος $ΑΟ$ διαφορετικό του σημείου A . Φέρουμε την εφαπτομένη (ε_1) του κύκλου στο σημείο B και έστω $ΑΔ$ το κάθετο τμήμα στην (ε_1). Ποια πρέπει να είναι η θέση του E ώστε το τετράπλευρο $ΑΔΒΕ$ να είναι εγγράψιμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)



ΛΥΣΗ



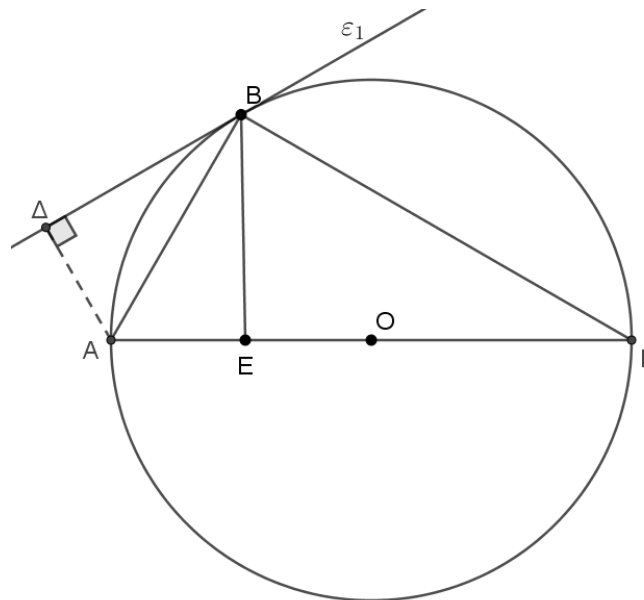
α) Η διάμετρος ΑΓ ισούται με 10 οπότε η ακτίνα ρ είναι 5.

- i. Η γωνία $\hat{B}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει σε ημικόκλιο, οπότε $\hat{B} = 90^\circ$.
- ii. Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα στο $\triangle AB\Gamma$, οπότε:

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 \quad \text{ń} \quad 10^2 = 5^2 + B\Gamma^2 \quad \text{ń} \quad B\Gamma^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$$

$$\text{ή } B\Gamma = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}.$$

β)



Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι εγγράψιμο αν και μόνο αν δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές. Επειδή $\hat{\Delta} = 90^\circ$, αρκεί να δειχτεί ότι $\hat{\Delta} + \hat{E} = 180^\circ$ ή $90^\circ + \hat{E} = 180^\circ$ ή $\hat{E} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Άρα το σημείο Ε είναι η προβολή του Β στο τμήμα ΑΟ.

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- i. Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
- ii. Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.
- iii. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.
- iv. Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.
- v. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με τον λόγο των προβολών τους στην υποτείνουσα.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

(Μονάδες 15)

α)

i. Λάθος

ii. Σωστό

Πόρισμα i, σελίδα 129 σχολικό βιβλίο (τεύχος Α').

iii. Σωστό

Πόρισμα, σελίδα 15 σχολικό βιβλίο (τεύχος Β').

iv. Σωστό

Πόρισμα ii, σελίδα 33 σχολικό βιβλίο (τεύχος Β').

v. Λάθος

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με τον λόγο των προβολών τους στην υποτείνουσα (Πόρισμα, σελίδα 44 σχολικό βιβλίο (τεύχος Β').

β) Απόδειξη, σελίδα 106 σχολικό βιβλίο (τεύχος Α').

ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα, το AD είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$. Αν είναι $AB = 6$, $B\Gamma = 12$ και $\Delta\Gamma = 9$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AD = \sqrt{27}$.

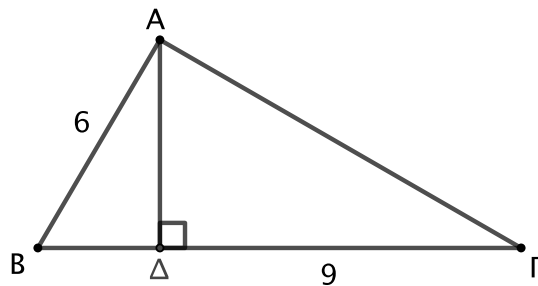
(Μονάδες 08)

ii. $A\Gamma = \sqrt{108}$.

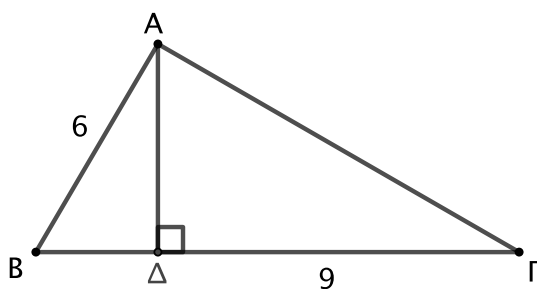
(Μονάδες 08)

β) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 09)



ΛΥΣΗ



α)

i. Είναι:

$$B\Delta = B\Gamma - \Delta\Gamma = 12 - 9 = 3$$

Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$$

Άρα, $A\Delta = \sqrt{27}$.

ii. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = \sqrt{27}^2 + 9^2 = 27 + 81 = 108$$

Άρα, $A\Gamma = \sqrt{108}$.

β) Εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΓ. Είναι:

$$B\Gamma^2 = 12^2 = 144$$

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 6^2 + \sqrt{108}^2 = 36 + 108 = 144$$

Αφού ισχύει $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

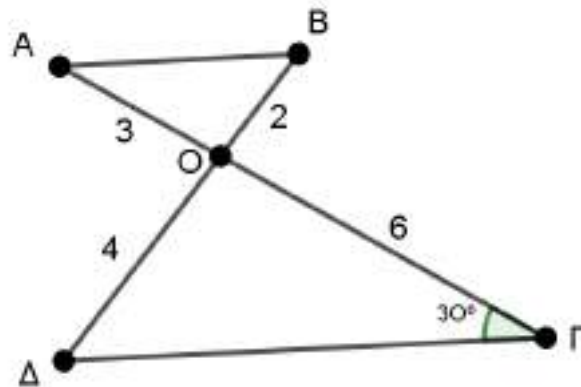
ΘΕΜΑ 2

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν $OA = 3$, $OB = 2$, $OG = 6$, $OD = 4$ και η γωνία ΟΓΔ ισούται με 30° τότε:

α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια. (Μονάδες 9)

β) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα των λόγων: $\frac{OA}{\dots} = \frac{\dots}{OD} = \frac{AB}{\dots}$. (Μονάδες 7)

γ) να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΟΑΒ. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ έχουν:

$$\frac{ΟΑ}{ΟΓ} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \frac{ΟΒ}{ΟΔ} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \text{ οπότε } \frac{ΟΑ}{ΟΓ} = \frac{ΟΒ}{ΟΔ},$$

και $\widehat{ΑΟΒ} = \widehat{ΓΟΔ}$, ως κατακορυφήν.

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

β) Λόγω του ερωτήματος (α) τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια, οπότε οι λόγοι των

ομολόγων πλευρών τους θα είναι ίσοι. Δηλαδή: $\frac{ΟΑ}{ΟΓ} = \frac{ΟΒ}{ΟΔ} = \frac{ΑΒ}{ΓΔ}$.

γ) Λόγω του ερωτήματος (α) τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια, οπότε οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ομόλογες πλευρές τους ΟΒ και ΟΔ θα είναι ίσες.

Άρα $\widehat{ΟΑΒ} = \widehat{ΟΓΔ} = 30^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

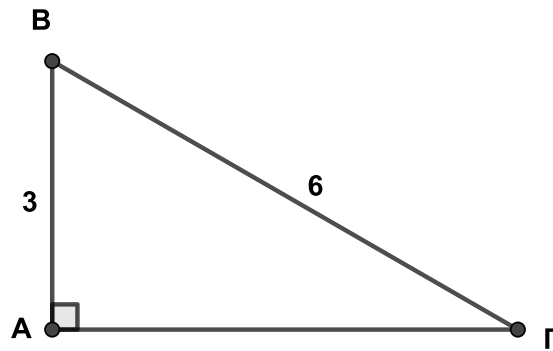
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος η $AB = 3$ και η $B\Gamma = 6$. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνίας Γ .

(Μονάδες 13)

β) το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.

(Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα του σχήματος η κάθετη πλευρά AB είναι η μισή της υποτείνουσας ΒΓ, οπότε η απέναντι οξεία γωνία Γ θα ισούται με 30° .

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 \text{ ή } A\Gamma^2 = 6^2 - 3^2 \text{ ή } A\Gamma^2 = 36 - 9 \text{ ή } A\Gamma^2 = 27,$$

$$\text{οπότε } A\Gamma = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Ένα τετράπλευρο που έχει τρεις γωνίες ορθές είναι ορθογώνιο.
- ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με την επίκεντρη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο.
- iii. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.
- iv. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.
- v. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

(Μονάδες 10)

β) Σε κάθε παραλληλόγραμμο, να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

- i. Σωστό
- ii. Λάθος
- iii. Σωστό
- iv. Λάθος
- v. Σωστό

β) Πρόταση σελίδα 102

ΘΕΜΑ 2

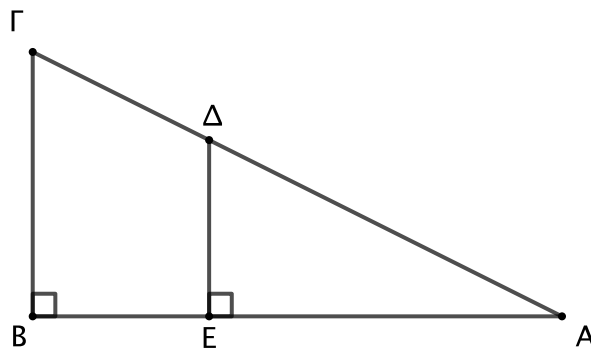
Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{A\hat{E}\Delta}$ είναι ορθές.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\text{A}\epsilon\Delta$ και $\text{A}\text{B}\Gamma$ είναι όμοια.

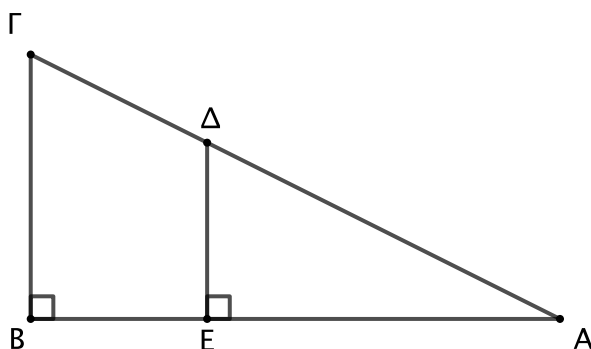
(Μονάδες 13)

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων $\text{A}\epsilon\Delta$ και $\text{A}\text{B}\Gamma$.

(Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ έχουν $\widehat{A\hat{E}\Delta} = \widehat{B}$ (ως ορθές) και κοινή τη γωνία $\widehat{A}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{A} = \widehat{A}$	$\widehat{A\hat{E}\Delta} = \widehat{B}$	$\widehat{A\hat{\Delta}E} = \widehat{\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΕΔ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A E}{A B}$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και είναι $\widehat{\Delta AB} = 130^\circ$ και $\widehat{A\Gamma B} = 110^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{\Gamma} = 50^\circ$ και $\hat{\Delta} = 70^\circ$,

(Μονάδες 10)

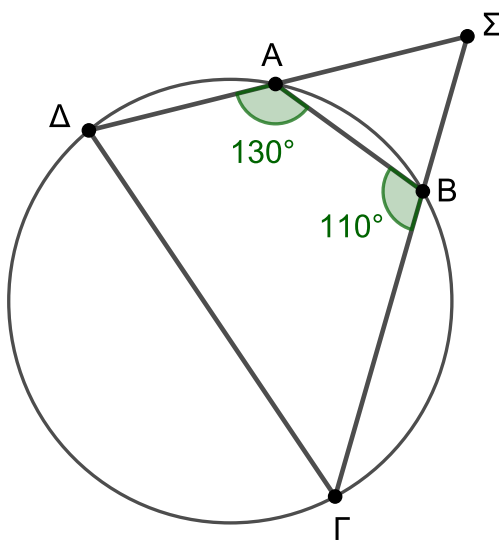
ii. $\Sigma\hat{A}B = 50^\circ$ και $\Sigma\hat{B}A = 70^\circ$.

