

ΘΕΜΑ 2

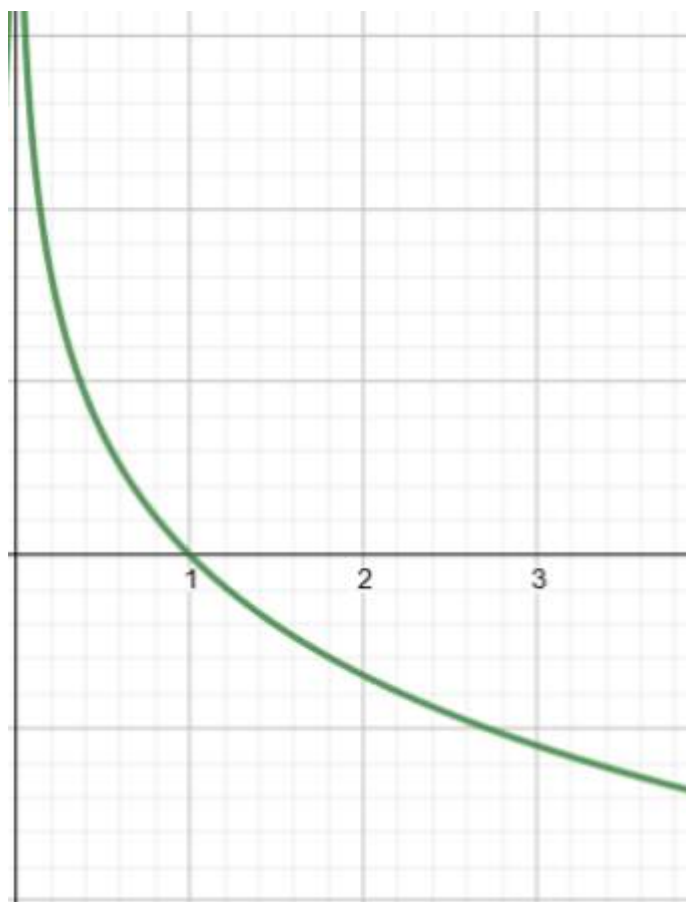
Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1}{|x|}$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) = f(1) = 0$ και $f(-2) = f(2)$.

(Μονάδες 12)

β) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$, για $x < 0$.



(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α)

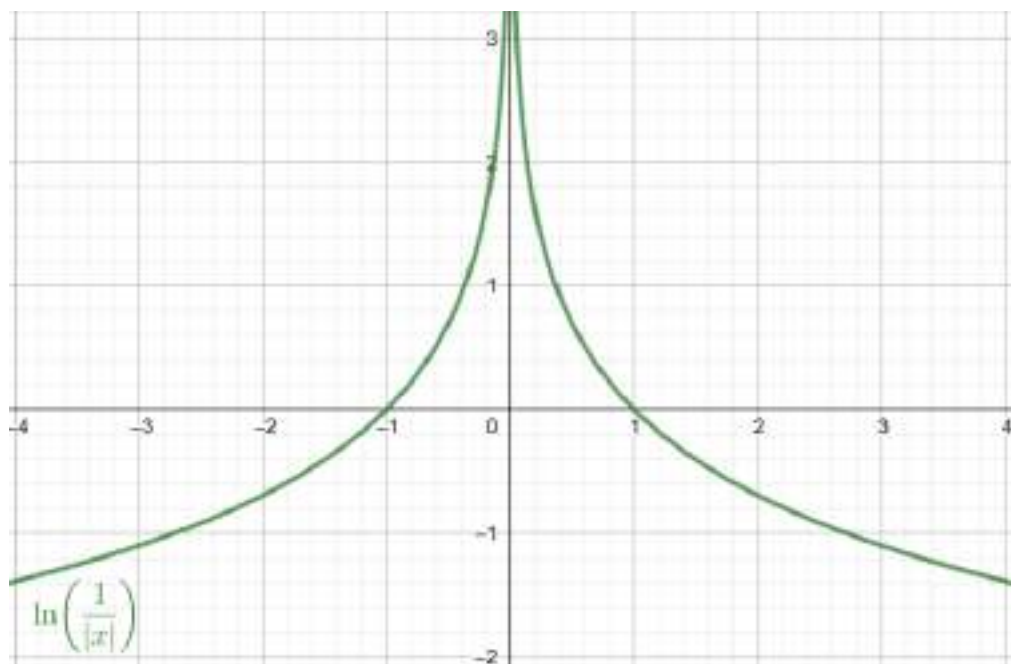
Ισχύει ότι $f(-1) = \ln \frac{1}{|-1|} = \ln \frac{1}{1} = \ln 1 = 0$ και $f(1) = \ln \frac{1}{|1|} = \ln \frac{1}{1} = \ln 1 = 0$ άρα

$$f(-1) = f(1) = 0.$$

$f(-2) = \ln \frac{1}{|-2|} = \ln \frac{1}{2}$ και $f(2) = \ln \frac{1}{|2|} = \ln \frac{1}{2}$ άρα $f(-2) = f(2)$.

β) Η συνάρτηση f είναι άρτια οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Για $x < 0$ η γραφική παράσταση θα είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f όπως δίνεται αυτή για $x > 0$, οπότε θα έχουμε:



ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι: $2x^3 + x^2 - x = x(2x^2 + x - 1)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $2x^3 + x^2 - x = 0$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Το δεύτερο μέλος γράφεται $x(2x^2+x-1)=x \cdot 2x^2+x \cdot x-x=2x^3+x^2-x$, που είναι το ζητούμενο.

β) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα :

$$2x^3+x^2-x=0 \Leftrightarrow x(2x^2+x-1)=0$$

Για το τριώνυμο $(2x^2+x-1)$ η διακρίνουσα είναι $\Delta=1^2-4 \cdot 2 \cdot (-1)=9$

και οι λύσεις του $x=\frac{-1 \pm 3}{2 \cdot 2}$, άρα $x=\frac{1}{2}$ ή $x=-1$.

$$x(2x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\frac{1}{2} \text{ ή } x=-1.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 2$ και $\beta = \log 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 1$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\ln(\alpha + \beta)$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha + \beta = \log 2 + \log 5 = \log(2 \cdot 5) = \log 10 = 1$

β) Είναι $\ln(\alpha + \beta) = \ln 1 = 0$.

ΘΕΜΑ 4

Να λύσετε καθένα από τα παρακάτω συστήματα

$$\alpha) \begin{cases} 2 \cdot \omega + 3\phi = 17 \\ 4\omega - 3\phi = 7 \end{cases}$$

(Μονάδες 10)

$$\beta) \begin{cases} 2 \cdot \ln x + 3 \cdot \ln y = 17 \\ 4 \cdot \ln x - 3 \cdot \ln y = 7 \end{cases}$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις του συστήματος έχουμε :

$$2\omega + 3\phi + 4\omega - 3\phi = 17 + 7 \Leftrightarrow 6\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 4$$

και με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση έχουμε $2 \cdot 4 + 3\phi = 17 \Leftrightarrow 3\phi = 9 \Leftrightarrow \phi = 3$.

Συνεπώς η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(\omega, \phi) = (4, 3)$.

β) Αρχικά θα πρέπει $x > 0$ και $y > 0$. Με αυτούς τους περιορισμούς αν θέσουμε

$\ln x = \omega$ και $\ln y = \phi$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 2\omega + 3\phi = 17 \\ 4\omega - 3\phi = 7 \end{cases}$ που όπως δείξαμε στο

ερώτημα α) έχει λύσεις τις $\omega = 4$ και $\phi = 3$.

Για $\omega = 4$ είναι $\ln x = 4 \Leftrightarrow x = e^4$.

Για $\phi = 3$ είναι $\ln y = 3 \Leftrightarrow y = e^3$.

Συνεπώς η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (e^4, e^3)$.

ΘΕΜΑ 4

Να λύσετε καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega = 0$

(Μονάδες 10)

β) $e^{3x} - 3e^{2x} + 2e^x = 0$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega = 0 \Leftrightarrow \omega(\omega^2 - 3\omega + 2) = 0$ οπότε $\omega = 0$ ή $\omega^2 - 3\omega + 2 = 0$. Το τριώνυμο $\omega^2 - 3\omega + 2 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$ και ρίζες τις

$$\omega = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}, \text{ δηλαδή } \omega = 1 \text{ ή } \omega = 2.$$

Τελικά οι λύσεις της εξίσωσης είναι $\omega = 0$ ή $\omega = 1$ ή $\omega = 2$.

β) Θέτοντας $e^x = \omega$ η εξίσωση $e^{3x} - 3e^{2x} + 2e^x = 0$ γίνεται $\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega = 0$ που όπως δείξαμε στο ερώτημα α) έχει λύσεις τις $\omega = 0$ ή $\omega = 1$ ή $\omega = 2$.

Για $\omega = 0$ έχουμε ότι $e^x = 0$ που είναι αδύνατη.

Για $\omega = 1$ έχουμε ότι $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Για $\omega = 2$ έχουμε ότι $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

ΘΕΜΑ 4

Να λύσετε το καθένα από τα παρακάτω συστήματα

$$\alpha) \begin{cases} 2\omega + 3\phi = 17 \\ 4\omega - 3\phi = 7 \end{cases}$$

(Μονάδες 10)

$$\beta) \begin{cases} 2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^y = 17 \\ 4 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^y = 7 \end{cases}$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις του συστήματος έχουμε :

$$2\omega + 3\phi + 4\omega - 3\phi = 17 + 7 \Leftrightarrow 6\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 4$$

και με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση βρίσκουμε $2 \cdot 4 + 3\phi = 17 \Leftrightarrow 3\phi = 9 \Leftrightarrow \phi = 3$.

Συνεπώς η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(\omega, \phi) = (4, 3)$.

β) Αν θέσουμε $2^x = \omega$ και $3^y = \phi$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 2\omega + 3\phi = 17 \\ 4\omega - 3\phi = 7 \end{cases}$ που όπως

δείξαμε στο ερώτημα α) έχει λύσεις τις $\omega = 4$ και $\phi = 3$.

Για $\omega = 4$ είναι $2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Για $\phi = 3$ είναι $3^y = 3 \Leftrightarrow y = 1$.

Συνεπώς η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (2, 1)$.

ΘΕΜΑ 4

Να λύσετε κάθε μια από τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $(\omega+1)(\omega^2-3\omega+2)<0$

(Μονάδες 10)

β) $(e^x+1)(e^{2x}-3e^x+2)<0$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $\omega^2 - 3\omega + 2$ έχει ρίζες τις $\omega = 1$ και $\omega = 2$ και γίνεται αρνητικό για τις τιμές του ω που είναι μεταξύ των ριζών του, δηλαδή για $1 < \omega < 2$.

Το πρόσημο του πολυωνύμου $(\omega + 1)(\omega^2 - 3\omega + 2)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ω	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$\omega + 1$	-	0	+	+	+
$\omega^2 - 3\omega + 2$	+	+	0	-	+
$(\omega + 1)(\omega^2 - 3\omega + 2)$	-	0	+	0	+

Η ανίσωση $(\omega + 1)(\omega^2 - 3\omega + 2) < 0$ αληθεύει για $\omega \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

β) Θέτοντας $e^x = \omega$ η ανίσωση $(e^x + 1)(e^{2x} - 3e^x + 2) < 0$ γίνεται

$(\omega + 1)(\omega^2 - 3\omega + 2) < 0$ που όπως δείξαμε στο ερώτημα α) αληθεύει για $\omega < -1$ ή $1 < \omega < 2$.

Για $\omega < -1$ έχουμε ότι $e^x < -1$ που είναι αδύνατη, αφού $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $1 < \omega < 2$ έχουμε ότι $1 < e^x < 2 \Leftrightarrow e^0 < e^x < e^{\ln 2} \stackrel{e>1}{\Leftrightarrow} 0 < x < \ln 2$.

ΘΕΜΑ 4

Να λύσετε κάθε μια από τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $(\omega+1)(\omega^2-3\omega+2) > 0$

(Μονάδες 10)

β) $\ln^2 x - 3\ln x + 2 > 0$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $\omega^2 - 3\omega + 2$ έχει ρίζες τις $\omega = 1$ και $\omega = 2$ και γίνεται θετικό για τις τιμές του ω που είναι εκτός των ριζών του, δηλαδή για $\omega < 1$ ή $\omega > 2$.

Το πρόσημο του πολυωνύμου $(\omega + 1)(\omega^2 - 3\omega + 2)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ω	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$\omega + 1$	-	0	+	+	+
$\omega^2 - 3\omega + 2$	+	+	0	-	+
$(\omega + 1)(\omega^2 - 3\omega + 2)$	-	0	+	0	+

Η ανίσωση $(\omega + 1)(\omega^2 - 3\omega + 2) > 0$ αληθεύει για $\omega \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$.