(Μονάδες 10)

β) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

Επειδή $\Sigma\hat{A}B = \hat{\Gamma}$ και $\Sigma\hat{B}A = \dots$, τα τρίγωνα ΣAB και $\dots$ είναι όμοια.

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) i) Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές. Επομένως:

$$\hat{\Gamma} = 180^\circ - \Delta\hat{A}B = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ,$$

$$\hat{\Delta} = 180^\circ - A\hat{B}\Gamma = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

ii) Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του. Επομένως:

$$\Sigma\hat{A}B = \hat{\Gamma} = 50^\circ,$$

$$\Sigma\hat{B}A = \hat{\Delta} = 70^\circ.$$

β) Επειδή $\Sigma\hat{A}B = \hat{\Gamma}$ και $\Sigma\hat{B}A = \hat{\Delta}$, τα τρίγωνα ΣΑΒ και ΣΓΔ είναι όμοια.

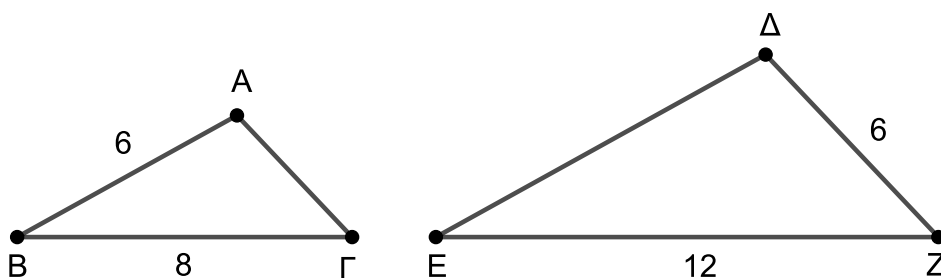
ΘΕΜΑ 2

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ στο παρακάτω σχήμα είναι όμοια και η ομόλογη πλευρά της $B\Gamma$ είναι η EZ . Δίνονται επίσης $AB = 6$, $B\Gamma = 8$, $\Delta Z = 6$ και $EZ = 12$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι $\frac{2}{3}$. (Μονάδες 8)

β) Να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα των λόγων $\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\dots}$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών $A\Gamma$ και ΔE . (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Οι πλευρές $B\Gamma = 8$ και $EZ = 12$ είναι ομόλογες, οπότε ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων

$AB\Gamma$ και ΔEZ είναι $\lambda = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

β) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια, έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, οπότε η στην ισότητα των λόγων συμπληρώνεται όπως παρακάτω

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}.$$

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα με αντικατάσταση των γνωστών μηκών θα έχουμε

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} \quad \text{ή} \quad \frac{6}{\Delta E} = \frac{8}{12} = \frac{A\Gamma}{6} \quad \text{ή} \quad \frac{6}{\Delta E} = \frac{2}{3} = \frac{A\Gamma}{6}$$

Επομένως

$$\frac{2}{3} = \frac{A\Gamma}{6} \quad \text{ή} \quad 3 \cdot A\Gamma = 12 \quad \text{ή} \quad A\Gamma = 4$$

$$\text{και} \quad \frac{2}{3} = \frac{6}{\Delta E} \quad \text{ή} \quad 2 \cdot \Delta E = 18 \quad \text{ή} \quad \Delta E = 9.$$

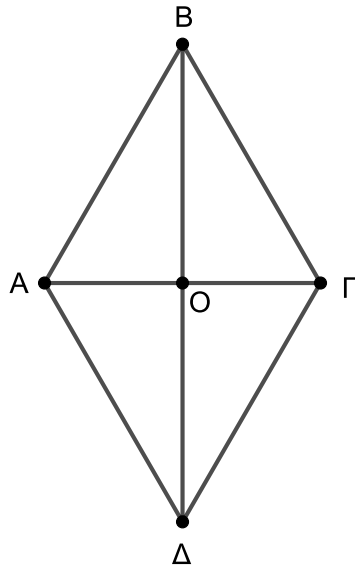
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος με κέντρο O , $AB = 4$ και $OA = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{ABO} = 30^\circ$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τρεις γωνίες στο παρακάτω σχήμα, εκτός της $\widehat{ABO}$, που έχουν μέτρο 30° . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα στο παρακάτω σχήμα, εκτός του AB , που έχουν μήκος 4. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα, άρα το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο με $\hat{A}OB = 90^\circ$. Σ' αυτό το ορθογώνιο τρίγωνο, η υποτείνουσα $AB = 4$ και η κάθετη πλευρά $OA = 2$, άρα είναι το μισό της υποτείνουσας. Επομένως η απέναντι γωνία της OA , η $\hat{ABO} = 30^\circ$.

β) Οι απέναντι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες, άρα $\hat{AB}\Gamma = \hat{\Gamma}\Delta A$. Επίσης οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, άρα η διαγώνιος $B\Delta$ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{AB}\Gamma$ και $\hat{\Gamma}\Delta A$. Επομένως $\hat{ABO} = \hat{\Gamma BO} = \hat{\Gamma\Delta O} = \hat{A\Delta O}$.

Επειδή $\hat{ABO} = 30^\circ$, θα είναι $\hat{\Gamma BO} = \hat{\Gamma\Delta O} = \hat{A\Delta O} = 30^\circ$.

γ) Όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες, άρα $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$. Επειδή $AB = 4$ θα είναι $B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A = 4$.

Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται, άρα το O είναι το μέσο της $A\Gamma$ και επειδή $OA = 2$ θα είναι $A\Gamma = 2OA = 4$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος με κέντρο A και τα σημεία του B , Γ και Δ όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο K και είναι $KA = K\Gamma$ και $KB = K\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AB = A\Gamma = A\Delta$.

(Μονάδες 7)

ii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

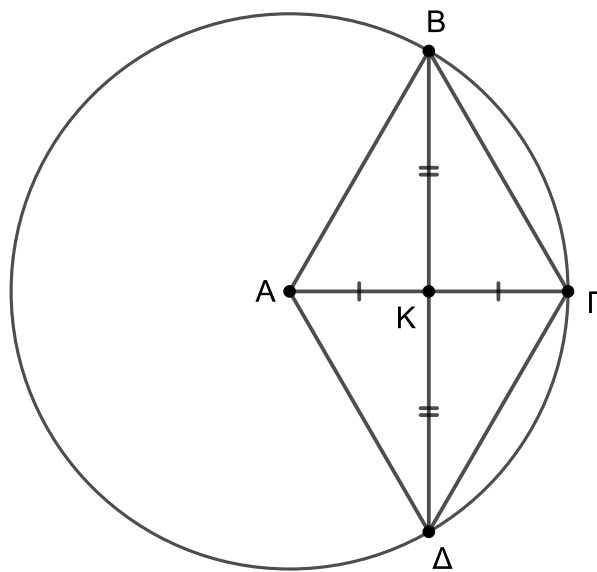
(Μονάδες 8)

iii. Η γωνία $\widehat{K\hat{B}\Gamma} = 30^\circ$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το μέτρο του τόξου $\widehat{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) i) Όλα τα σημεία ενός κύκλου απέχουν από το κέντρο του απόσταση ίση με την ακτίνα. Επειδή τα σημεία Β, Γ και Δ ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το Α είναι $AB = AG = AD$.

ii) Επειδή $KA = KG$ και $KB = KD$, οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται, άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης είναι $AB = AD$ άρα το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

iii) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα, άρα το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{BK\Gamma} = 90^\circ$. Το Κ είναι το μέσο της ΑΓ άρα $K\Gamma = \frac{AG}{2}$ και επειδή $AG = BG$ ως πλευρές του ρόμβου, θα είναι $K\Gamma = \frac{BG}{2}$. Οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΓ η κάθετη πλευρά ΚΓ είναι το μισό της υποτείνουσας ΒΓ. Επομένως η απέναντι γωνία της, η $\widehat{KB\Gamma} = 30^\circ$.

Εναλλακτικά: Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, άρα $AB = BG$ και επειδή $AB = AG$, από το i) ερώτημα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως $\widehat{AB\Gamma} = 60^\circ$ και επειδή η διαγώνιος ΒΔ του ρόμβου διχοτομεί τη γωνία $\widehat{AB\Gamma}$, θα είναι $\widehat{KB\Gamma} = 30^\circ$.

β) Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της. Επειδή η γωνία $\widehat{AB\Gamma} = 30^\circ$ είναι εγγεγραμμένη του κύκλου που βαίνει στο τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$, το μέτρο του τόξου $\widehat{\Gamma\Delta}$ θα ισούται με το διπλάσιο του μέτρου της γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$. Επομένως $\widehat{\Gamma\Delta} = 60^\circ$.

ΘΕΜΑ 4

Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος οι ΔA και $B\Gamma$ είναι κάθετες στην ΔB και επίσης είναι $A\Delta = B\Gamma = 3$.

α) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

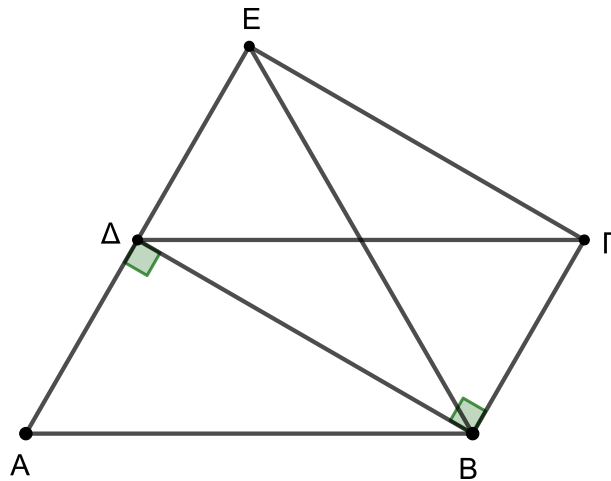
β) Προεκτείνουμε την $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = 3$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

ii. Το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ οι πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι κάθετες στην $B\Delta$, άρα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Επίσης από τα δεδομένα είναι $A\Delta = B\Gamma$. Επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αφού δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

β) i) Οι ΔE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες, αφού οι $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι παράλληλες. Επίσης είναι $\Delta E = B\Gamma = 3$. Επομένως το $\Delta B\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο αφού δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες. Είναι επίσης $\widehat{B\Gamma} = 90^\circ$, αφού η $B\Gamma$ είναι κάθετη στην $B\Delta$, επομένως το $\Delta B\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

ii) Επειδή το $\Delta B\Gamma E$ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοι του είναι ίσες άρα $BE = \Gamma\Delta$. Επίσης είναι $BA = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Επομένως $BA = BE$. Άρα τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4

Στον κύκλο του παρακάτω σχήματος είναι $\widehat{AB} = 120^\circ$, $\widehat{BG} = 90^\circ$, $\widehat{GD} = 90^\circ$ και $\widehat{DA} = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες του τετραπλεύρου ABΓΔ έχουν μέτρα:

$$\widehat{A} = 90^\circ, \widehat{B} = 75^\circ, \widehat{\Gamma} = 90^\circ \text{ και } \widehat{D} = 105^\circ.$$

(Μονάδες 12)

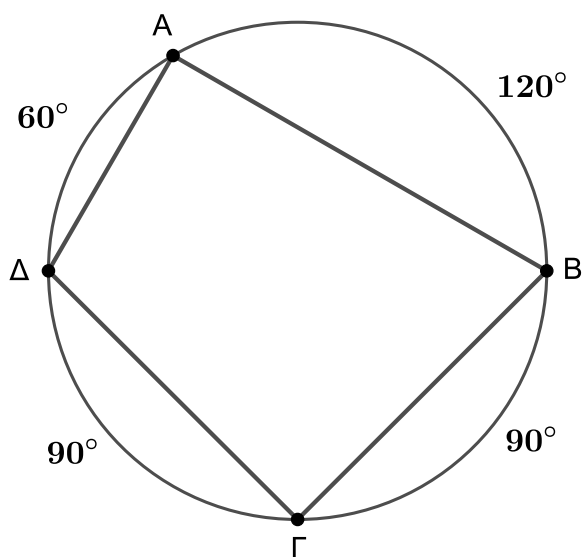
β) Έστω ότι είναι $B\Delta = 2$. Να αποδείξετε ότι:

i. $A\Delta = 1$.

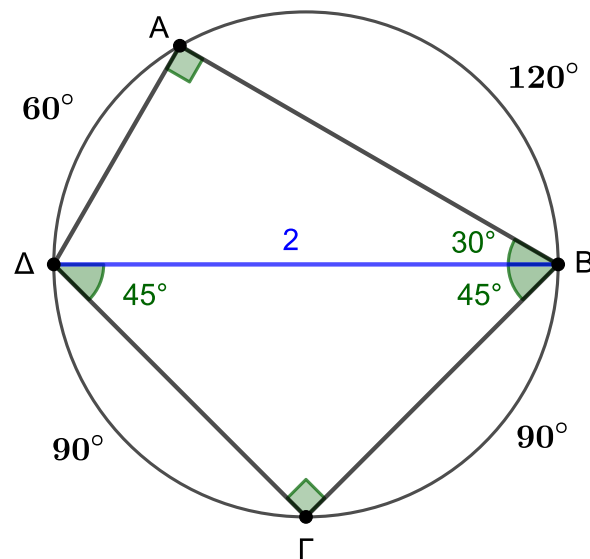
(Μονάδες 6)

ii. $B\Gamma = \sqrt{2}$.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ



α) Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της. Οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ βαίνουν αντίστοιχα, στα τόξα $\widehat{B\Gamma\Delta} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta A} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$, $\widehat{\Delta A B} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ και $\widehat{A B \Gamma} = 120^\circ + 90^\circ = 210^\circ$, άρα θα είναι

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ, \quad \hat{B} = \frac{1}{2} \cdot 150^\circ = 75^\circ, \quad \hat{\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ \quad \text{και} \quad \hat{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 210^\circ = 105^\circ.$$

β) i) Στο ερώτημα α) βρήκαμε ότι $\hat{A} = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ορθογώνιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΔ, η υποτείνουσα είναι $B\Delta = 2$ και η γωνία $\widehat{A B \Delta} = 30^\circ$, ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\widehat{\Delta A} = 60^\circ$. Επομένως η απέναντι πλευρά ΑΔ είναι το μισό της υποτείνουσας, άρα $A\Delta = 1$.

ii) Στο ερώτημα α) βρήκαμε ότι $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ η υποτείνουσα είναι $B\Delta = 2$. Επίσης είναι $\widehat{\Delta B \Gamma} = \widehat{B \Delta \Gamma} = 45^\circ$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε τόξο 90° . Άρα το τρίγωνο ΒΓΔ είναι και ισοσκελές με $B\Gamma = \Gamma\Delta$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα τότε έχουμε

$$B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = B\Delta^2 \quad \text{ή} \quad 2B\Gamma^2 = 2^2 \quad \text{ή} \quad B\Gamma^2 = 2 \quad \text{ή} \quad B\Gamma = \sqrt{2}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις $AB = 4$ και $\Gamma\Delta = 8$, ίσες πλευρές $B\Gamma = A\Delta = 4$ και τα ύψη του AE και BZ .

α) Να αποδείξετε ότι:

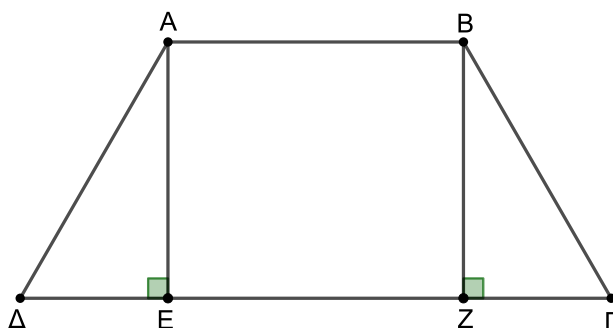
i. $EZ = 4$. (Μονάδες 5)

ii. $\Delta E = \Gamma Z = 2$. (Μονάδες 6)

iii. $\widehat{\Delta A E} = 30^\circ$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μέτρα των προσκείμενων γωνιών σε κάθε βάση του τραpezίου.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) i) Το ABZE έχει παράλληλες τις AB και ΓΔ ως βάσεις του τραπεζίου, καθώς και τις ΑΕ και ΒΖ ως ύψη του τραπεζίου, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης το ABZE έχει μία ορθή γωνία ($\hat{E} = 90^\circ$), άρα είναι ορθογώνιο. Επομένως οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, άρα $EZ = AB = 4$.

ii) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ ($\hat{E} = 90^\circ$) και ΒΖΓ ($\hat{Z} = 90^\circ$) είναι ίσα αφού έχουν ίσες υποτείνουσες $AD = BG = 4$ και μία κάθετη πλευρά $AE = BZ$, ως ύψη του τραπεζίου.

Επομένως $DE = GZ$. Είναι όμως $DE + GZ = GD - EZ = 8 - 4 = 4$, άρα $DE = GZ = \frac{4}{2} = 2$.

iii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ ($\hat{E} = 90^\circ$), η κάθετη πλευρά ΔΕ είναι το μισό της υποτείνουσας ΑΔ αφού $DE = 2$ και $AD = 4$, άρα η απέναντι γωνία της ΔΕ, η $\hat{DAE} = 30^\circ$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ ($\hat{E} = 90^\circ$), είναι $\hat{DAE} = 30^\circ$, όπως βρήκαμε προηγουμένως. Επομένως $\hat{ADE} = 90^\circ - \hat{DAE} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Επίσης θα είναι $\hat{BZG} = \hat{ADE} = 60^\circ$, ως προσκείμενες στη βάση ΓΔ, αφού στο ισοσκελές τραπέζιο οι γωνίες που πρόσκεινται σε κάθε βάση είναι ίσες.

Στο ορθογώνιο ABZE είναι $\hat{EAB} = 90^\circ$, επομένως $\hat{DAB} = \hat{DAE} + \hat{EAB} = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$.

Επίσης θα είναι $\hat{ABG} = \hat{DAB} = 120^\circ$, ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ, αφού στο ισοσκελές τραπέζιο οι γωνίες που πρόσκεινται σε κάθε βάση είναι ίσες.

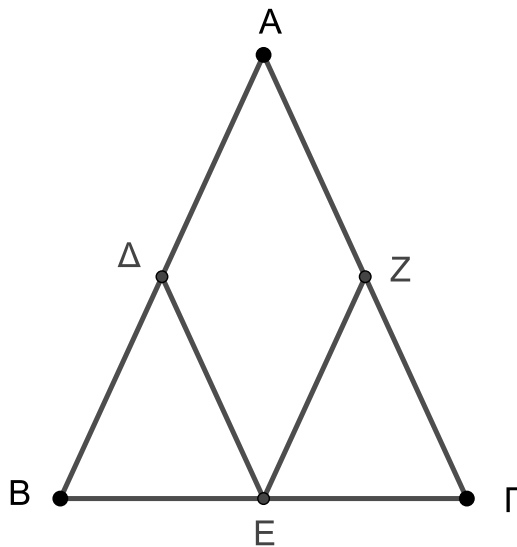
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και έστω Δ, E και Z τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta EZ$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

β) Αν $\widehat{B} = 75^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του ρόμβου $A\Delta EZ$. (Μονάδες 10)

γ) Ποιο θα πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\widehat{B}$ ώστε το τετράπλευρο $A\Delta EZ$ να είναι τετράγωνο; Τι τρίγωνο είναι τότε το $AB\Gamma$; (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε είναι παράλληλο προς την πλευρά ΑΓ και ίσο με το μισό της. Επομένως οι ΔΕ και ΑΖ είναι παράλληλες και $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2} = ΑΖ$, αφού το Ζ είναι το μέσο της ΑΓ.

Επομένως το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

Επίσης είναι $ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2} = ΑΖ$, αφού τα Δ και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Επομένως το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι ρόμβος αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

β) Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$, είναι $\hat{\Gamma} = \hat{Β} = 75^\circ$ και επομένως $\hat{Α} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

Οι απέναντι γωνίες του ρόμβου ανά δυο είναι ίσες, άρα $\hat{ΔΕΖ} = \hat{Α} = 30^\circ$ και $\hat{ΑΔΕ} = \hat{ΑΖΕ}$.

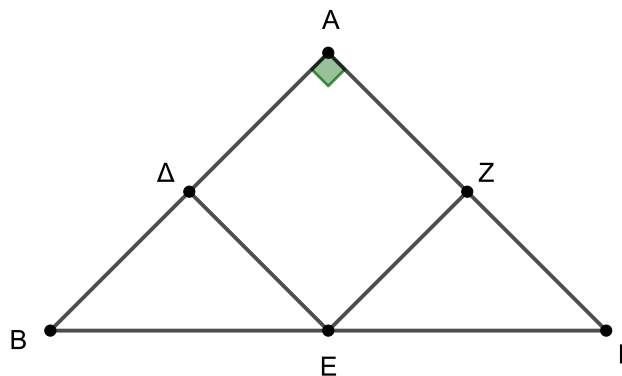
Όμως $\hat{ΑΔΕ} + \hat{ΑΖΕ} = 360^\circ - \hat{ΔΕΖ} - \hat{Α} = 360^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 300^\circ$,

άρα $\hat{ΑΔΕ} = \hat{ΑΖΕ} = 150^\circ$.

γ) Το ΑΔΕΖ είναι ρόμβος, οπότε θα είναι τετράγωνο, αν επιπλέον είναι ορθογώνιο. Τότε

$\hat{Α} = 90^\circ$, οπότε $\hat{Β} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{Α}}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$. Στην περίπτωση αυτή, το τρίγωνο

ΑΒΓ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.



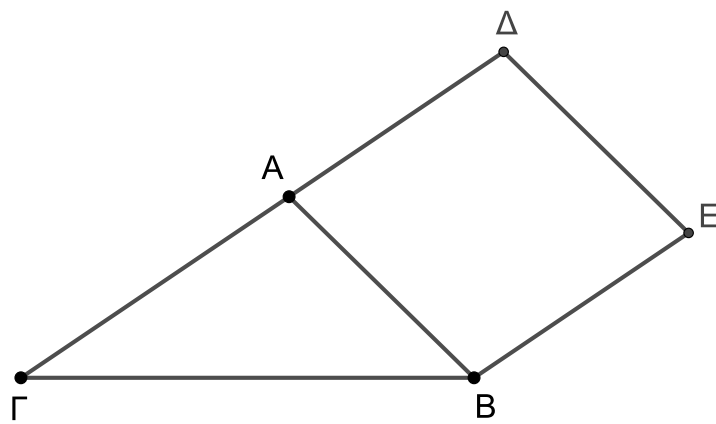
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΓA κατά τμήμα $A\Delta = AB$. Από τα B και Δ φέρνουμε παράλληλες, αντίστοιχα προς τις AD και AB , οι οποίες τέμνονται στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

β) Έστω ότι $AB = 4$, $A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 7$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο ρόμβος $ABE\Delta$ έχουν ίσες περιμέτρους. (Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$, $B\Gamma = \alpha$ και ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο ρόμβος $ABE\Delta$ έχουν ίσες περιμέτρους. Να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{3}$. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα, οι πλευρές BE και AD είναι παράλληλες και οι πλευρές DE και AB είναι παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο ABEΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον το παραλληλόγραμμο ABEΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες αφού $AD = AB$. Επομένως το ABEΔ είναι ρόμβος.

β) Οι περίμετροι του τριγώνου ABΓ και του ρόμβου ABEΔ είναι αντίστοιχα
 $AB + AG + BG = 4 + 5 + 7 = 16$ και $4 \cdot AB = 4 \cdot 4 = 16$, οπότε είναι ίσες.

γ) Οι περίμετροι του τριγώνου ABΓ και του ρόμβου ABEΔ είναι αντίστοιχα
 $AB + AG + BG = \gamma + \beta + \alpha$ και $4 \cdot AB = 4\gamma$ και επειδή είναι ίσες έχουμε
 $4\gamma = \alpha + \beta + \gamma$ ή $4\gamma - \gamma = \alpha + \beta$ ή $3\gamma = \alpha + \beta$ ή $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{3}$.