β) Αρχικά θα πρέπει $x > 0$.

Θέτοντας $\ln x = \omega$ η ανίσωση $\ln^2 x - 3\ln x + 2 > 0$ γίνεται $\omega^2 - 3\omega + 2 > 0$ που όπως δείξαμε στο ερώτημα α) αληθεύει για $\omega < 1$ ή $\omega > 2$.

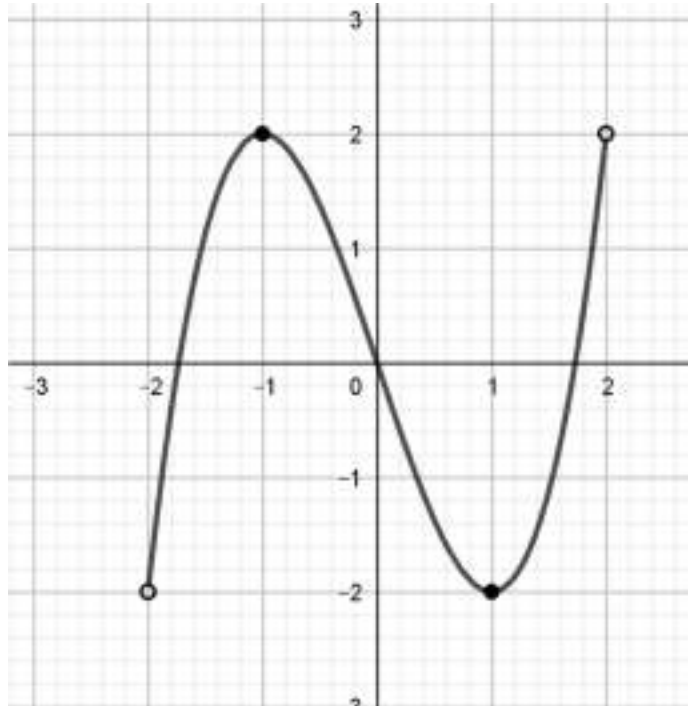
Για $\omega < 1$ έχουμε ότι $\ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^1 \Leftrightarrow 0 < x < e$.

Για $\omega > 2$ έχουμε ότι $\ln x > 2 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^2 \Leftrightarrow x > e^2$.

Τελικά η ανίσωση αληθεύει για $x \in (0, e) \cup (e^2, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2, 2)$.



α) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f για $x \in (-2, -1]$ και $x \in [1, 2)$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Για $x = -1$ η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της $f(-1) = 2$ και για $x = 1$ η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της $f(1) = -2$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \text{ και } Q(x) = \alpha x^2 + 7, \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι $P(x) = 4x^2 + 7$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \Leftrightarrow$$

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2x^3 - 2 + 9 \Leftrightarrow$$

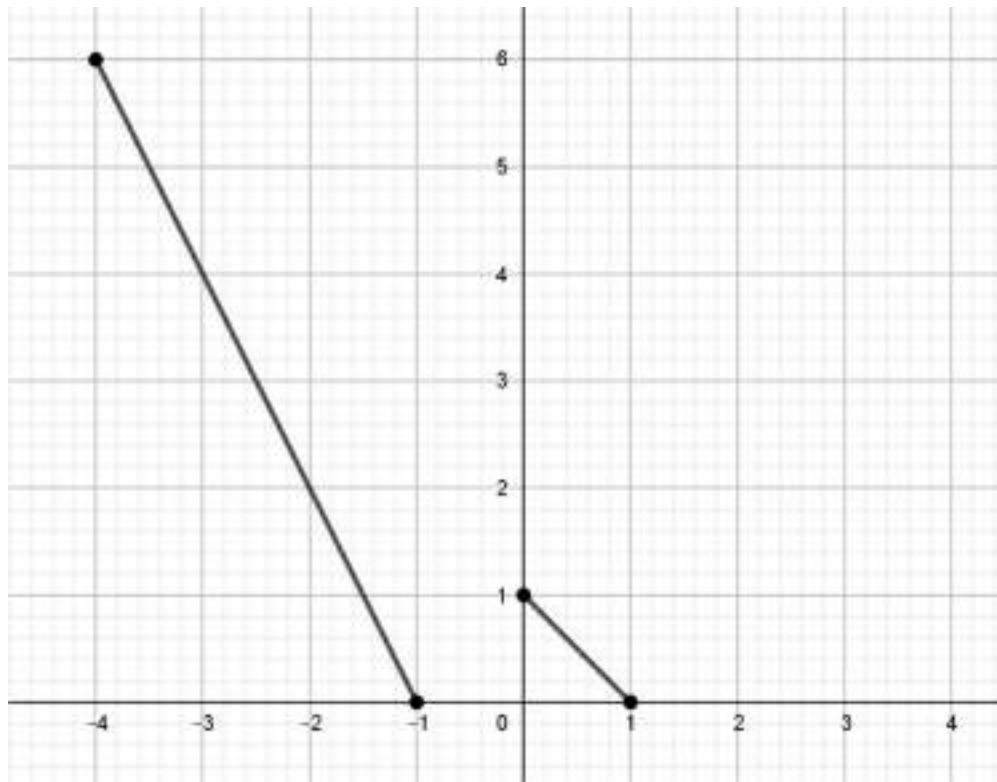
$$P(x) = 0x^3 + 4x^2 + 7 \Leftrightarrow$$

$$P(x) = 4x^2 + 7.$$

β) Για να είναι τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ίσα, πρέπει να είναι ίδιου βαθμού και να έχουν τους αντίστοιχους συντελεστές ίσους. Άρα πρέπει $\alpha = 4$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4, 4]$.



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .

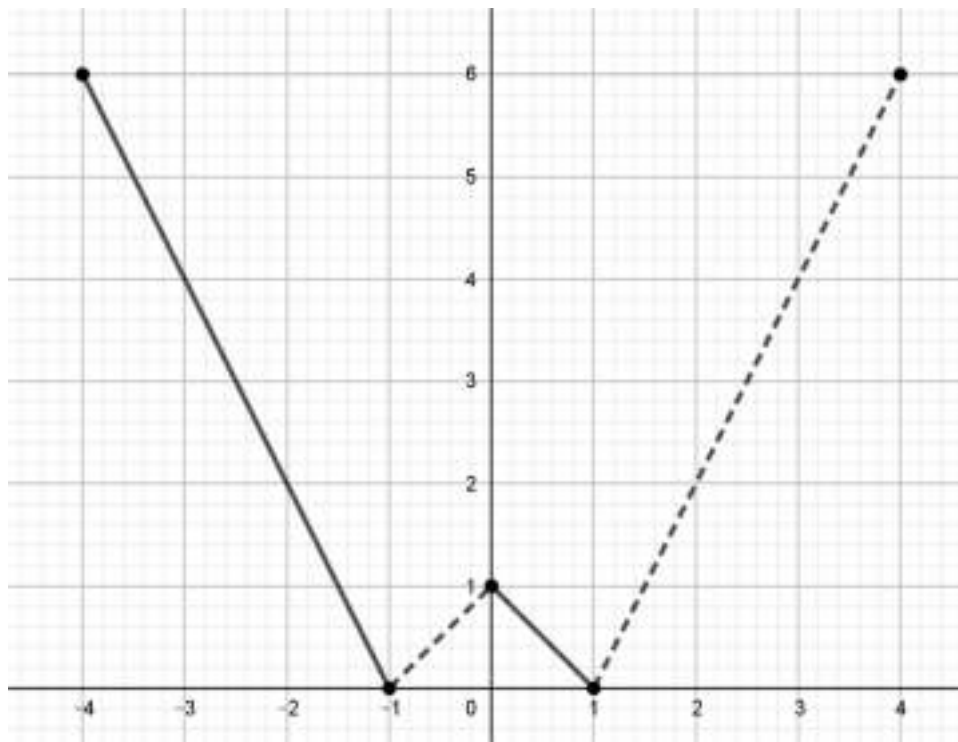
(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ άξονα. Στο παρακάτω σχήμα είναι χαραγμένα και τα υπόλοιπα τμήματα με διακεκομμένη γραμμή.



β) Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα είναι τα $[-4, -1]$ και $[0, 1]$, γιατί στα διαστήματα αυτά όσο μεγαλώνουν οι τιμές του x , μικραίνουν οι αντίστοιχες τιμές του y .

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = x + 1$ και $(\varepsilon_2): y = x - 4$.

α) Να εξετάσετε αν το σημείο $A(0,1)$ ανήκει και στις δύο ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν έχει λύση το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = -4 \end{cases}.$$

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Το σημείο $A(0,1)$ ελέγχουμε αν ανήκει στην ευθεία ε_1 , στην οποία αντικαθιστούμε $x=0$ και $y=1$ και έχουμε ότι $1=0+1$, το οποίο ισχύει. Άρα το σημείο A ανήκει στην ευθεία ε_1 . Ομοίως αντικαθιστώντας στην ευθεία ε_2 έχουμε $1=0-4$, το οποίο δεν ισχύει, άρα το σημείο A δεν ανήκει στην ευθεία ε_2 .

β) Το σύστημα γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = x - 4 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας από την $y = x + 1$ στην $y = x - 4$ έχουμε:

$$x + 1 = x - 4 \Leftrightarrow x - x = -1 - 4 \Leftrightarrow 0x = -5,$$

το οποίο δεν μπορεί να ισχύει για κανέναν πραγματικό αριθμό x .

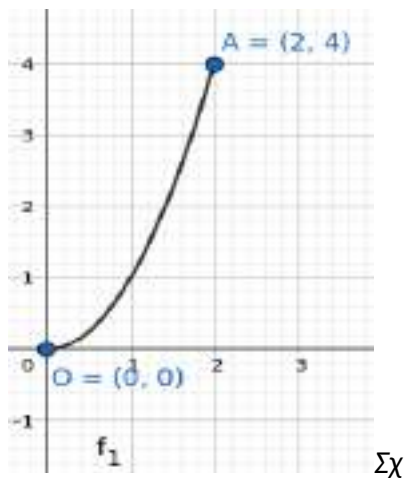
Οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

Σημείωση:

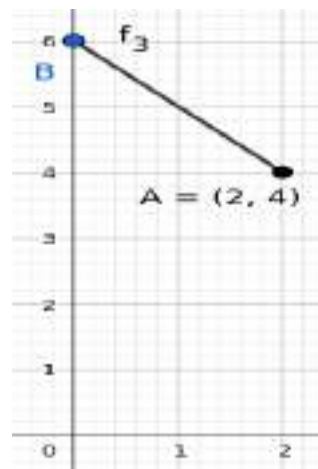
Το σύστημα αυτό έχει λύσεις τα κοινά σημεία των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, οπότε εφόσον το σύστημα είναι αδύνατο, οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δεν έχουν κοινά σημεία.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1, f_3 .



ήμα 1



Σχήμα 2

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των f_1, f_3 , εφόσον υπάρχουν.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τη μονοτονία των συναρτήσεων f_1, f_3 .

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Στο σχήμα 1 η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[0,2]$. Η ελάχιστη τιμή της είναι το 0 και η μέγιστη τιμή το 4 στο σημείο A.

Ανάλογα, στο σχήμα 2, η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[0,2]$, ελάχιστη τιμή 4 και μέγιστη τιμή 6.

β) Στο σχήμα 1 η γραφική παράσταση της συνάρτησης ανέρχεται, καθώς κινούμαστε προς τα δεξιά, δηλαδή καθώς οι τετμημένες των σημείων της μεγαλώνουν, συμβαίνει να μεγαλώνουν και οι αντίστοιχες τεταγμένες, οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$.

Στο σχήμα 2 η γραφική παράσταση της συνάρτησης κατέρχεται, καθώς κινούμαστε προς τα δεξιά, δηλαδή όταν οι τετμημένες των σημείων της αυξάνουν, συμβαίνει να μικραίνουν οι αντίστοιχες τεταγμένες, οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$.

α) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8$ και

$(\varepsilon_2): 2x - y = 3$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Πολλαπλασιάζοντας τους όρους της 2ης εξίσωσης με το 2 έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} \text{ και με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε } 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2.$$

Τέλος με αντικατάσταση με $x = 2$ στην 1η εξίσωση παίρνουμε

$$3 \cdot 2 + 2y = 8 \Leftrightarrow 2y = 2 \Leftrightarrow y = 1.$$

Τελικά η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (2, 1)$.

β) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8$ και $(\varepsilon_2): 2x - y = 3$

είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$, που όπως δείξαμε στο ερώτημα α) είναι $(2, 1)$.