ΘΕΜΑ 4

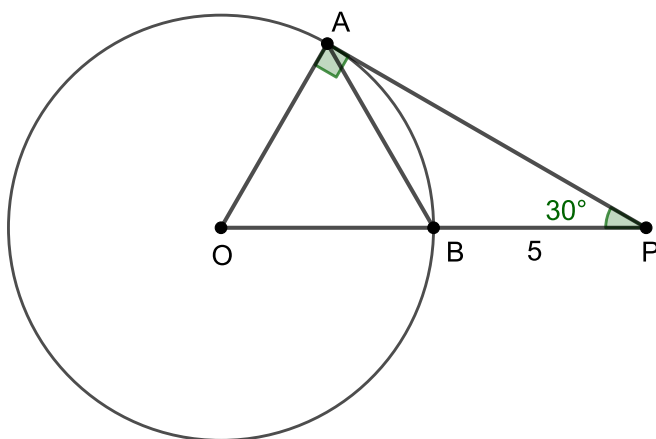
Στο παρακάτω σχήμα ο κύκλος έχει κέντρο O , το PA είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου από το σημείο P , η PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο B και είναι $\widehat{APO} = 30^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{AOB} = 60^\circ$, (Μονάδες 9)

ii. $\widehat{BAP} = 30^\circ$. (Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον είναι $PB = 5$, να βρείτε το μήκος της ακτίνας του κύκλου. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) i) Το PA είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου, άρα η γωνία $\widehat{PAO} = 90^\circ$. Είναι $\widehat{APO} = 30^\circ$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο PAO έχουμε

$$\widehat{AOB} = \widehat{PAO} - \widehat{APO} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

ii) Η γωνία $\widehat{BAP}$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης οπότε είναι ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, άρα με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

Επομένως είναι $\widehat{BAP} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.

β) Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου, τότε $OA = OB = \rho$ και $PO = PB + OB = 5 + \rho$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο PAO η γωνία $\widehat{APB} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά, η OA είναι το μισό της υποτείνουσας PO. Επομένως

$$OA = \frac{1}{2} PO \quad \text{ή} \quad 2OA = PO \quad \text{ή} \quad 2\rho = 5 + \rho \quad \text{ή} \quad 2\rho - \rho = 5 \quad \text{ή} \quad \rho = 5.$$

Εναλλακτικά: Επειδή $\widehat{BAP} = \widehat{APO} = 30^\circ$, το τρίγωνο BAP είναι ισοσκελές με $BA = BP = 5$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο OAB ($OA = OB = \rho$) είναι $\widehat{AOB} = 60^\circ$, οπότε αυτό είναι ισόπλευρο.

Επομένως $\rho = OA = AB = 5$.

ΘΕΜΑ 4

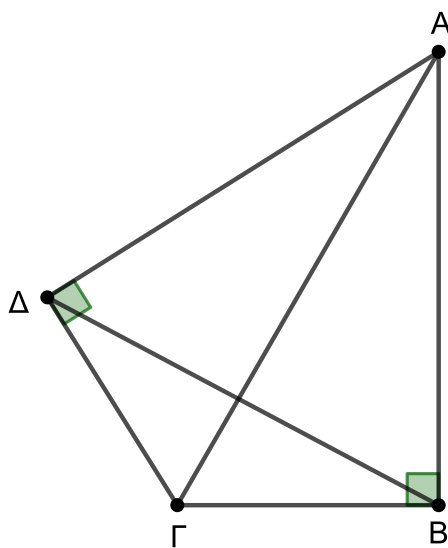
Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνια με $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Delta\Gamma} = 90^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. (Μονάδες 8)
- ii. Η $A\Gamma$ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 7)

β) Έστω ότι $\widehat{B\Delta\Gamma} = 30^\circ$ και $B\Gamma = 4$. Να αποδείξετε ότι:

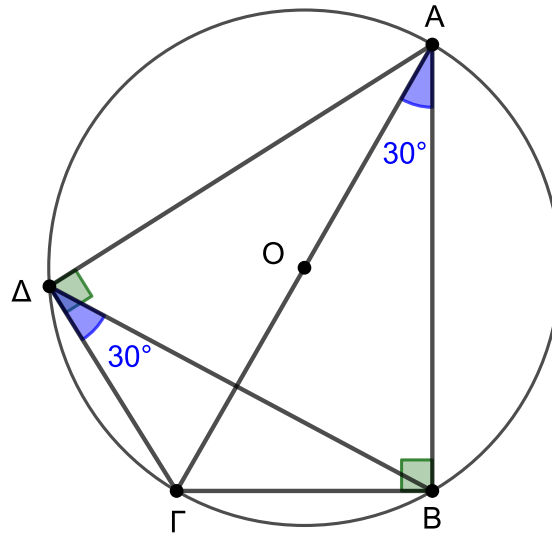
- i. $\widehat{BA\Gamma} = 30^\circ$. (Μονάδες 5)
- ii. $A\Gamma = 8$. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) i) Είναι $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Delta\Gamma} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, άρα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αφού δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

ii) Η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ είναι ορθή, άρα βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε η AG είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του $AB\Gamma\Delta$.



β) i) Επειδή το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες. Επομένως θα είναι $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{B\Delta\Gamma} = 30^\circ$.

ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα την AG , είναι $\widehat{B\Delta\Gamma} = 30^\circ$ και η απέναντι κάθετη πλευρά $B\Gamma = 4$. Επομένως η υποτείνουσα AG είναι διπλάσια της $B\Gamma$, άρα $AG = 8$.

ΘΕΜΑ 4

Το εγγεγραμμένο στον κύκλο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, έχει γωνίες $\hat{B} = 115^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 65^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{A} = 115^\circ$ και $\hat{\Delta} = 65^\circ$,

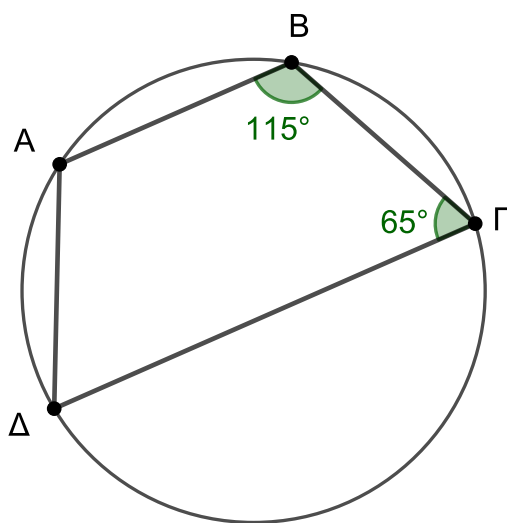
(Μονάδες 10)

ii. το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) i) Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο θα έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές.

Επομένως $\hat{A} = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ και $\hat{\Delta} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.

ii) Είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 115^\circ + 65^\circ = 180^\circ$, άρα οι ΒΑ και ΓΔ τεμνόμενες από την ΒΓ σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές. Επομένως οι ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.

Έστω ότι οι ΑΔ και ΒΓ είναι επίσης παράλληλες, τότε το ΑΒΓΔ θα είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως οι απέναντι γωνίες του θα είναι ίσες, άρα $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 65^\circ$, άτοπο αφού $\hat{A} = 115^\circ$. Άρα οι ΑΔ και ΒΓ δεν είναι παράλληλες.

Το ΑΒΓΔ έχει μόνο τις ΑΒ και ΓΔ παράλληλες, άρα είναι τραπέζιο.

β) Οι γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ πρόσκεινται στην βάση ΓΔ του τραpezίου ΑΒΓΔ και επειδή $\hat{\Gamma} = 65^\circ$ και $\hat{\Delta} = 65^\circ$, θα είναι ίσες. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 4

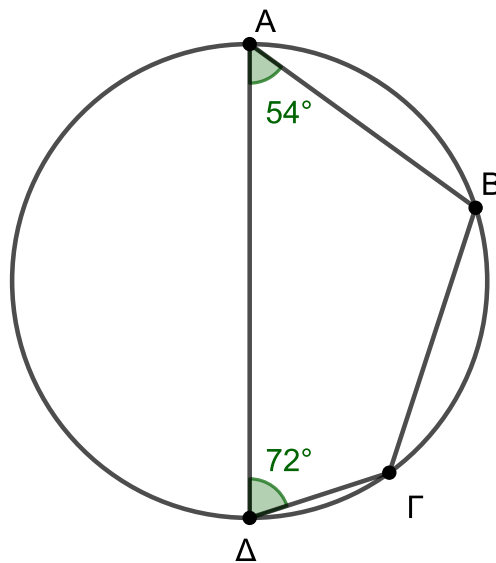
Το εγγεγραμμένο στον κύκλο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος, έχει γωνίες $\hat{A} = 54^\circ$ και $\hat{\Delta} = 72^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 108^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 126^\circ$. (Μονάδες 12)

β) Έστω ότι η $A\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου. Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα και να φέρετε την διαγώνιο ΔB του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{A\hat{B}\Delta} = 90^\circ$. (Μονάδες 5)

ii. Η ΔB διχοτομεί τη γωνία $\hat{A\hat{\Delta}\Gamma}$ και το τόξο $\widehat{AB\Gamma}$. (Μονάδες 8)

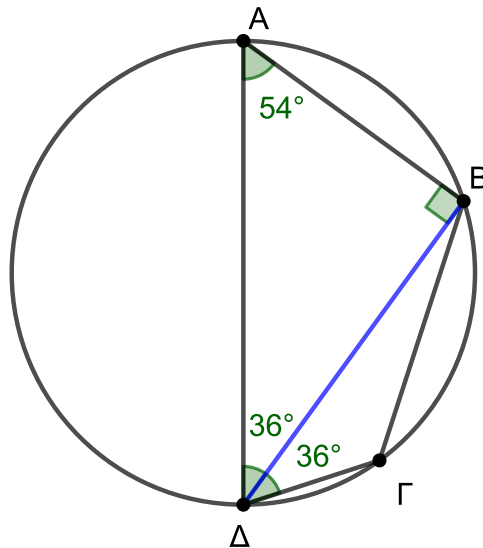


ΛΥΣΗ

α) Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές. Επομένως

$$\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{D} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ \text{ και } \widehat{\Gamma} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ.$$

β) i)



Επειδή η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου, η $\widehat{ABD}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικόκλιο, άρα είναι $\widehat{ABD} = 90^\circ$.

ii) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $\widehat{BDA} = 90^\circ - \widehat{A} = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$. Δίνεται όμως ότι $\widehat{AD\Gamma} = 72^\circ$, άρα $\widehat{BD\Gamma} = \widehat{AD\Gamma} - \widehat{BDA} = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$. Επομένως είναι $\widehat{BDA} = \widehat{BD\Gamma} = 36^\circ$, άρα η ΔΒ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{AD\Gamma}$.

Οι εγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{BDA}$ και $\widehat{BD\Gamma}$ βαίνουν στα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{B\Gamma}$ αντίστοιχα και είναι ίσες αφού $\widehat{BDA} = \widehat{BD\Gamma} = 36^\circ$. Επομένως και τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{B\Gamma}$ θα είναι ίσα, άρα η ΔΒ διχοτομεί το τόξο $\widehat{AB\Gamma}$.