Θέμα 2

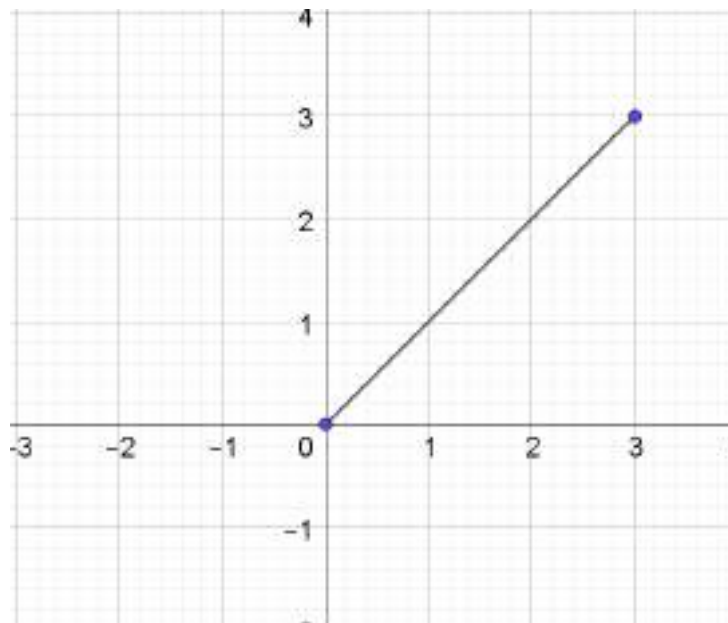
Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3,3]$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2,2)$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,3]$.

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 13)

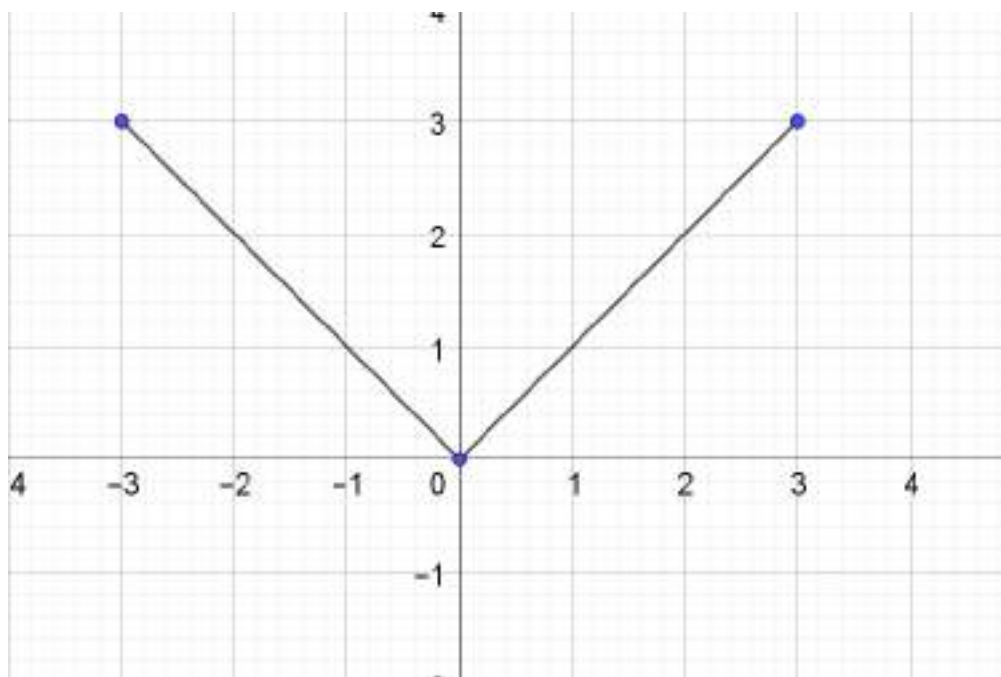
β) Να βρείτε το $f(-2)$.

(Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Εφόσον η συνάρτηση f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση θα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα yy' . Η γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



β) Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(2,2)$ έχουμε ότι $f(2) = 2$. Επίσης η f είναι άρτια οπότε $f(-2) = f(2) = 2$, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα.

Θέμα 2

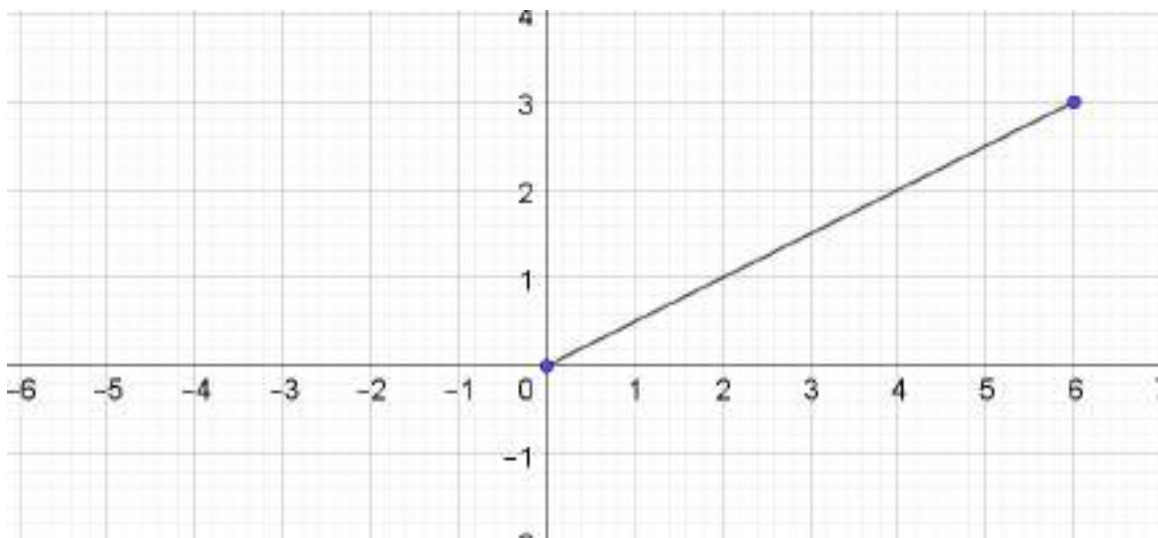
Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-6,6]$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4,2)$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$.

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 13)

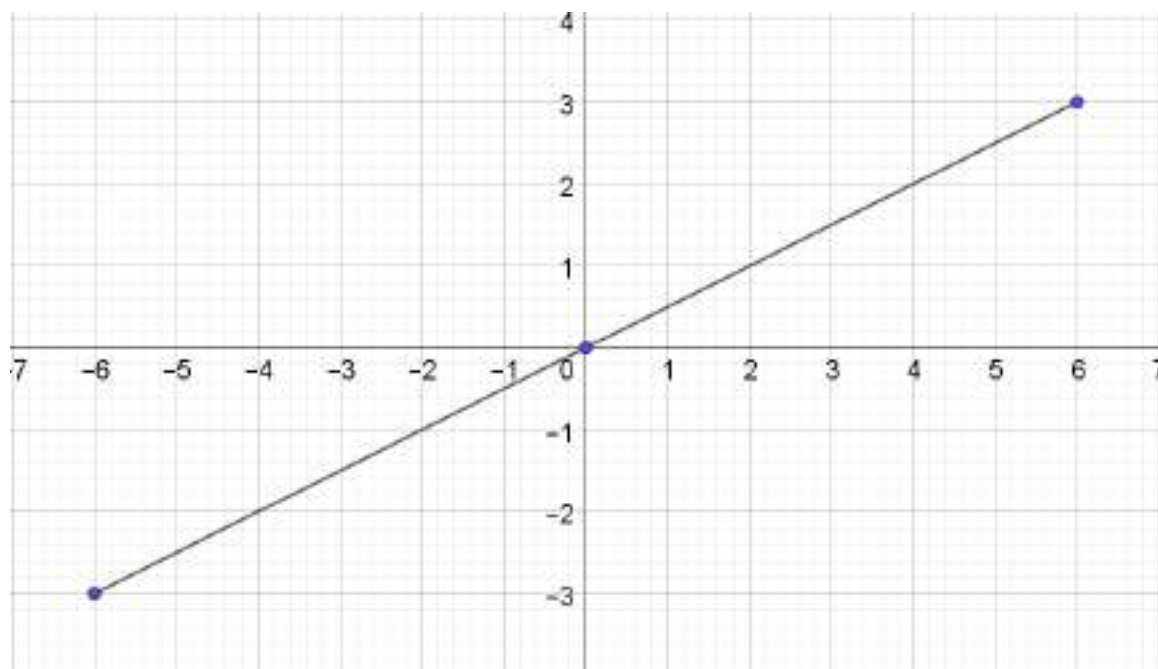
β) Να βρείτε το $f(-4)$.

(Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Εφόσον η συνάρτηση f είναι περιττή, η γραφική της παράσταση θα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $(0,0)$. Η γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



β) Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(4,2)$ έχουμε ότι $f(4)=2$. Επίσης η f είναι περιττή οπότε $f(-4)=-f(4)=-2$, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x + \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

(Μονάδες 5)

β) Για $\alpha = 2$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ και να δείξετε ότι $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$.

(Μονάδες 10)

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x + \alpha$ έχει ρίζα το 1 αν και μόνο αν

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 - 3 \cdot 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

β) Για $\alpha = 2$ είναι $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

i. Το σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

και η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$.

ii. Με $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$ η ανίσωση $P(x) < 0$ γίνεται $(x-1)(x^2 + x - 2) < 0$.

Το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και -2 και γίνεται αρνητικό (δηλαδή ετερόσημο του συντελεστή του x^2) για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των αριθμών -2 και 1. Το πρόσημο του $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	+	+
$x^2 + x - 2$	+	-	-	+
$(x-1)(x^2 + x - 2)$	-	+	-	+

Συνεπώς η ανίσωση $P(x) < 0$ αληθεύει για $x \in (-\infty, -2)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + \lambda x - 2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το $x+1$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ .

(Μονάδες 8)

β) Για $\lambda = 3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα και το $x-2$ και ότι

$$P(x) = (x-2)(x+1)(x-1)^2.$$

(Μονάδες 10)

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + \lambda x - 2$ έχει παράγοντα το $x+1$ αν και μόνο αν

$$P(-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-1)^4 - 3(-1)^3 + (-1)^2 + \lambda(-1) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + 3 + 1 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 3$$

β) Για $\lambda = 3$ είναι $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$.

i. Το σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x) : (x-2)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :

1	-3	1	3	-2	2
	2	-2	-2	2	
1	-1	-1	1	0	

και από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x^3 - x^2 - x + 1) = \\ &= (x-2)[x^2(x-1) - (x-1)] = \\ &= (x-2)(x-1)(x^2 - 1) = \\ &= (x-2)(x-1)(x-1)(x+1) = \\ &= (x-2)(x+1)(x-1)^2 \end{aligned}$$

ii. Με $P(x) = (x-2)(x+1)(x-1)^2$ η εξίσωση $P(x) = 0$ γίνεται $(x-2)(x+1)(x-1)^2 = 0$ που έχει λύσεις τους αριθμούς 2, -1 και 1 (διπλή).

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - x^2 - \lambda x + 2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, του οποίου το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x-1$ είναι 3.

α) να βρείτε την τιμή του λ .

(Μονάδες 7)

β) για $\lambda = 1$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ και να αποδείξετε ότι

$$P(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3.$$

(Μονάδες 8)

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x) = 3x^3 - x^2 - \lambda x + 2$ με το $x-1$ είναι 3, αν και μόνο αν $P(1) = 3 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^3 - 1^2 - \lambda \cdot 1 + 2 = 3 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

β) Για $\lambda = 1$ είναι $P(x) = 3x^3 - x^2 - x + 2$.

i. Το σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :

3	-1	-1	2	1
	3	2	1	
3	2	1	3	

και η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $P(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$.

ii. Με $P(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$ η ανίσωση $P(x) < 3$ γίνεται

$$(x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3 < 3 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 2x + 1) < 0.$$

Το τριώνυμο $3x^2 + 2x + 1$ έχει αρνητική διακρίνουσα οπότε γίνεται θετικό (δηλαδή ομόσημο του συντελεστή του x^2) για κάθε πραγματική τιμή του x . Συνεπώς $(x-1)(3x^2 + 2x + 1) < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Συνεπώς η ανίσωση $P(x) < 3$ αληθεύει για $x \in (-\infty, 1)$.