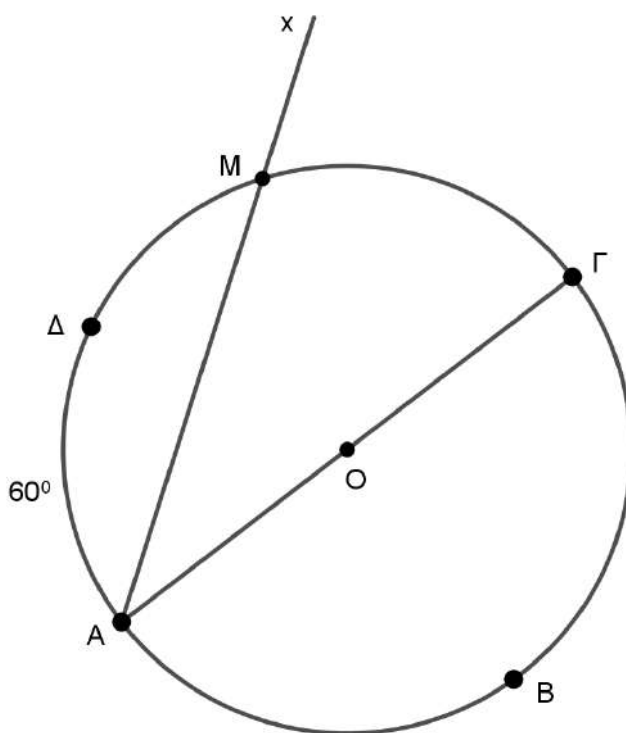
ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο (O, ρ) του παρακάτω σχήματος, δίνονται τα σημεία A, B, Γ και Δ , ώστε η $A\Gamma$ να είναι διάμετρος του κύκλου και το τόξο $A\Delta$ να ισούται με 60° . Από το A φέρουμε την ημιευθεία Ax που τέμνει το κυρτογώνιο τόξο $\Delta\Gamma$ στο σημείο M , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία $AM\Gamma$ ισούται με 90° . (Μονάδες 9)

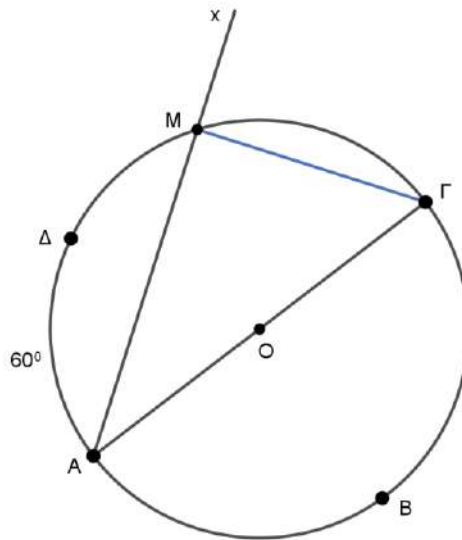
β) Να υπολογίσετε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $AM\Delta$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 7)



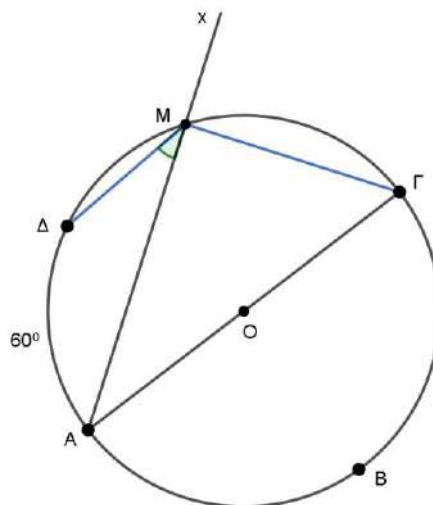
ΛΥΣΗ

α)



Η γωνία AMΓ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει σε ημικόκλιο. Επομένως είναι ορθή. Δηλαδή $\widehat{AM\Gamma} = 90^\circ$.

β)



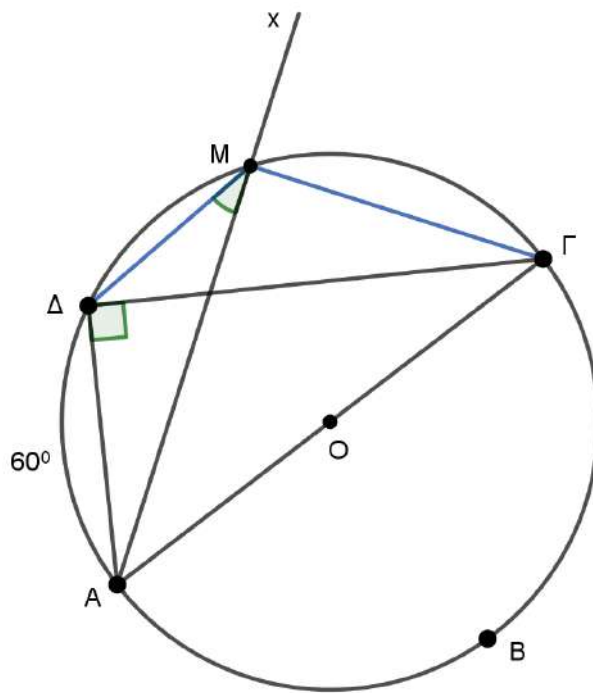
Η γωνία AMD είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει στο τόξο AD που είναι 60° ,

άρα θα ισούται με το μισό του. Δηλαδή $\widehat{AMD} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

γ) Η γωνία AΔΓ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει σε ημικόκλιο. Επομένως είναι ορθή. Δηλαδή $\widehat{A\Gamma\Delta} = 90^\circ$.

Λόγω του ερωτήματος (β), η $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{AMD} = 30^\circ$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο AD.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ η γωνία το ΑΓΔ ισούται με 30^0 , οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή $ΑΔ = \frac{ΑΓ}{2}$.

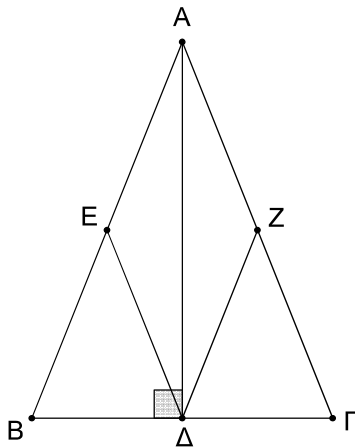


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 12$ και το ύψος του AD . Έστω E και Z τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $DE = 6$ και $DZ = 6$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AEDZ$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Το AD είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, άρα τα τρίγωνα ABD και $A\Gamma D$ είναι ορθογώνια.

Η DE είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ABD που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, οπότε θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας AB , δηλαδή

$$DE = \frac{AB}{2}.$$

Όμως από τα δεδομένα έχουμε ότι $AB = 12$, άρα $DE = \frac{12}{2} = 6$.

Η DZ είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $A\Gamma D$ που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, οπότε θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας $A\Gamma$, δηλαδή

$$DZ = \frac{A\Gamma}{2}.$$

Όμως από τα δεδομένα έχουμε ότι $A\Gamma = 12$, άρα $DZ = \frac{12}{2} = 6$.

β) Το E είναι το μέσο της AB και $AB = 12$, άρα $AE = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Το Z είναι το μέσο της $A\Gamma$ και $A\Gamma = 12$, άρα $AZ = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Από τις παραπάνω ισότητες και το ερώτημα α) προκύπτει ότι

$$DE = DZ = AE = AZ = 6,$$

οπότε το τετράπλευρο $AEDZ$ είναι ρόμβος, γιατί έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

ΘΕΜΑ 2

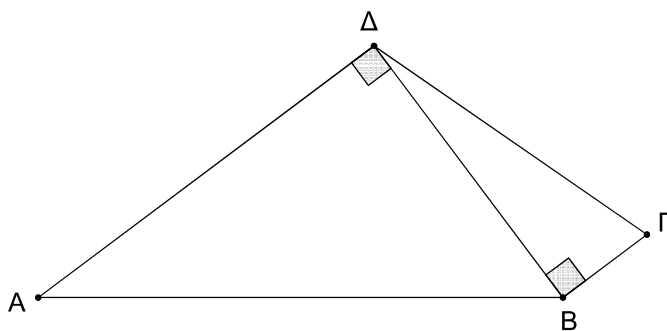
Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνια με $\widehat{A\Delta B} = \widehat{\Delta\Gamma B} = 90^\circ$ και $A\Delta = 16$, $B\Gamma = 5$ και $\Gamma\Delta = 13$.

α) Να αποδείξετε $B\Delta = 12$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AB και την περίμετρο του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε ότι

$$ΒΔ^2 = ΓΔ^2 - ΒΓ^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $ΓΔ = 13$ και $ΒΓ = 5$, οπότε

$$ΒΔ^2 = 13^2 - 5^2 \text{ ή } ΒΔ^2 = 144 \text{ ή } ΒΔ = 12.$$

β) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι

$$ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $ΑΔ = 16$ και από το ερώτημα α) έχουμε ότι $ΒΔ = 12$, οπότε

$$ΑΒ^2 = 16^2 + 12^2 \text{ ή } ΑΒ^2 = 400 \text{ ή } ΑΒ = 20.$$

Η περίμετρος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι

$$ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 20 + 5 + 13 + 16 = 54.$$

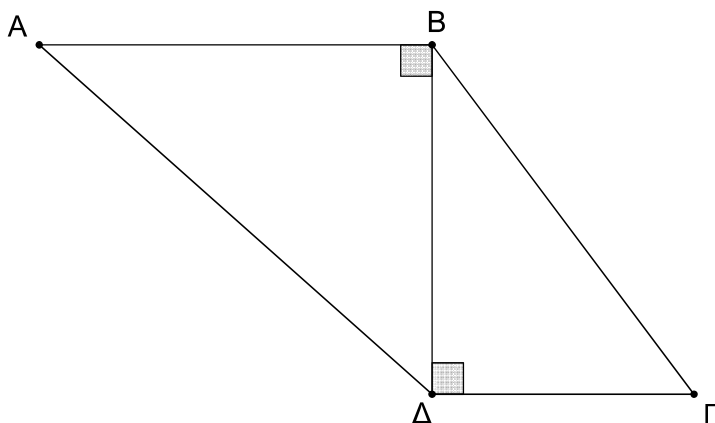
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνια με $\widehat{AB\Delta} = \widehat{B\Gamma\Delta} = 90^\circ$ και $AB = 9$, $B\Delta = 8$ και $\Gamma\Delta = 6$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $B\Gamma$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε $A\Delta = \sqrt{145}$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε $A\Gamma = 17$. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε ότι

$$ΒΓ^2 = ΒΔ^2 + ΓΔ^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι ΒΔ = 8 και ΓΔ = 6, οπότε

$$ΒΓ^2 = 8^2 + 6^2 \text{ ή } ΒΓ^2 = 100 \text{ ή } ΒΓ = 10.$$

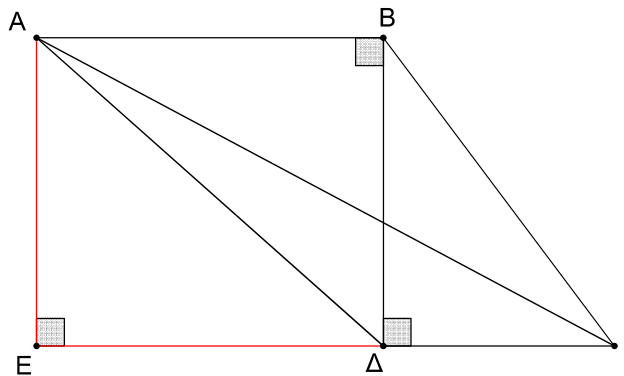
β) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι

$$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 + ΒΔ^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι ΑΒ = 9 και ΒΔ = 8, οπότε

$$ΑΔ^2 = 9^2 + 8^2 \text{ ή } ΑΔ^2 = 145 \text{ ή } ΑΔ = \sqrt{145}.$$

γ) Φέρουμε την κάθετη από το σημείο Α προς τη ΓΔ, η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο σημείο Ε.



Το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες: $\hat{B} = \hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$.

Επομένως ΑΒ = ΔΕ = 9 και ΑΕ = ΒΔ = 8 ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΔΕ.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε ότι

$$ΑΓ^2 = ΑΕ^2 + ΕΓ^2.$$

Όμως ΑΕ = 8 και ΕΓ = ΔΕ + ΓΔ = 9 + 6 = 15, οπότε

$$ΑΓ^2 = 8^2 + 15^2 \text{ ή } ΑΓ^2 = 289 \text{ ή } ΑΓ = 17.$$

ΘΕΜΑ 2

Οι ΔΖ και ΕΗ είναι παράλληλες με την πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ και τέμνουν την πλευρά ΓΑ στα σημεία Δ,Ε και την πλευρά ΓΒ στα σημεία Ζ, Η αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΓΔ = 3, ΔΕ = 6 και ΖΗ = 4.