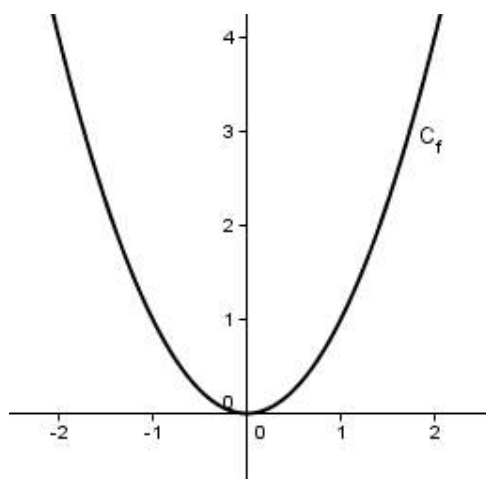
ΘΕΜΑ 2

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\phi(x) = x^2 + 1$

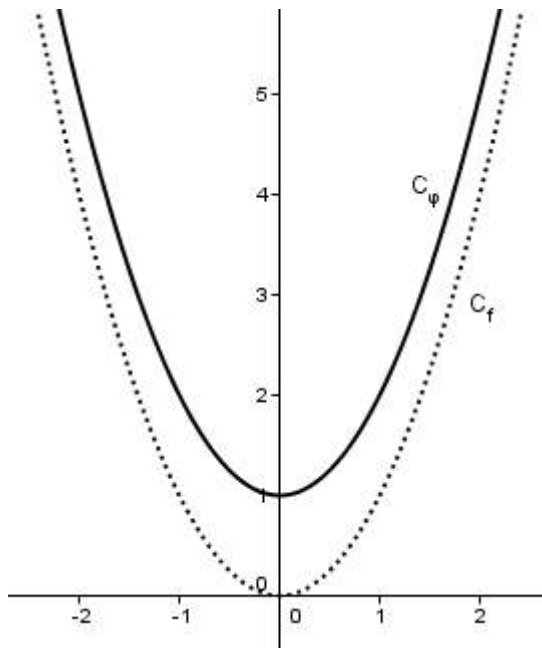


(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Από το δοσμένο σχήμα προκύπτει ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\phi(x) = x^2 + 1$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε τη C_f μια μονάδα προς τα πάνω και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\log x = \log 10 - \log 2$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $\log 10 - \log 2 = \log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων έχουμε:

$$\log 10 - \log 2 = \log \frac{10}{2} = \log 5$$

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος, α) έχουμε:

$$\log x = \log 10 - \log 2 \Leftrightarrow \log x = \log 5 \Leftrightarrow x = 5$$

Άρα η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 5.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : 3x - 4y = 2$ και $\varepsilon_2 : 5x + 4y = 14$.

α) Να εξετάσετε αν το σημείο $(6, 4)$ είναι κοινό σημείο των ευθειών.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το σημείο τομής των δυο ευθειών λύνοντας το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 5x + 4y = 14 \end{cases}.$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Με $x=6$ και $y=4$ έχουμε:

$$3x - 4y = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 4 = 18 - 16 = 2$$

οπότε το σημείο $(6, 4)$ είναι πάνω στην πρώτη ευθεία. Επιπλέον,

$$5x + 4y = 5 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 30 + 16 = 46 \neq 0$$

οπότε το σημείο $(6, 4)$ δεν είναι πάνω στην δεύτερη ευθεία. Άρα, το σημείο $(6, 4)$ δεν είναι κοινό σημείο των ευθειών.

β) Αν προσθέσουμε τις εξισώσεις του συστήματος $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 5x + 4y = 14 \end{cases}$ παίρνουμε $8x = 16$, οπότε

$$x = 2.$$

Αντικαθιστούμε $x=2$ στην δεύτερη εξίσωση και έχουμε $10 + 4y = 14$, οπότε $4y = 4$, άρα $y = 1$.

Επομένως το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1 : 3x - 4y = 2$ και $\varepsilon_2 : 5x + 4y = 14$ είναι το $M(2, 1)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

α) Να δείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $(x - 2)(x^2 - 2x - 3) > 0$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το $x-2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ αν και μόνο αν

$$P(2) = 0. \text{ Έχουμε } P(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 8 - 16 + 2 + 6 = 0.$$

β) Με το σχήμα Horner για $x = 2$, παίρνουμε

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

Επομένως $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 3) = 0$, από όπου παίρνουμε $x = 2$ ή $x^2 - 2x - 3 = 0$

δηλαδή $x = -1$ ή $x = 3$ (είναι $\Delta = 16$).

γ) Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου του πολυωνύμου

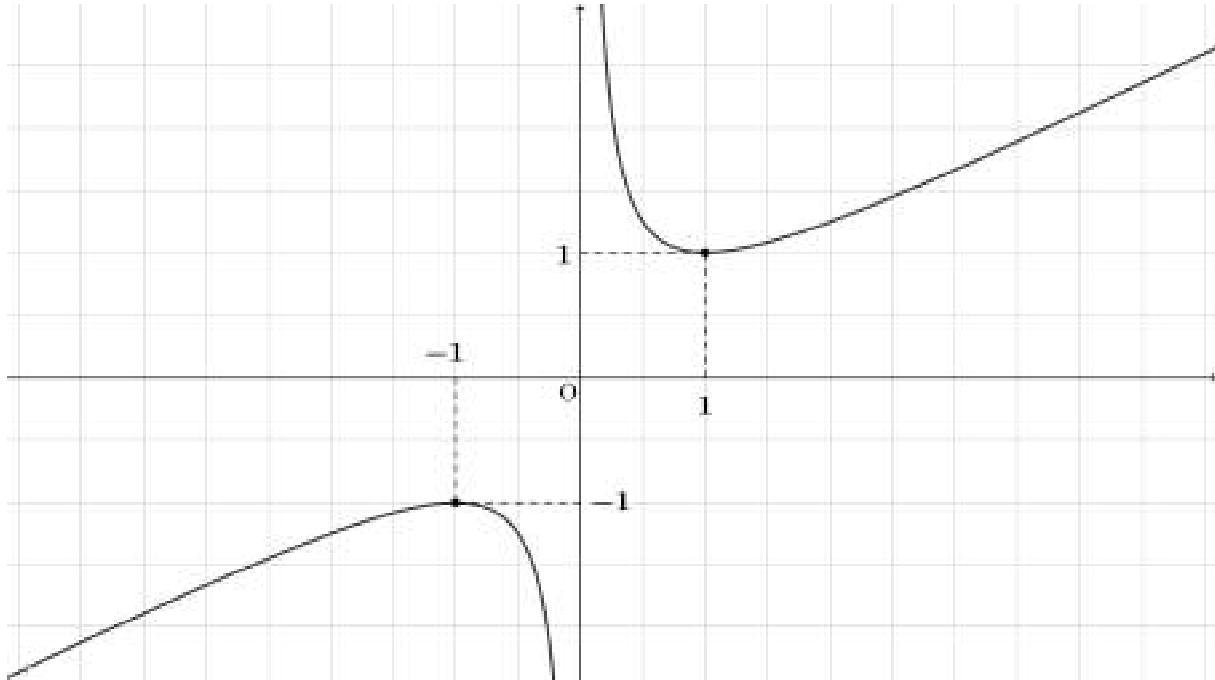
x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$		
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$x^2 - 2x - 3$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Οπότε $(x-2)(x^2 - 2x - 3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 2) \cup (3, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = f(x)$ με $x \neq 0$.

Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος:



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

(Μονάδες 15)

β) Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός «η συνάρτηση f είναι περιττή».

Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι:

- γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.
- γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0)$ και $(0, 1]$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων, άρα η συνάρτηση f είναι περιττή. Αυτό σημαίνει ότι ο ισχυρισμός «η συνάρτηση f είναι περιττή», είναι αληθής.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λυθεί το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} 2x + 7y = -5 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

(Μονάδες 15)

β) Ποιο είναι το σημείο τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ) ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 7y = -5 \\ 3x - y = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7y = -5 \\ 3x - 4 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7(3x - 4) = -5 \\ 3x - 4 = y \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 2x + 21x - 28 = -5 \\ 3x - 4 = y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 23x = 23 \\ 3x - 4 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3 \cdot 1 - 4 = y \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x = 1 \\ -1 = y \end{cases} \end{aligned}$$

Τελικά, η λύση του συστήματος (Σ) είναι το ζεύγος $(x, y) = (1, -1)$.

β) Επειδή η λύση του συστήματος (Σ) του ερωτήματος (α) είναι το ζεύγος $(x, y) = (1, -1)$,
έπεται ότι το σημείο τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος
 (Σ) είναι το $(1, -1)$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω θ μια γωνία που περιέχεται στο διάστημα $[0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\theta = 0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,6$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η θ είναι γωνία του πρώτου τεταρτημόριου του τριγωνομετρικού κύκλου.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu(-\theta)$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας θ είναι θετικό και το πρόσημο του ημιτόνου και του συνημιτόνου είναι θετικά στο διάστημα $[0, 2\pi]$ μόνο για τις γωνίες του πρώτου τεταρτημόριου. Άρα η γωνία θ είναι στο πρώτο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου.

β) Είναι γνωστό ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο δηλαδή $\sin(-\theta) = \sin\theta$.

Έτσι, έχουμε:

$$A = \sin\theta + \sin\theta = 2\sin\theta = 2 \cdot 0,6 = 1,2$$

Επομένως η τιμή της παράστασης A είναι ίση με $1,2$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x + 1$.

(Μονάδες 8)

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, ή με όποιο άλλο τρόπο μπορείτε, να αποδείξετε ότι

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι το πολυώνυμο έχει ρίζα τον αριθμό -1 . Με $x = -1$ έχουμε:

$$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) - 4 = -1 + 1 + 4 - 4 = 0$$

οπότε ο αριθμός -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου, οπότε αυτό έχει παράγοντα το $x + 1$.

β) Το πολυώνυμο γράφεται:

$$P(x) = x^2(x + 1) - 4(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 4) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

γ) Αρχικά θα βρούμε τις ρίζες του πολυωνύμου. Είναι:

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \text{ ή } x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -2 \end{aligned}$$

Επομένως το πολυώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $-2, -1, 2$ τις οποίες τοποθετούμε στον άξονα.

Στο πρώτο δεξιά διάστημα όλοι οι παράγοντες του πολυωνύμου είναι θετικοί, οπότε το $P(x)$ είναι θετικό. Στο επόμενο διάστημα το $P(x)$ είναι αρνητικό αφού μόνο ο παράγοντας $x - 2$ είναι αρνητικός. Αν συνεχίσουμε έτσι, σχηματίζεται ο παρακάτω πίνακας προσήμου για το $P(x)$.

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Επομένως η ανίσωση $P(x) \leq 0$ έχει λύση κάθε αριθμό x με $x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 2]$.

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-1} = \frac{x}{2}$

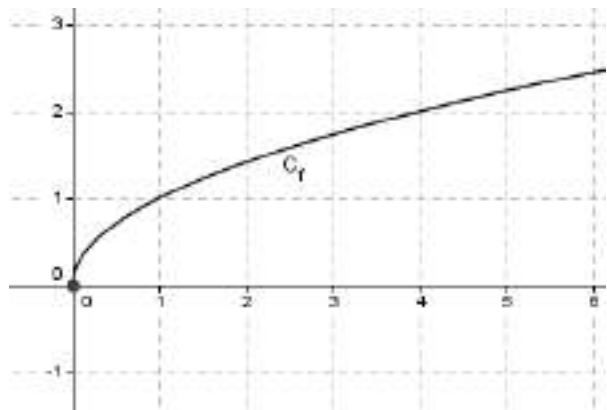
(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της $f(x) = \sqrt{x}$, τη γραφική παράσταση της $g(x) = \sqrt{x-1}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων με τη γραφική παράσταση της g και τη γραφική παράσταση της ευθείας $y = \frac{x}{2}$. Κατόπιν να ερμηνεύσετε γραφικά τη λύση της εξίσωσης του ερωτήματος α).

(Μονάδες 7)



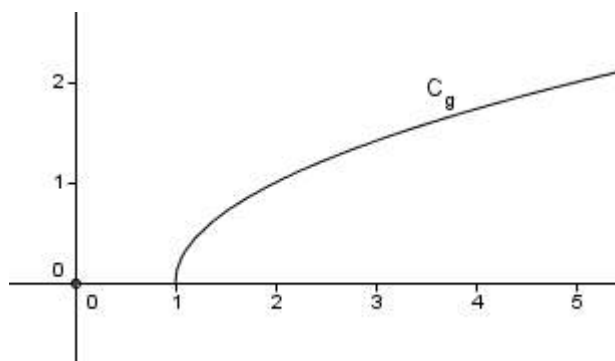
ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση ορίζεται μόνο όταν $x-1 \geq 0$ δηλαδή $x \geq 1$. Με $x \geq 1$ αν υψώσουμε στο τετράγωνο τα μέλη της $\sqrt{x-1} = \frac{x}{2}$ παίρνουμε $x-1 = \frac{x^2}{4}$ που γράφεται διαδοχικά

$$4x-4 = x^2, x^2-4x+4=0, (x-2)^2=0$$

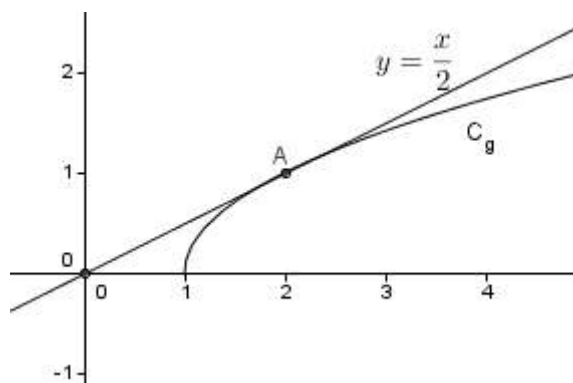
και έχει ρίζα τον αριθμό 2. Ο αριθμός αυτός επαληθεύει την αρχική εξίσωση, αφού $\sqrt{2-1} = \frac{2}{2} = 1$. Άρα η εξίσωση $\sqrt{x-1} = \frac{x}{2}$ έχει ρίζα τον αριθμό 2.

β) Η γραφική παράσταση της $g(x) = \sqrt{x-1}$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ δεξιά κατά μια μονάδα και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



γ) Με $x=2$ έχουμε $y = \frac{2}{2} = 1$, οπότε η ευ-

θεία $y = \frac{x}{2}$ διέρχεται από το σημείο $A(2, 1)$. Επίσης διέρχεται από την αρχή O και φαίνεται στο επόμενο σχήμα μαζί με τη γραφική παράσταση της $g(x)$



Από το παραπάνω φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ έχει κοινό σημείο με την ευθεία το σημείο $A(2, 1)$, οπότε η εξίσωση $g(x) = \frac{x}{2}$ δηλαδή η $\sqrt{x-1} = \frac{x}{2}$ έχει ρίζα τον αριθμό 2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 6$.

(Μονάδες 8)

β) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το πολυώνυμο έχει ρίζα τον αριθμό 1, οπότε ισχύει:

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - 6 + 11 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 6$$

β) Η διαίρεση $P(x) : (x - 1)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	$x - 1$
$-x^3 + x^2$	$x^2 - 5x + 6$
$-5x^2 + 11x - 6$	
$5x^2 - 5x$	
$6x - 6$	
$-6x + 6$	
0	

Από τα παραπάνω σχήμα προκύπτει η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$.

γ) Είναι:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 5x + 6) \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 - 5x + 6 = 0$$

Η εξίσωση $x - 1 = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό 1, ενώ η εξίσωση $x^2 - 5x + 6 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 25 - 24 = 1$ και ρίζες τους αριθμούς 2 και 3.

Επομένως η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1, 2, 3.

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = x^2 + 1$.

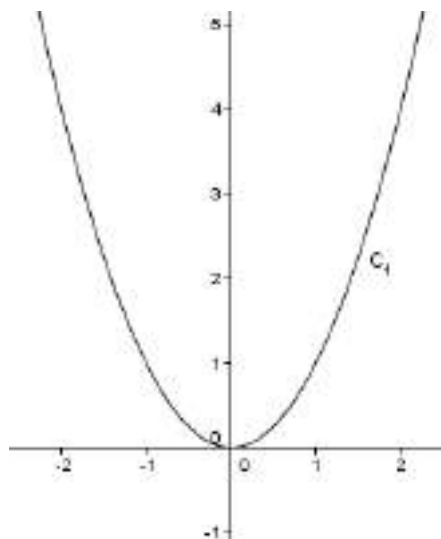
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της $g(x)$.

(Μονάδες 8)

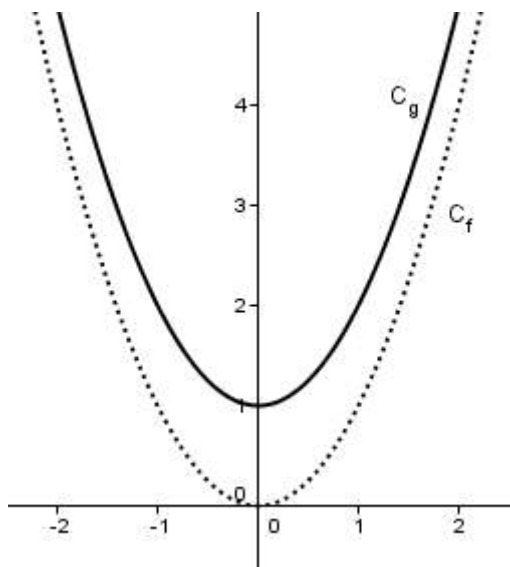
γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_g με τη γραφική παράσταση της $h(x) = x^3 + x$.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x)=x^2+1$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=x^2$, αν την μετακινήσουμε μια μονάδα προς τα πάνω και φαίνεται στο σχήμα.



β) Από την παραπάνω γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$. Η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με $g(0)=1$.

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της $g(x)$ με τη γραφική παράσταση της $h(x)=x^3+x$ προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $g(x)=h(x)$. Είναι:

$$g(x)=h(x) \Leftrightarrow x^2+1=x^3+x \Leftrightarrow x^3-x^2+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)+(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=1$$

Επιπλέον, $g(1)=2$, οπότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)$, $h(x)$ έχουν κοινό σημείο το $A(1, 2)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f(\pi)$.

(Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{13\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\eta\mu\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\eta\mu\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad f(\pi) = 2\eta\mu\pi = 2 \cdot 0 = 0$$

β) Επειδή

$$f\left(\frac{13\pi}{4}\right) = 2\eta\mu\frac{13\pi}{4} = 2\eta\mu\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 2\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(-\eta\mu\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \neq \sqrt{2}$$

συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{13\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$.

γ) Είναι:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κ\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2κ\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κ\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2κ\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin x - 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

(Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη

$$x = \frac{17\pi}{3}.$$

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} - 1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} - 1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$$

και

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

β) Με $x = \frac{17\pi}{3}$ έχουμε:

$$f\left(\frac{17\pi}{3}\right) = 2\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{3} - 1 = 2\sigma\upsilon\nu\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 2\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 1 = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x 'ς στο σημείο με τετμημένη $x = \frac{17\pi}{3}$.

γ) Είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ ή }$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(2\eta\mu x - 1)(x^2 - 4) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό $\frac{\pi}{6}$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν έχει ρίζα τον αριθμό $\frac{\pi}{4}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $\frac{\pi}{6}$, αφού

$$2\eta\mu\frac{\pi}{6}-1=2\cdot\frac{1}{2}-1=1-1=0$$

β) Ο αριθμός $\frac{\pi}{4}$ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, αφού $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-4\neq 0$ και

$$2\eta\mu\frac{\pi}{4}-1=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\sqrt{2}-1\neq 0.$$

γ) Είναι:

$$(2\eta\mu x-1)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x=1 \text{ ή } x^2-4=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{1}{2} \text{ ή } x^2=4$$

και

- $\eta\mu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$
- $x^2=4 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=2$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$$

α) Το ζεύγος $(x, y) = (0, 3)$ είναι λύση του συστήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε το σύστημα.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Ζεύγος αριθμών είναι λύση συστήματος αν και μόνο αν αντικαθιστώντας επαληθεύει τις εξισώσεις του.

Έχουμε $3x - y \stackrel{x=0}{=} -3 \neq 5$. Οπότε το ζεύγος $(x, y) = (0, 3)$ δεν είναι λύση του συστήματος.

β) Επιλύοντας με την μέθοδο των οριζουσών έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7, \quad D_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 1 = 14, \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7.$$

$$\text{Επομένως } x = \frac{D_x}{D} = \frac{14}{7} = 2 \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{7}{7} = 1.$$

Τελικά $(x, y) = (2, 1)$.

ΘΕΜΑ 2

Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-3$ έχει πηλίκο x^2+2 και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-3$ και να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$.

(Μονάδες 13)

β) Είναι το $x=3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με την ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

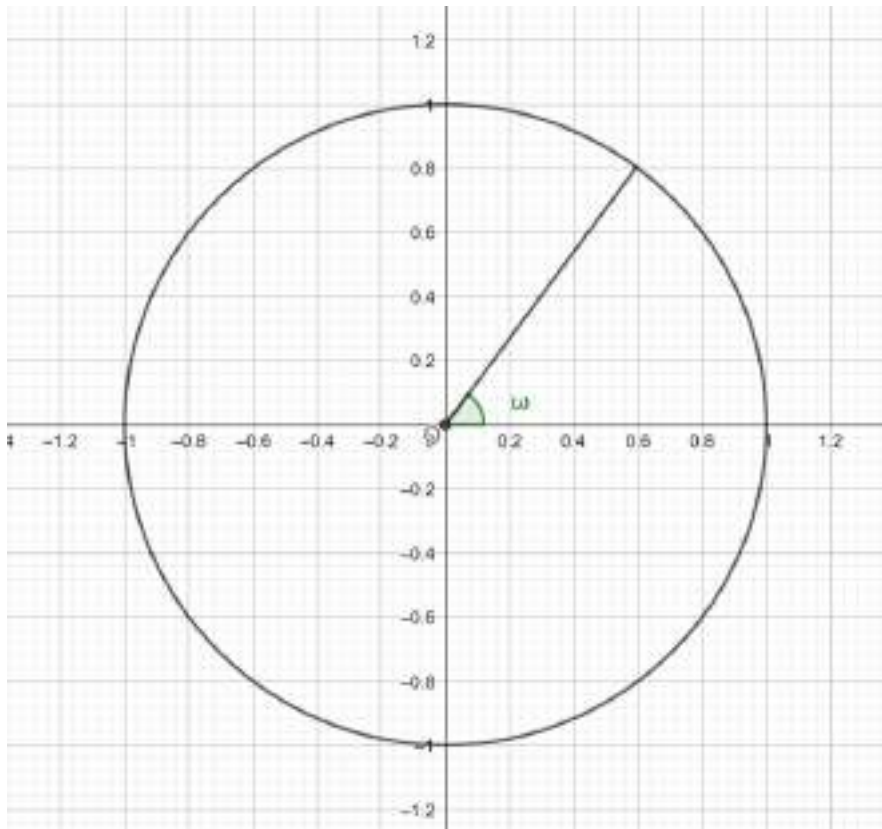
$$P(x) = (x-3)(x^2+2) + 4 \Leftrightarrow P(x) = x^3 + 2x - 3x^2 - 6 + 4. \text{ Τελικά } P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2.$$

β) Ο αριθμός $x=3$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, αν και μόνο αν $P(3) = 0$.

Έχουμε $P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 2 \Leftrightarrow P(3) = 27 - 27 + 6 - 2 \Leftrightarrow P(3) = 4 \neq 0$. Επομένως το $x=3$ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.



α) Με βάση το σχήμα:

i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \omega = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε το $\eta \mu \omega$.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την $\epsilon \varphi \omega$.

(Μονάδες 9)

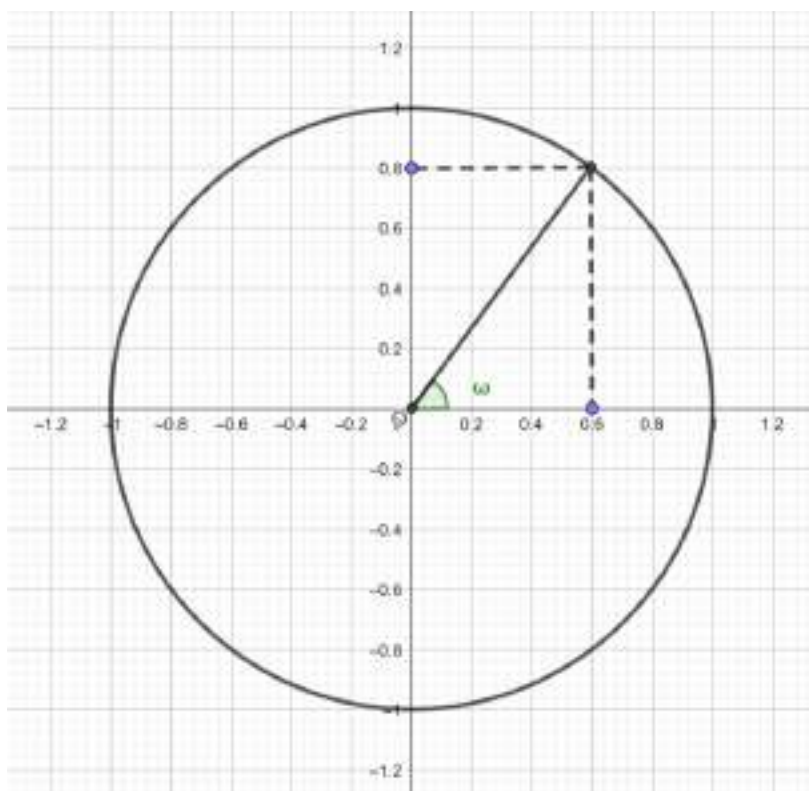
ΛΥΣΗ

α)

i. Το συνημίτονο μιας γωνίας είναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής της πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο. Οπότε έχουμε $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$.