α)

- i. Να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω αναλογία, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΕΗ, στο οποίο η ΔΖ είναι παράλληλη στην πλευρά του ΕΗ.

$$\frac{\Gamma Z}{\dots} = \frac{\dots}{\Delta E} \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

- ii. Να αποδείξετε ότι ΓΖ = 2. (Μονάδες 6)

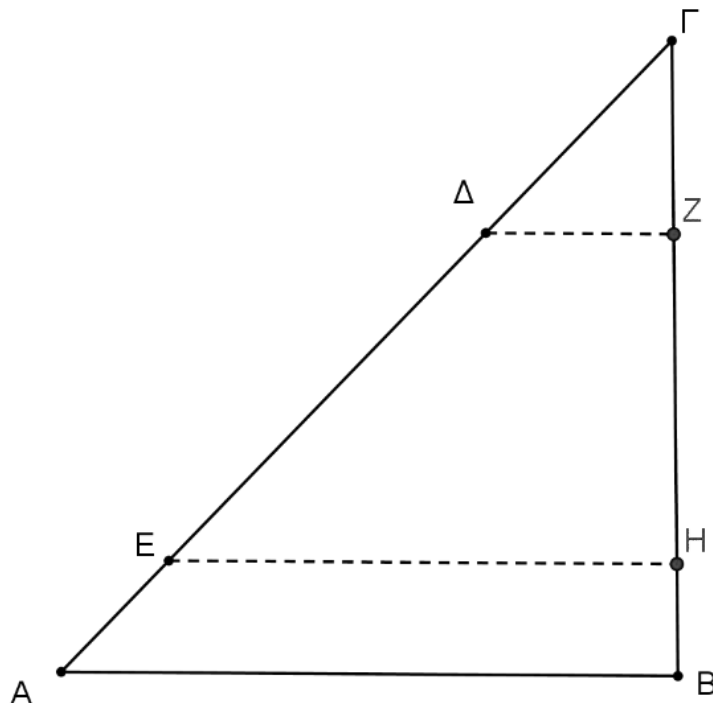
β)

- i. Να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω αναλογία, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΑΒ, στο οποίο η ΕΗ είναι παράλληλη στην πλευρά του ΑΒ.

$$\frac{\dots}{\Gamma H} = \frac{EA}{\dots} \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

- ii. Αν επιπλέον είναι ΗΒ = 1, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΑ.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α)

i. $\frac{\Gamma Z}{\Gamma \Delta} = \frac{ZH}{\Delta E}$

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $\frac{\Gamma Z}{\Gamma \Delta} = \frac{ZH}{\Delta E}$ με $\Gamma \Delta = 3$, $\Delta E = 6$ και $ZH = 4$.

Οπότε $\frac{\Gamma Z}{3} = \frac{4}{6}$ ή $6 \cdot \Gamma Z = 12$, άρα $\Gamma Z = 2$.

β)

i. $\frac{\Gamma E}{\Gamma H} = \frac{EA}{HB}$

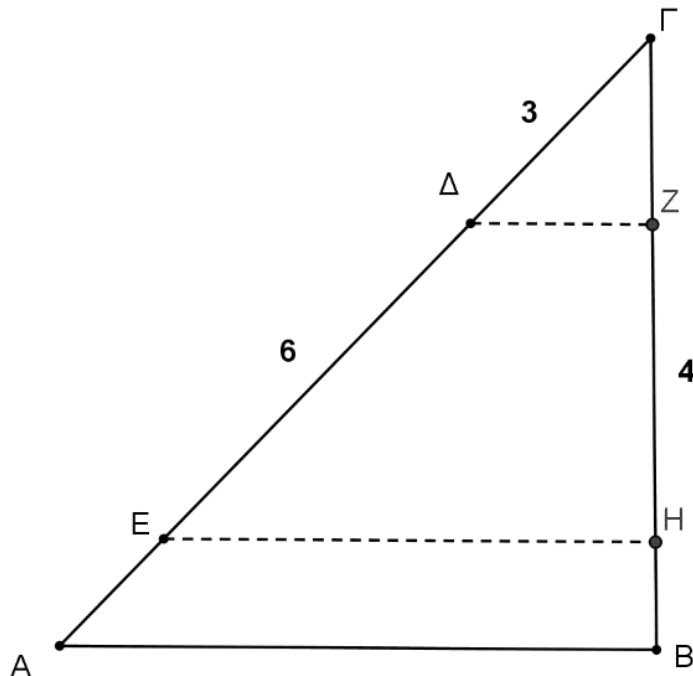
ii. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $\frac{\Gamma E}{\Gamma H} = \frac{EA}{HB}$ (1)

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $HB = 1$.

Είναι $\Gamma E = \Gamma \Delta + \Delta E = 3 + 6 = 9$, αφού είναι $\Gamma \Delta = 3$ και $\Delta E = 6$ από τα δεδομένα.

Επίσης είναι $\Gamma H = \Gamma Z + ZH = 2 + 4 = 6$, όπου $\Gamma Z = 2$ από το ερώτημα α)ii και $ZH = 4$ από τα δεδομένα.

Επομένως, από τη σχέση (1) έχουμε $\frac{9}{6} = \frac{EA}{1}$ ή $6 \cdot EA = 9$ ή $EA = \frac{3}{2}$, άρα $EA = 1,5$.



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB = 5$, $B\Gamma = 5$ και $A\Gamma = 7$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ του τριγώνου είναι οξεία.

(Μονάδες 9)

β) Να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. Να χαρακτηρίσετε τις άλλες δύο γωνίες του τριγώνου ως οξεία ή αμβλεία.

(Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ABΓ με πλευρές τις $AB = 5$, $BΓ = 5$ και $AΓ = 7$, η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ βρίσκεται απέναντι από την πλευρά BΓ.

- $B\Gamma^2 = 5^2 = 25$
- $AB^2 + A\Gamma^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$.

Παρατηρούμε ότι $B\Gamma^2 < AB^2 + A\Gamma^2$, επομένως η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ θα είναι οξεία.

β) Οι άλλες δύο γωνίες του τριγώνου ABΓ είναι η $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ και η $\widehat{A\hat{\Gamma}B}$

i. Η γωνία $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ βρίσκεται απέναντι από την πλευρά AΓ.

- $A\Gamma^2 = 7^2 = 49$
- $AB^2 + B\Gamma^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$

Παρατηρούμε ότι $A\Gamma^2 < AB^2 + B\Gamma^2$, επομένως η γωνία $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ θα είναι οξεία.

Η γωνία $\widehat{A\hat{\Gamma}B}$ βρίσκεται απέναντι από την πλευρά AB.

- $AB^2 = 5^2 = 25$
- $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 = 7^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74$

Παρατηρούμε ότι $AB^2 < A\Gamma^2 + B\Gamma^2$, επομένως η γωνία $\widehat{A\hat{\Gamma}B}$ θα είναι οξεία.

ii. Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε ότι και οι τρεις γωνίες του τριγώνου είναι οξείες, οπότε το τρίγωνο ABΓ θα είναι οξυγώνιο.

Όμως από τα δεδομένα έχουμε ότι $AB = B\Gamma = 5$, άρα το τρίγωνο ABΓ θα είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά AΓ. Συνεπώς το τρίγωνο ABΓ είναι οξυγώνιο και ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB = 6$, $A\Gamma = 6$ και $B\Gamma = 9$.

α) Να δείξετε ότι η γωνία $\widehat{A\Gamma B}$ του τριγώνου είναι οξεία. (Μονάδες 9)

β) Να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. Να χαρακτηρίσετε τη γωνία $\widehat{B\Gamma A}$ του τριγώνου, ως οξεία ή αμβλεία.

(Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ABΓ με πλευρές τις AB = 6, AΓ = 6 και BΓ = 9, η γωνία $\widehat{A\Gamma B}$ βρίσκεται απέναντι από την πλευρά AΓ.

- $A\Gamma^2 = 6^2 = 36$
- $AB^2 + B\Gamma^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117.$

Παρατηρούμε ότι $A\Gamma^2 < AB^2 + B\Gamma^2$, επομένως η γωνία $\widehat{A\Gamma B}$ θα είναι οξεία.

β) Η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ βρίσκεται απέναντι από την πλευρά BΓ.

- $B\Gamma^2 = 9^2 = 81$
- $AB^2 + A\Gamma^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$

Παρατηρούμε ότι $B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2$, επομένως η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ θα είναι αμβλεία.

γ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε ότι το τρίγωνο έχει μια αμβλεία γωνία, την $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$, άρα θα είναι αμβλυγώνιο. Όμως από τα δεδομένα έχουμε ότι AB = AΓ = 6, άρα το τρίγωνο ABΓ θα είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά BΓ. Συνεπώς το τρίγωνο ABΓ είναι αμβλυγώνιο και ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, το σημείο Γ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος AB. Έστω ότι είναι $AB = 12κ$ και $ΑΓ = 4κ$, όπου $κ$ θετικός αριθμός.

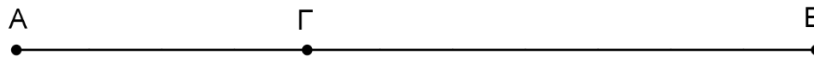
α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε

i. το τμήμα ΓΒ συναρτήσει του $κ$, (Μονάδες 5)

ii. το λόγο του τμήματος ΓΒ προς το τμήμα AB. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΓΒ είναι διπλάσιο του τμήματος ΑΓ και να βρείτε το λόγο λ στον οποίο το σημείο Γ διαιρεί εσωτερικά το τμήμα AB. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\frac{AG}{AB} = \frac{4\kappa}{12\kappa} = \frac{1}{3}$, αφού $AB = 12\kappa$ και $AG = 4\kappa$ από τα δεδομένα.

β)

i. Είναι $GB = AB - AG = 12\kappa - 4\kappa = 8\kappa$, αφού $AB = 12\kappa$ και $AG = 4\kappa$ από τα δεδομένα.

ii. Ο λόγος του τμήματος GB προς το τμήμα AB είναι $\frac{GB}{AB}$, με $GB = 8\kappa$ από το β)i. ερώτημα και $AB = 12\kappa$, οπότε:

$$\frac{GB}{AB} = \frac{8\kappa}{12\kappa} \text{ ή } \frac{GB}{AB} = \frac{8}{12} \text{ ή } \frac{GB}{AB} = \frac{2}{3}$$

γ) Έχουμε ότι $GB = 8\kappa$ από το β)i. ερώτημα και $AG = 4\kappa$ από τα δεδομένα, οπότε:

$$\frac{GB}{AG} = \frac{8\kappa}{4\kappa} \text{ ή } \frac{GB}{AG} = \frac{8}{4} \text{ ή } \frac{GB}{AG} = 2, \text{ άρα } GB = 2AG.$$

Συνεπώς το τμήμα GB είναι διπλάσιο του τμήματος AG .

Ο λόγος λ στον οποίο το σημείο G διαιρεί εσωτερικά το τμήμα AB είναι ο λόγος $\frac{GA}{GB}$, δηλαδή

$$\lambda = \frac{GA}{GB}. \text{ Όμως είναι } GB = 2AG \text{ ή } GB = 2GA, \text{ άρα } \lambda = \frac{GA}{2GA} = \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, το σημείο Γ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος AB .

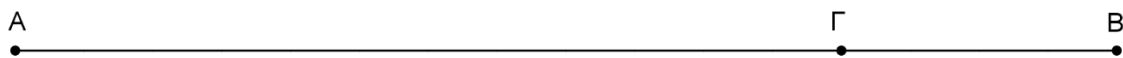
Αν είναι $AB = 16\kappa$ και $\Gamma B = 4\kappa$, όπου κ θετικός αριθμός, τότε να υπολογίσετε:

α) το λόγο $\frac{\Gamma B}{AB}$, (Μονάδες 8)

β) το τμήμα $A\Gamma$ συναρτήσει του κ και το λόγο του τμήματος $A\Gamma$ προς το τμήμα AB ,
(Μονάδες 10)

γ) το λόγο λ στον οποίο το σημείο Γ διαιρεί εσωτερικά το τμήμα AB .

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\frac{\Gamma B}{AB} = \frac{4\kappa}{16\kappa} = \frac{1}{4}$, αφού $AB = 16\kappa$ και $\Gamma B = 4\kappa$ από τα δεδομένα.

β) Είναι $A\Gamma = AB - \Gamma B = 16\kappa - 4\kappa = 12\kappa$, αφού $AB = 16\kappa$ και $\Gamma B = 4\kappa$ από τα δεδομένα.