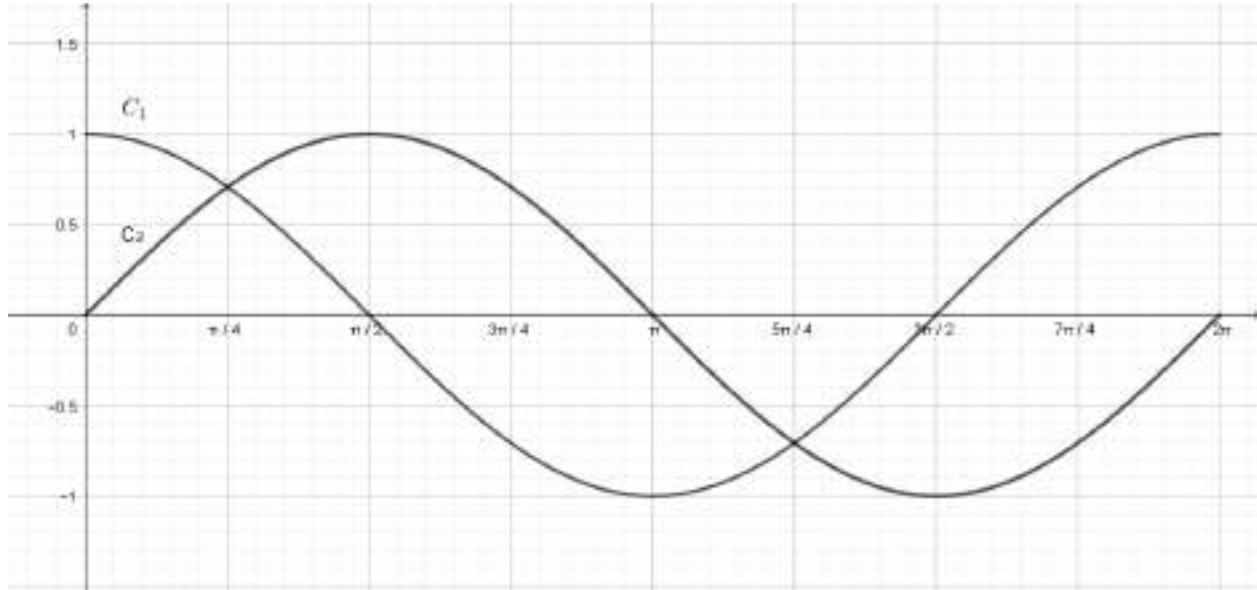
ii. Το ημίτονο της γωνίας $\hat{\omega}$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής της πλευράς με το κύκλο, δηλαδή $\eta\mu\omega = 0,8 = \frac{4}{5}$.

β) Έχουμε $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$.



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 στο διάστημα $[0, 2\pi]$.



α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \eta\mu x$, ποια από τις C_1 , C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και ποια της $g(x) = \eta\mu x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

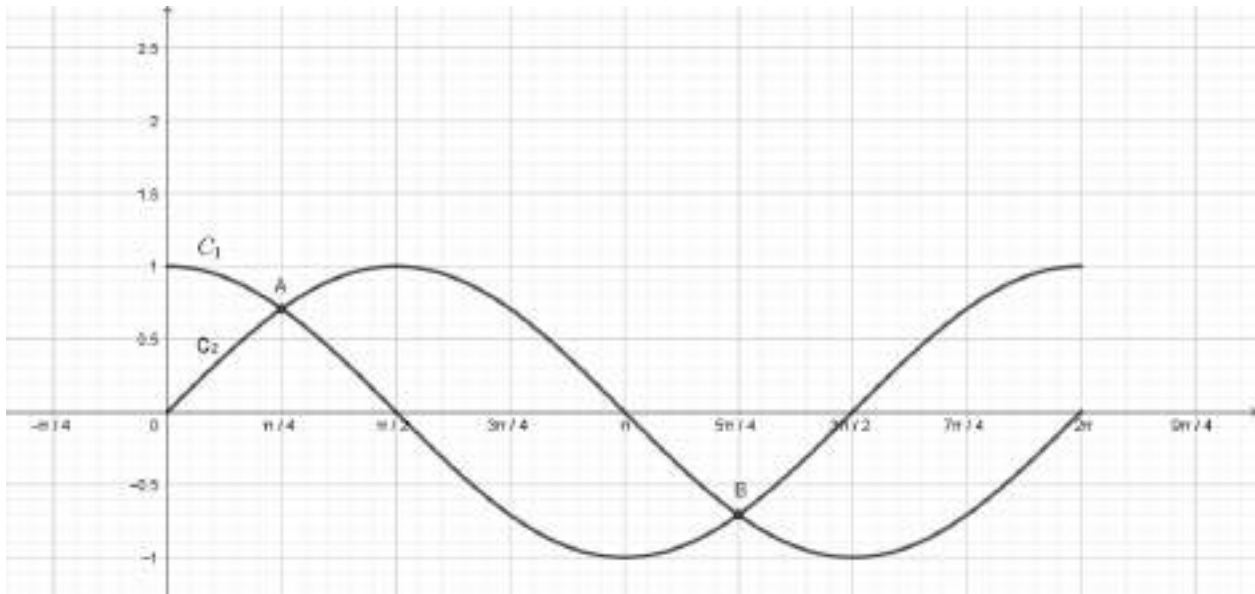
β) Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$, στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(x) = \sin x \xrightarrow{x=0} f(0) = \sin 0 \Rightarrow f(0) = 1$. Άρα η C_1 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Επομένως η C_2 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

β) Επίλυση μιας εξίσωσης των τύπων δύο συναρτήσεων γραφικά είναι η εύρεση, με την βοήθεια του σχήματος, των τετμημένων των σημείων τομής που έχουν οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι τα A και B , με τετμημένες $x_1 = \frac{\pi}{4}$ και $x_2 = \frac{5\pi}{4}$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x)					

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x)$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

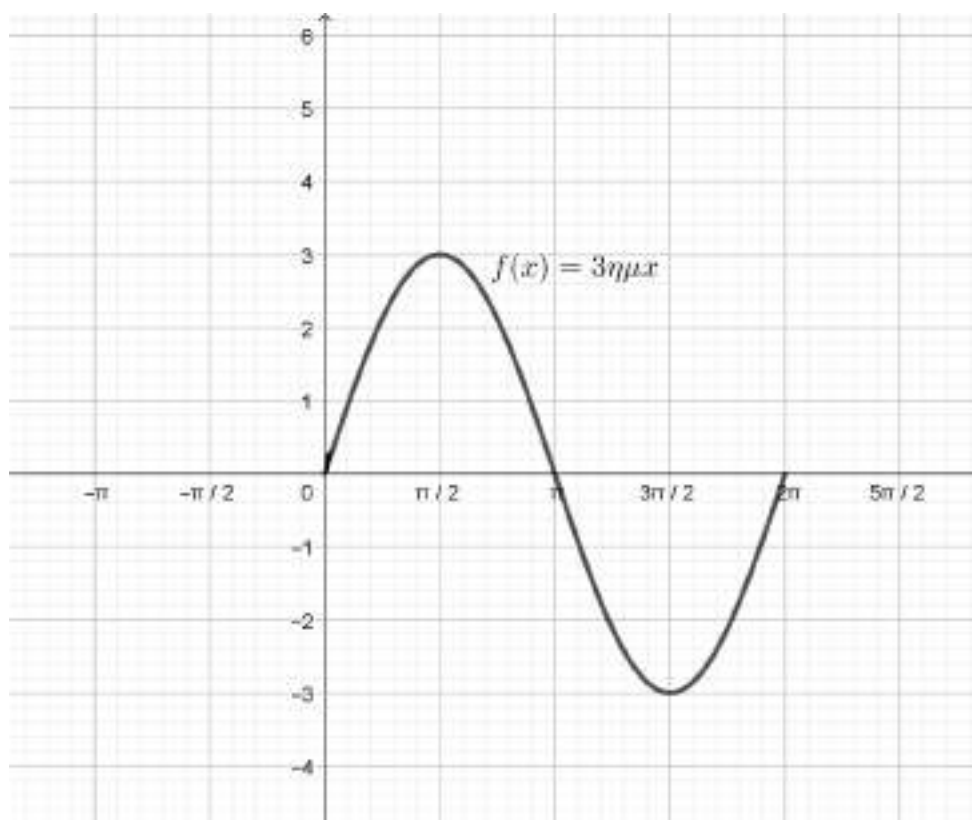
(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $\eta\mu 0 = 0$, $\eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$, $\eta\mu \pi = 0$, $\eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1$ και $\eta\mu 2\pi = 0$ έχουμε

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x)	0	3	0	-3	0

β)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x - 1) = 0$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ως λογαριθμική ορίζεται για $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Επομένως, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $D_f = (1, +\infty)$.

β) Για να βρούμε το $x > 1$ (περιορισμός από το α) ερώτημα) τέτοιο ώστε $\log(x - 1) = 0$ θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του λογαρίθμου με βάση 10. Άρα $\log(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 10^0 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ και $\delta(x) = x + 1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : \delta(x)$.

(Μονάδες 15)

β) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή το $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ και $\delta(x) = x + 1$, έχουμε:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + x + 1 & x + 1. \\ -x^3 - x^2 & \\ \hline x^2 + x + 1 & x^2 + x \\ -x^2 - x & \\ \hline 1 & \end{array}$$

β) Από τη διαίρεση του α) ερωτήματος προκύπτει ότι το πηλίκο της διαίρεσης είναι:

$\pi(x) = x^2 + x$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x) = 1$.

Η ταυτότητα της διαίρεσης δίνεται από τον τύπο $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$. Με αντικατάσταση έχουμε $x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x) + 1$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν $P(x) = (x-1)(x-2)(x+1)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι: $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 0$, άρα ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}P(x) &= 0 \Leftrightarrow \\x^3 - 2x^2 - x + 2 &= 0 \Leftrightarrow \\x^2(x - 2) - (x - 2) &= 0 \Leftrightarrow \\(x - 2)(x^2 - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\(x - 2)(x - 1)(x + 1) &= 0.\end{aligned}$$

Άρα $x = 2$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.

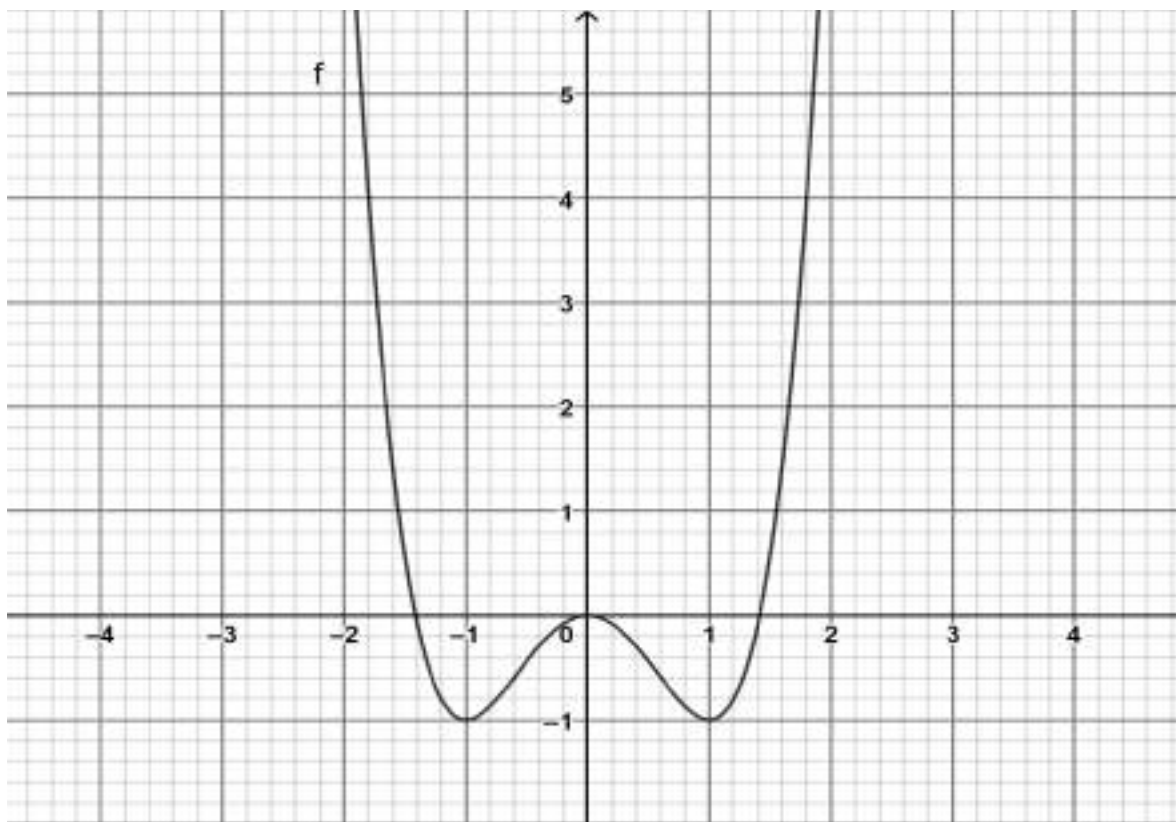
γ) Σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα προσήμου του πολυωνύμου $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 1)$,

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$x + 1$	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	0	+	+
$x - 2$	-	-	-	0	+
$P(x)$	-	+	-	+	

έχουμε $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



α) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις που την αποκτά.