Ο λόγος του τμήματος $A\Gamma$ προς το τμήμα AB είναι $\frac{A\Gamma}{AB}$ με $A\Gamma = 12\kappa$ και $AB = 16\kappa$ από τα δεδομένα, οπότε:

$$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{12\kappa}{16\kappa} \text{ ή } \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{12}{16} \text{ ή } \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{3}{4}$$

γ) Ο λόγος λ στον οποίο το σημείο Γ διαιρεί εσωτερικά το τμήμα AB είναι ο λόγος $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}$, δηλαδή

$\lambda = \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$, όπου $\Gamma A = A\Gamma = 12\kappa$ από το β) ερώτημα και $\Gamma B = 4\kappa$ από τα δεδομένα, οπότε:

$$\lambda = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{12\kappa}{4\kappa} \text{ ή } \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{12}{4} \text{ ή } \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = 3$$

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τμήμα AB και σημείο Γ το οποίο το διαιρεί εσωτερικά σε δυο τμήματα ΑΓ και ΓΒ

σε λόγο $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{1}{3}$.

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθένα από το ακόλουθα δύο ερωτήματα, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

i. Το τμήμα ΓΒ είναι

A: ίσο με το τμήμα ΑΓ.

B: διπλάσιο από το τμήμα ΑΓ.

Γ: τριπλάσιο από το τμήμα ΑΓ.

ii. Το σημείο Γ

A: είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

B: βρίσκεται πιο κοντά στο άκρο Α του τμήματος ΑΒ.

Γ: βρίσκεται πιο κοντά στο άκρο Β του τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι το τμήμα ΑΒ είναι τετραπλάσιο του τμήματος ΑΓ.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΓΒ}{ΑΒ}$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

Έστω τμήμα AB και Γ εσωτερικό του σημείο τέτοιο ώστε $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{1}{3}$.



α)

- i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{1}{3}$, οπότε θα είναι $ΓΒ = 3ΑΓ$. Άρα η σωστή απάντηση είναι η Γ.
- ii. Αφού το ΓΒ είναι τριπλάσιο από το ΑΓ, άρα το τμήμα ΓΒ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΑΓ, οπότε το σημείο Γ θα είναι πιο κοντά στο άκρο Α. Άρα η σωστή απάντηση είναι το Β.

β)

α τρόπος: Είναι $ΑΒ = ΑΓ + ΒΓ = ΑΓ + 3ΑΓ = 4ΑΓ$, οπότε $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ}{4ΑΓ} = \frac{1}{4}$. Από την ισότητα $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{1}{4}$

προκύπτει ότι $ΑΒ = 4ΑΓ$. Δηλαδή, το τμήμα ΑΒ είναι τετραπλάσιο του τμήματος ΑΓ.

β τρόπος: Από το δεδομένο $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{1}{3}$ και εφαρμόζοντας ιδιότητες αναλογιών θα έχουμε:

$$\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{1}{3} \text{ ή } \frac{ΑΓ}{ΑΓ + ΓΒ} = \frac{1}{1 + 3} \text{ ή } \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{1}{4} \text{ ή } ΑΒ = 4ΑΓ$$

Επομένως το τμήμα ΑΒ είναι τετραπλάσιο του τμήματος ΑΓ.

γ) Είναι $\frac{ΓΒ}{ΑΒ} = \frac{3ΑΓ}{4ΑΓ}$ ή $\frac{ΓΒ}{ΑΒ} = \frac{3}{4}$, επειδή είναι $ΓΒ = 3ΑΓ$ από το α) ερώτημα και $ΑΒ = 4ΑΓ$ από το

β) ερώτημα.

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες δ_1, δ_2 στα σημεία A, B, Γ και Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Έστω ότι είναι $AB = 10$ και $B\Gamma = 3$.

α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{B\Gamma}{AB}$. (Μονάδες 5)

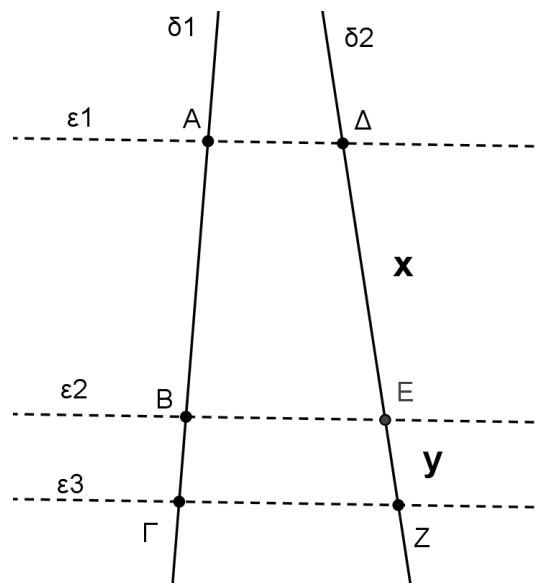
β)

i. Να συμπληρώσετε τα κενά στην αναλογία που ακολουθεί, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

$$\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\dots} \quad (\text{Μονάδες 5})$$

ii. Να δείξετε ότι $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{y}{x}$, όπου $x = \Delta E$ και $y = EZ$. (Μονάδες 8)

γ) Αν είναι $y = 4$, να υπολογίσετε το x . (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{3}{10}$, αφού είναι $AB = 10$ και $B\Gamma = 3$ από τα δεδομένα.

β)

i. Επειδή οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες δ_1 και δ_2 , από

το θεώρημα του Θαλή θα προκύπτει η αναλογία $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ (1)

ii. Από τη σχέση (1) έχουμε ότι:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} \text{ ή } \frac{EZ}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{AB}, \text{ άρα } \frac{B\Gamma}{AB} = \frac{y}{x} \text{ όπου } \Delta E = x \text{ και } EZ = y.$$

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{y}{x}$ και από το α) ερώτημα $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{3}{10}$, οπότε για $y = 4$ θα είναι:

$$\frac{3}{10} = \frac{4}{x} \text{ ή } 3 \cdot x = 4 \cdot 10 \text{ ή } x = \frac{40}{3}.$$

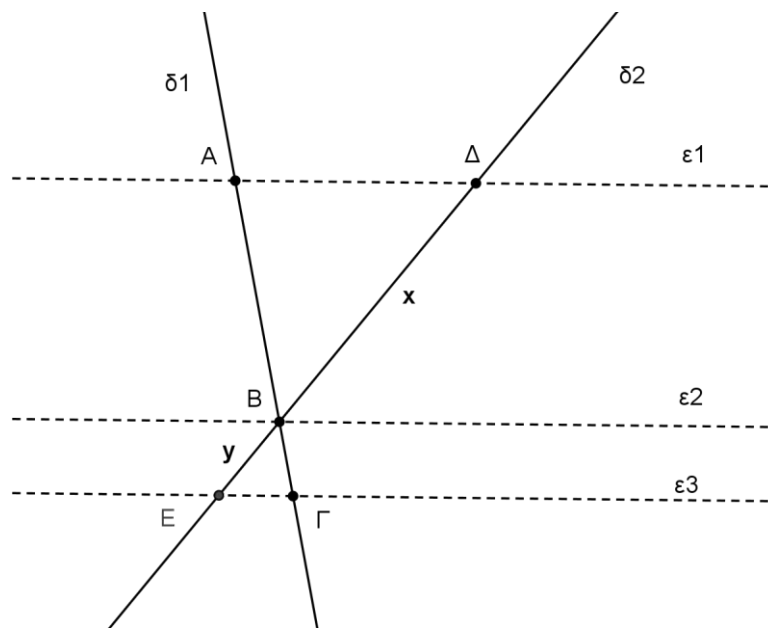
ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες δ_1, δ_2 στα σημεία Α, Β, Γ και Δ, Β, Ε αντίστοιχα. Έστω ότι είναι $AB = 14$ και $B\Gamma = 4$.

α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AB}{B\Gamma}$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{x}{y}$, όπου $x = B\Delta$ και $y = BE$. (Μονάδες 10)

γ) Αν είναι $x = 16$, να υπολογίσετε το y . (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$, αφού είναι $AB = 14$ και $B\Gamma = 4$ από τα δεδομένα.

β) Επειδή οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες δ_1 και δ_2 , από το

θεώρημα του Θαλή θα προκύπτει η αναλογία $\frac{AB}{\Delta B} = \frac{B\Gamma}{BE} = \frac{A\Gamma}{\Delta E}$ (1)

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι:

$$\frac{AB}{\Delta B} = \frac{B\Gamma}{BE} \text{ ή } \frac{AB}{x} = \frac{B\Gamma}{y} \text{ ή } \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{x}{y}$$

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{x}{y}$ και από το α) ερώτημα έχουμε ότι $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{7}{2}$, οπότε για $x = 16$ θα είναι:

$$\frac{7}{2} = \frac{16}{y} \text{ ή } 7 \cdot y = 2 \cdot 16 \text{ ή } y = \frac{32}{7}.$$

ΘΕΜΑ 4

Μια ευθεία ε εφάπτεται στους κύκλους (K,r) και (Λ,R) στα σημεία A και B αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $r = 3$, $R = 5$, $AB = 11$ και $K\Gamma \perp B\Lambda$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma K$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε:

i. Τα μήκη των τμημάτων $K\Gamma$ και $\Gamma\Lambda$.

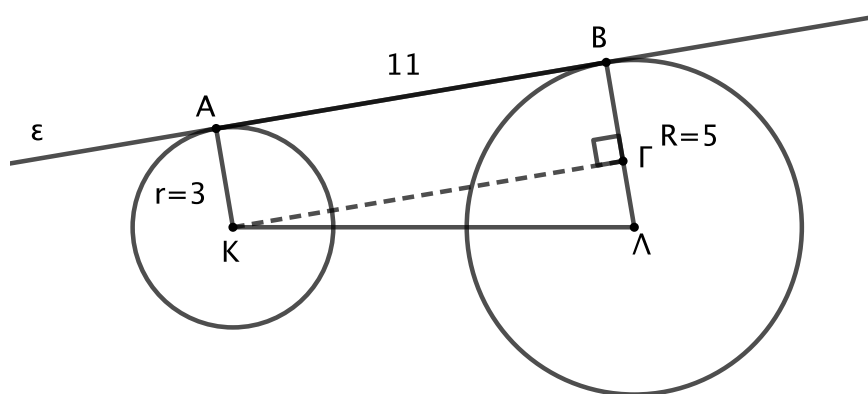
(Μονάδες 8)

ii. Την απόσταση των κέντρων K και Λ .

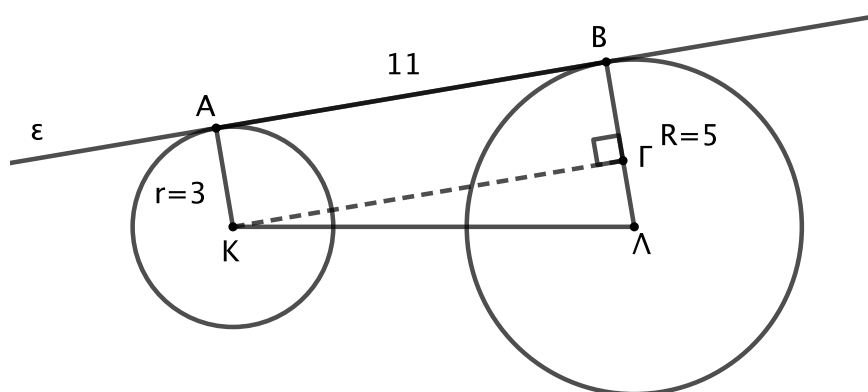
(Μονάδες 6)

γ) Τι είδους τετράπλευρο θα είναι το $AB\Lambda K$ όταν οι κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες;

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ



α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής. Οπότε, $AB \perp AK$ και $AB \perp BL$. Άρα, οι γωνίες $\widehat{KAB}$ και $\widehat{LBA}$ είναι ορθές.

Επίσης, από τα δεδομένα της άσκησης, δίνεται ότι $K\Gamma \perp BL$, οπότε η γωνία $\widehat{K\Gamma B}$ είναι ορθή. Επομένως, το τετράπλευρο $AB\Gamma K$ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις γωνίες ορθές.

β)

- i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma K$ είναι ορθογώνιο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες. Άρα, $K\Gamma = AB = 11$ και $B\Gamma = AK = 3$.