(Μονάδες 12)

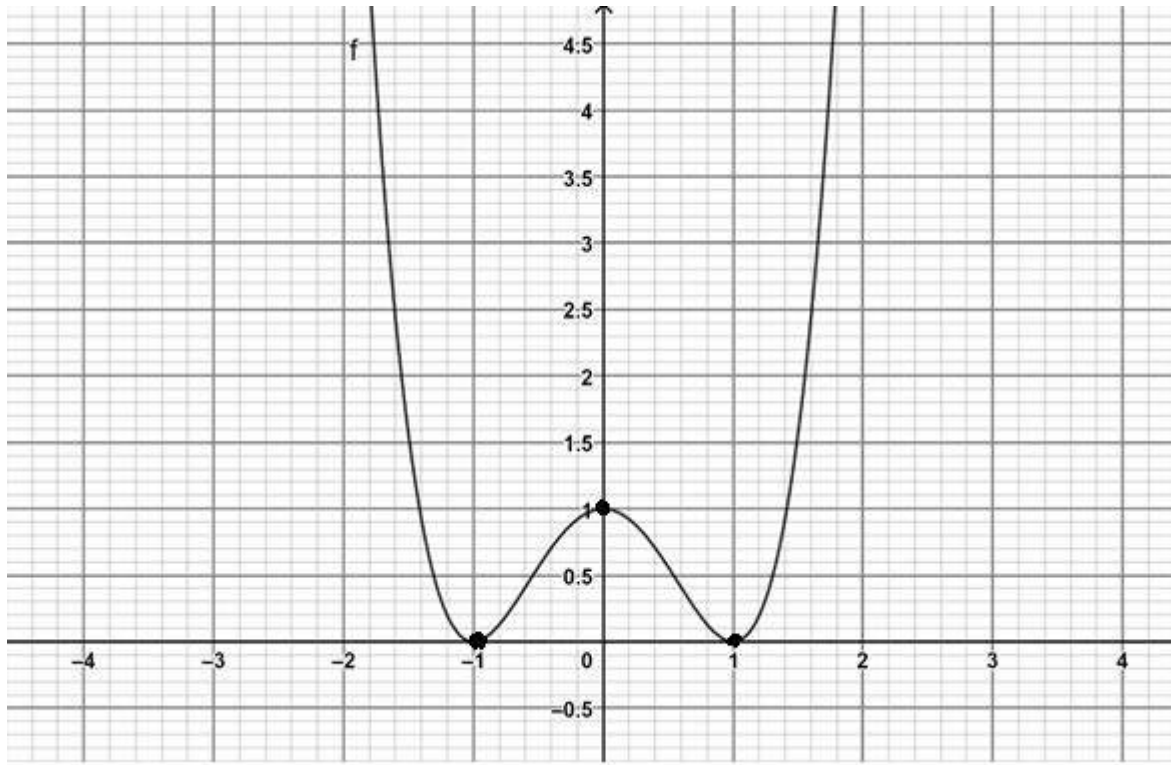
ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f για $x \in [-1, 0]$ και $x \in [1, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Για $x = -1$ και $x = 1$ η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της $f(-1) = f(1) = -1$. Άρα η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f είναι -1 .

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



α) Να βρείτε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις που την αποκτά.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι άρτια γιατί η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

β) Για $x = -1$ και $x = 1$ η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της $f(-1) = f(1) = 0$. Άρα η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f είναι 0.

ΘΕΜΑ 4

Ένα μικρό κατάστημα σε μια γειτονιά πουλάει, μεταξύ άλλων αγαθών, γάλα και ψωμί. Την Τρίτη το πρωί μέσα σε μια ώρα πούλησε 8 φρατζόλες ψωμί και 5 λίτρα γάλα και εισέπραξε 14 ευρώ. Την Πέμπτη το πρωί την ίδια ώρα πούλησε 6 φρατζόλες ψωμί και 9 λίτρα γάλα και εισέπραξε 21 ευρώ. Αν x είναι η τιμή πώλησης της μιας φρατζόλας ψωμιού και y η τιμή πώλησης του ενός λίτρου γάλακτος,

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την τιμή πώλησης της μιας φρατζόλας ψωμιού και του ενός λίτρου γάλακτος.

(Μονάδες 7)

γ)

i. Να παραστήσετε γραφικά το σύστημα του α) ερωτήματος και να ονομάσετε B το σημείο τομής των δυο ευθειών.

(Μονάδες 6)

ii. Αν το σημείο τομής των ευθειών είναι $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, να ερμηνεύσετε τις συντεταγμένες του στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Την Τρίτη το πρωί μέσα σε μια ώρα πούλησε 8 φρατζόλες ψωμί και 5 λίτρα γάλα και εισέπραξε 14 ευρώ, δηλαδή $8x + 5y = 14$.

Την Πέμπτη το πρωί την ίδια ώρα πούλησε 6 φρατζόλες ψωμί και 9 λίτρα γάλα και εισέπραξε 21 ευρώ, δηλαδή $6x + 9y = 21$.

Σχηματίζεται λοιπόν το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} 8x + 5y = 14 \\ 6x + 9y = 21 \end{cases}.$$

β) Για να βρούμε την τιμή πώλησης της μιας φρατζόλας ψωμιού και του ενός λίτρου γάλακτος, λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 8x + 5y = 14 \\ 6x + 9y = 21 \end{cases}$ χρησιμοποιώντας τις ορίζουσες:

$$D = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 8 \cdot 9 - 5 \cdot 6 = 72 - 30 = 42 \neq 0.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 14 & 5 \\ 21 & 9 \end{vmatrix} = 14 \cdot 9 - 5 \cdot 21 = 126 - 105 = 21.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 8 & 14 \\ 6 & 21 \end{vmatrix} = 8 \cdot 21 - 14 \cdot 6 = 168 - 84 = 84.$$

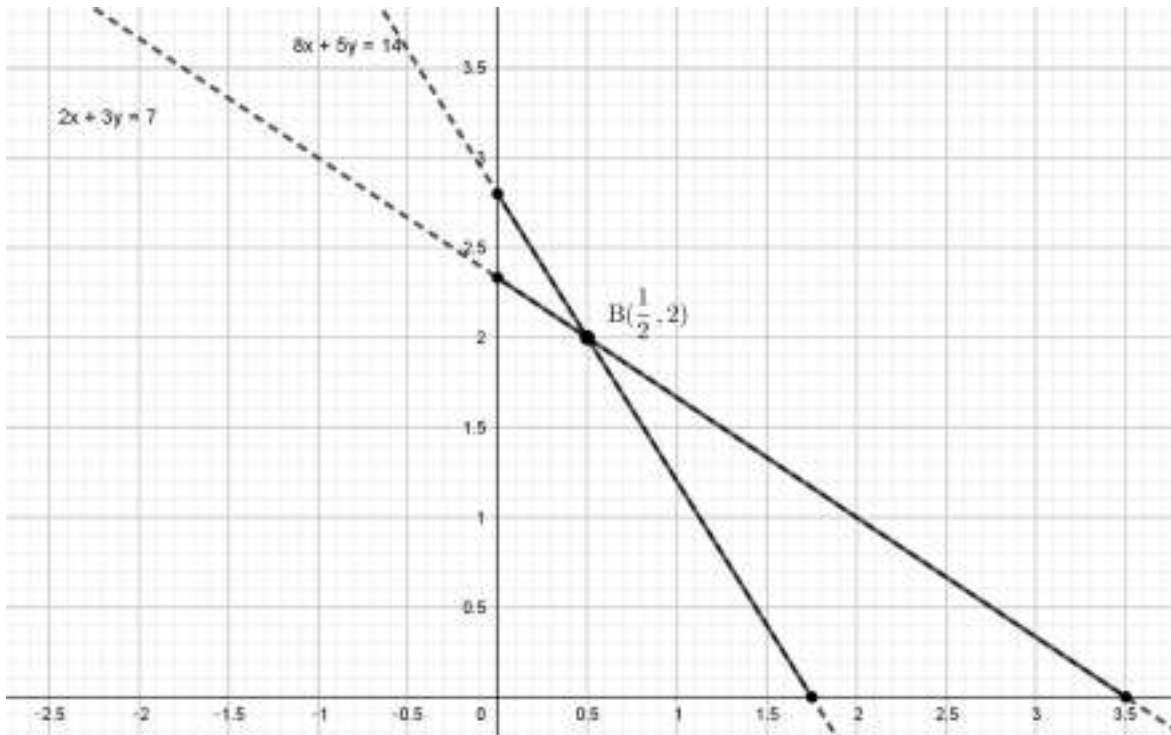
$$\text{Η λύση του συστήματος είναι } (x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{21}{42}, \frac{84}{42} \right) = \left(\frac{1}{2}, 2 \right).$$

Άρα η μία φρατζόλα ψωμί πωλείται μισό ευρώ και το ένα λίτρο γάλα 2 ευρώ.

γ)

ι. Οι εξισώσεις του παραπάνω συστήματος παριστάνουν ευθείες που τέμνονται, γιατί έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης (η πρώτη έχει $-\frac{8}{5}$ και η δεύτερη

$-\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$). Η ευθείες φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- ii. Το σημείο τομής των δυο ευθειών είναι το $B(\frac{1}{2}, 2)$, η τετμημένη του οποίου $x = \frac{1}{2}$ εκφράζει την τιμή πώλησης (σε ευρώ) της μίας φρατζόλας ψωμιού (μία φρατζόλα ψωμί πωλείται μισό ευρώ) και η τεταγμένη του $y = 2$ εκφράζει την τιμή πώλησης (σε ευρώ) του ενός λίτρου γάλακτος (το ένα λίτρο γάλα πωλείται 2 ευρώ).

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x - 3$, με $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = 2\sqrt{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

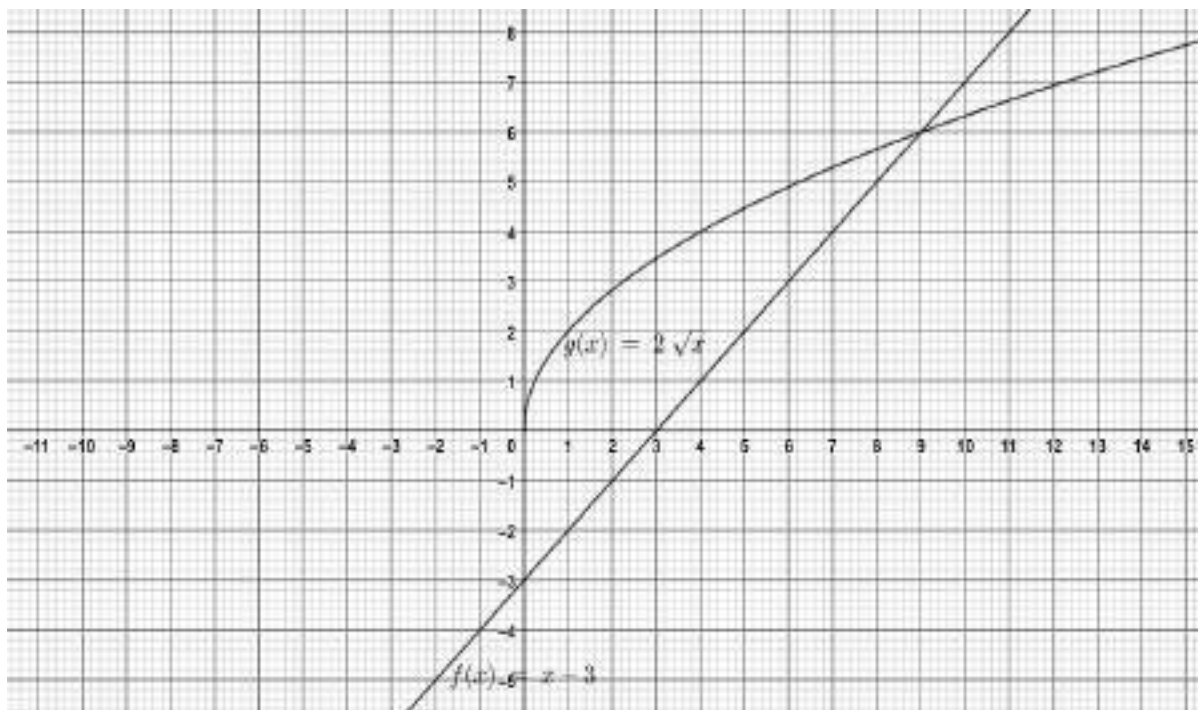
(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $g(x) < f(x)$.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση g ορίζεται για $x \geq 0$. Άρα $A_g = [0, +\infty)$.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ προκύπτουν από τις λύσεις της παρακάτω εξίσωσης

$$x - 3 = 2\sqrt{x}.$$

Η εξίσωση ορίζεται για $x \in [0, +\infty)$ και $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο

$$(x - 3)^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί 1 και 9. Η 1 απορρίπτεται διότι δεν επαληθεύει την αρχική εξίσωση.