Για το τμήμα $\Gamma\Lambda$ έχουμε:

$$\Gamma\Lambda = B\Lambda - B\Gamma = 5 - 3 = 2$$

- ii. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $K\Gamma\Lambda$ έχουμε:

$$K\Lambda^2 = K\Gamma^2 + \Gamma\Lambda^2 = 11^2 + 2^2 = 121 + 4 = 125$$

$$\text{Άρα, } K\Lambda = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

γ) Όταν οι κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες θα είναι $AK = BL$. Επίσης, είναι $AK \parallel BL$, αφού τα τμήματα AK και BL είναι κάθετα στην AB . Επομένως, το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ θα είναι ορθογώνιο, αφού είναι παραλληλόγραμμο και η γωνία του $\widehat{KAB}$ είναι ορθή.

ΘΕΜΑ 2

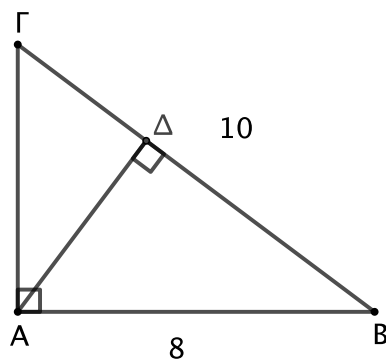
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB = 8$ και $B\Gamma = 10$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της κάθετης πλευράς $A\Gamma$.

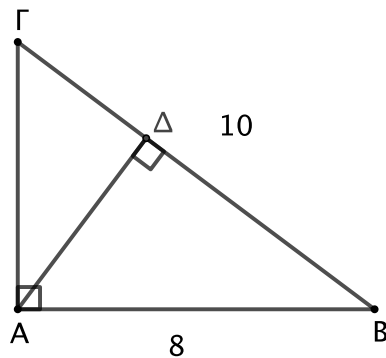
(Μονάδες 12)

β) Έστω $A\Delta$ το ύψος στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής ΔB της κάθετης πλευράς AB πάνω στη $B\Gamma$.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$$

$$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2$$

$$A\Gamma^2 = 10^2 - 8^2$$

$$A\Gamma^2 = 100 - 64$$

$$A\Gamma^2 = 36$$

Άρα, $A\Gamma = 6$.

β) Για την προβολή ΔΒ της κάθετης πλευράς ΑΒ πάνω στην υποτείνουσα ΒΓ έχουμε:

$$AB^2 = \Delta B \cdot B\Gamma$$

$$8^2 = \Delta B \cdot 10$$

$$64 = \Delta B \cdot 10$$

Άρα, το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στην ΒΓ είναι:

$$\Delta B = \frac{64}{10} = \frac{32}{5}$$

ΘΕΜΑ 2

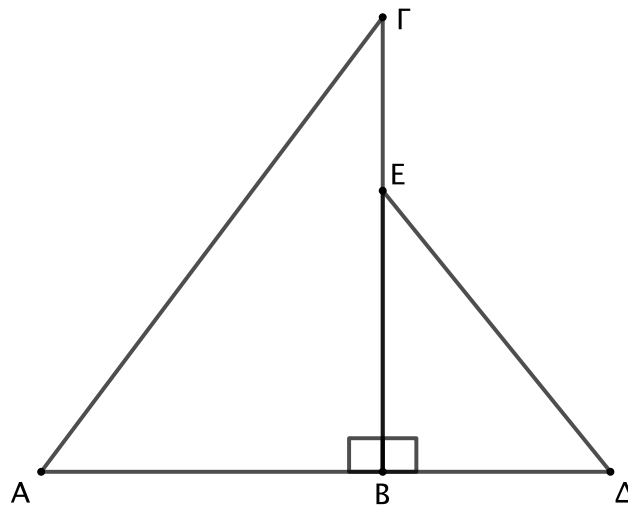
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔΒΕ είναι όμοια.

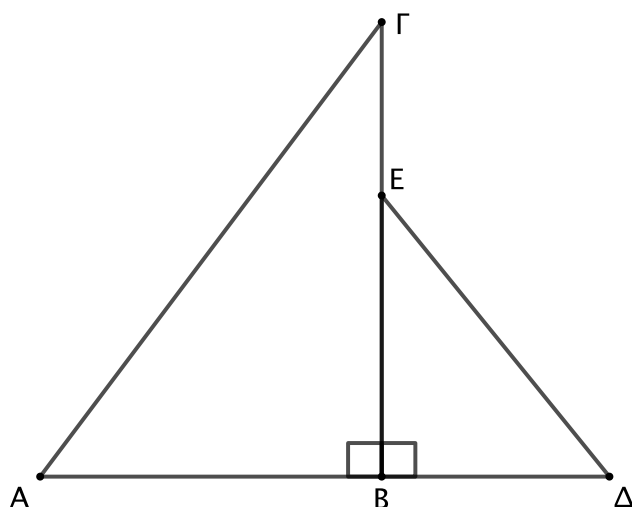
(Μονάδες 13)

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ABΓ και ΔΒΕ.

(Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ABΓ και ΔBE έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta}$ (από υπόθεση) και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{E} = 90^\circ$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ABΓ και ΔBE είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{\Delta}$	$\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{E}$	$\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{B}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ABΓ	BΓ	AΓ	AB
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΔBE	BE	EΔ	BΔ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{B\Gamma}{BE} = \frac{A\Gamma}{E\Delta} = \frac{AB}{B\Delta}$$

ΘΕΜΑ 4

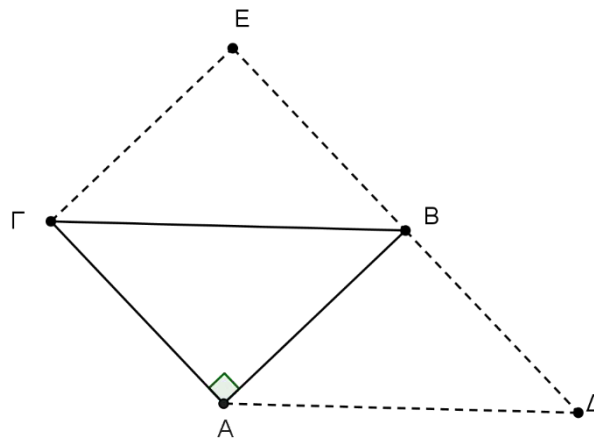
Στο σχήμα που ακολουθεί, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = A\Gamma = 14$ και B σημείο του τμήματος ΔE . Αν είναι $AD \parallel \Gamma B$, $AB \parallel \Gamma E$ και $A\Gamma \parallel \Delta E$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι

- i. το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 8)
- ii. το τετράπλευρο $A\Gamma E B$ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τετραπλεύρου $A\Gamma B\Delta$ είναι ίση με $28(\sqrt{2} + 1)$.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α)

i. Έχουμε ότι $ΑΓ \parallel ΔΕ$ (από τα δεδομένα), άρα $ΑΓ \parallel ΔΒ$. Επίσης είναι $ΑΔ \parallel ΒΓ$ από τα δεδομένα, άρα το τετράπλευρο $ΑΓΒΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

ii. Από τα δεδομένα έχουμε ότι $ΑΓ \parallel ΔΕ$, άρα και $ΑΓ \parallel ΒΕ$ (1).

Επίσης έχουμε ότι $ΑΒ \parallel ΓΕ$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $ΑΓΕΒ$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Το παραλληλόγραμμο $ΑΓΕΒ$ έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες, τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$ από τα δεδομένα, και μια γωνία ορθή, την $\hat{A} = 90^\circ$ επίσης από τα δεδομένα. Άρα το $ΑΓΕΒ$ είναι τετράγωνο.

β) Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$ και υποτείνουσα τη $ΒΓ$.

Οπότε, εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα, θα έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 \text{ ή } ΒΓ^2 = 14^2 + 14^2 \text{ ή}$$

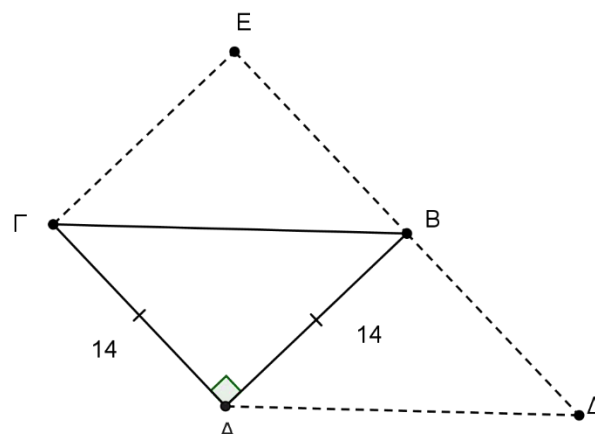
$$ΒΓ^2 = 2 \cdot 14^2 \text{ ή } ΒΓ = \sqrt{2 \cdot 14^2} \text{ ή}$$

$$ΒΓ = 14\sqrt{2}$$

Το τετράπλευρο $ΑΓΒΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι απέναντι πλευρές του θα είναι ίσες, δηλαδή $ΑΓ = ΔΒ$ και $ΑΔ = ΓΒ$.

Η περίμετρος Π το τετραπλεύρου $ΑΓΒΔ$ είναι:

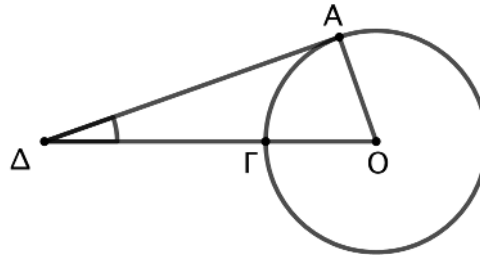
$$\Pi = ΑΓ + ΓΒ + ΒΔ + ΔΑ = 2 \cdot ΑΓ + 2 \cdot ΓΒ = 2 \cdot 14 + 2 \cdot 14\sqrt{2} = 28 + 28\sqrt{2} = 28 \cdot (\sqrt{2} + 1)$$



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και εξωτερικό σημείο του Δ . Φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΔA και τη διακεντρική ευθεία ΔO η οποία τέμνει τον κύκλο στο σημείο Γ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{\Delta A O}$ είναι ορθή.



(Μονάδες 07)

β) Αν $\widehat{A \Delta O} = 20^\circ$, τότε να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου $A\Gamma$.

(Μονάδες 08)

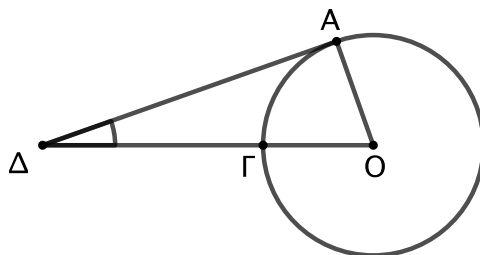
γ) Αν είναι $OA = 1$ και $OD = 2$, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι $\widehat{A \Delta O} = 30^\circ$.
- ii. Να υπολογίσετε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΔA .

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α)



α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε $\Delta A \perp OA$. Άρα, η γωνία $\widehat{O\hat{A}\Delta}$ είναι ορθή.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΑΔ$ είναι:

$$\widehat{A\hat{D}O} + \widehat{\Delta\hat{O}A} = 90^\circ \quad (1)$$

Αφού είναι $\widehat{A\hat{D}O} = 20^\circ$, αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε διαδοχικά:

$$\widehat{A\hat{D}O} + \widehat{\Delta\hat{O}A} = 90^\circ$$

$$20^\circ + \widehat{\Delta\hat{O}A} = 90^\circ$$

$$\widehat{\Delta\hat{O}A} = 70^\circ$$

Η γωνία $\widehat{\Delta\hat{O}A}$ είναι επίκεντρη στο τόξο $ΑΓ$, οπότε το μέτρο της ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου τόξου $ΑΓ$. Επομένως:

$$\widehat{A\hat{G}} = 70^\circ$$

γ)

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΟΔ$ η κάθετη πλευρά $ΑΟ$ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας $ΟΔ$. Επομένως, η γωνία $\widehat{A\hat{D}O}$ που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά $ΑΟ$ θα ισούται με 30° .

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΑΟΔ$. Έχουμε διαδοχικά:

$$ΑΔ^2 = ΟΔ^2 - ΑΟ^2$$

$$ΑΔ^2 = 2^2 - 1^2$$

$$ΑΔ^2 = 3$$

$$\text{Άρα, } ΑΔ = \sqrt{3}.$$