Άρα η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μοναδική λύση την 9, επειδή την επαληθεύει.

γ) Οι λύσεις της ανίσωσης $g(x) < f(x)$ είναι οι τετμημένες των σημείων στα οποία η C_g βρίσκεται κάτω από τη C_f . Από το σχήμα προκύπτει πως αυτό συμβαίνει για $x > 9$.

Άρα η ανίσωση (1) έχει λύσεις για $x \in (9, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$ με $\lambda > 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \lambda \mu 2x$.

(Μονάδες 5)

β)

i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 3, να δείξετε ότι $\lambda = 3$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την περίοδο της f .

(Μονάδες 5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f στο διάστημα $[0, \pi]$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Από αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο με γωνίες με άθροισμα 90 μοίρες έχουμε $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \eta\mu 2x$ και $f(x) = \lambda \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \lambda \eta\mu 2x$.

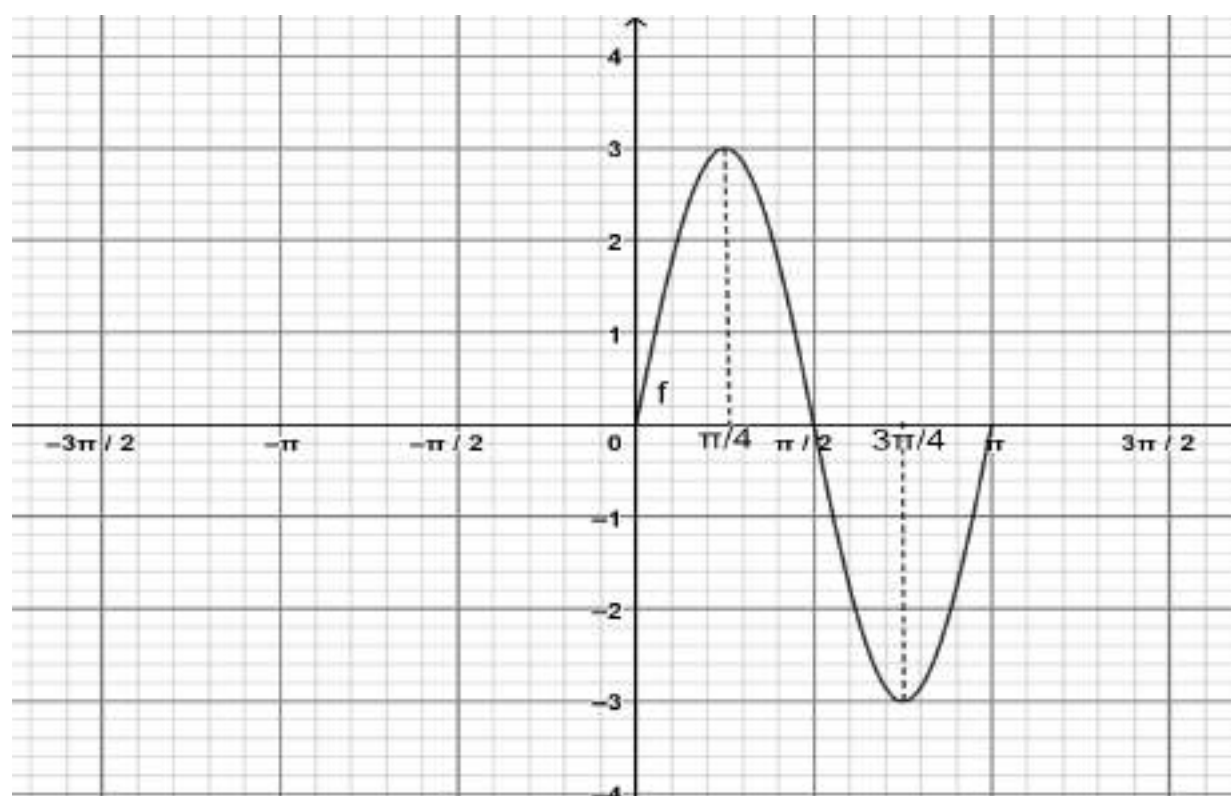
β) i. Παρατηρούμε πως η $f(x) = \lambda \eta\mu 2x$ έχει τη μορφή $\rho \eta\mu \omega x$, με $\rho = \lambda > 0$ και $\omega = 2$. Άρα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή λ και ελάχιστη τιμή $-\lambda$. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f μας δίνεται 3, δηλαδή $\lambda = 3$.

ii. Η περίοδος $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

γ) Η γραφική παράσταση της $f(x) = 3\eta\mu 2x$ στο διάστημα $[0, \pi]$, βάσει του παρακάτω πίνακα:

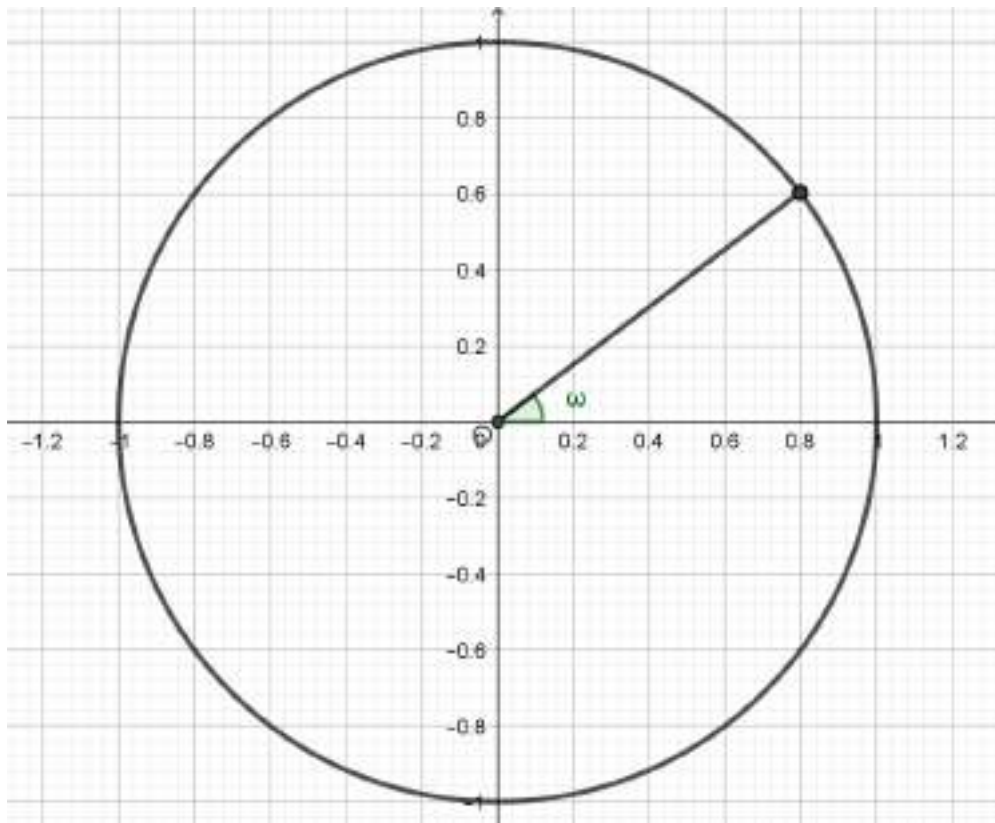
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$3\eta\mu 2x$	0	3	0	-3	0

δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.



α) Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε το $\sin \omega$ και το $\eta \mu \omega$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

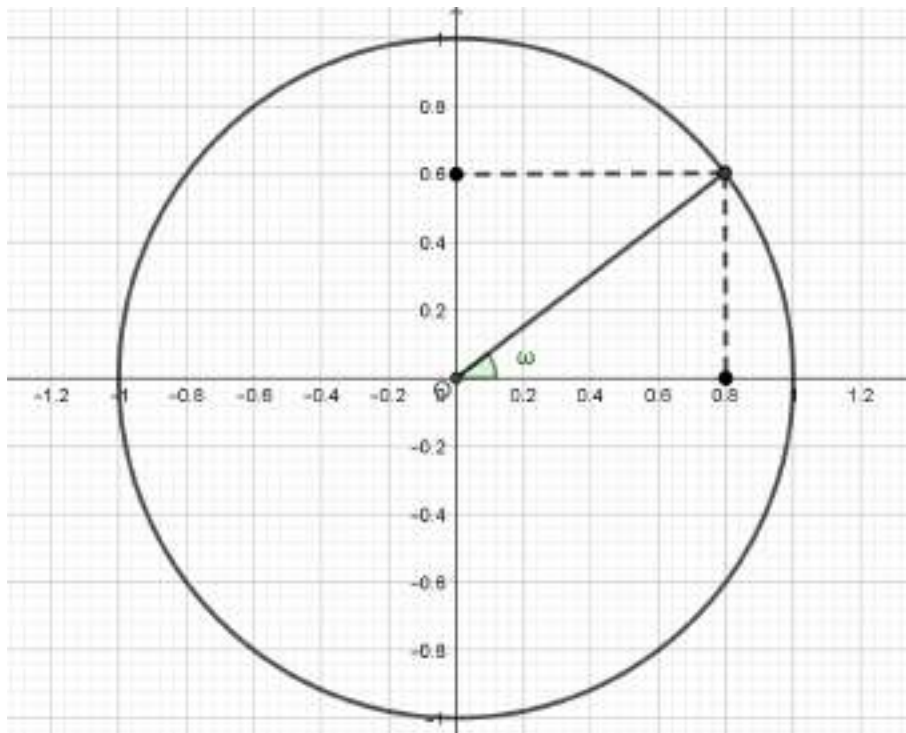
β) Να υπολογίσετε την $\epsilon \varphi \omega$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Επομένως είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = 0,8 = \frac{4}{5}$.

Αντίστοιχα το ημίτονο γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Επομένως είναι $\eta\mu\omega = 0,6 = \frac{3}{5}$.



β) Είναι $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$. Επομένως έχουμε $\epsilon\varphi\omega = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2(x-1)^{20} - 3(x-1)^{10} + 5x^2 - 3x - 2$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή $P(1)$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $P(1) = 2(1-1)^{20} - 3(1-1)^{10} + 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 0$.

β) Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$, άρα το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ΘΕΜΑ 4

Η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ μετριέται σε μονάδες ASA ή σε μονάδες DIN. Αν x μονάδες ASA συνδέονται με y μονάδες DIN με τον τύπο $y = 1 + 10 \cdot \log x$, τότε:

α) Να βρείτε πόσες μονάδες DIN είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες ASA, είναι 10.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε πόσες μονάδες DIN είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες ASA, είναι 200.

(Μονάδες 8)

γ) Να επιλύσετε τον παραπάνω τύπο ως προς x .

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε πόσες μονάδες ASA είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες DIN, είναι 13.

(Μονάδες 4)

Δίνεται ότι $\log 2 = 0,3$ και $10^{\frac{6}{5}} \cong 15,85$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 10$ παίρνουμε $y = 1 + 10 \cdot \log 10 = 1 + 10 \cdot 1 = 11$.

β) Για $x = 200$ παίρνουμε $y = 1 + 10 \cdot \log 200 = 1 + 10 \cdot \log(2 \cdot 10^2)$, οπότε
 $y = 1 + 10(\log 2 + \log 10^2) = 1 + 10(0,3 + 2) = 1 + 23 = 24$.

γ) Έχουμε: $y - 1 = 10 \cdot \log x$, οπότε $\log x = \frac{y-1}{10}$, άρα $x = 10^{\frac{y-1}{10}}$.

δ) Για $y = 13$, παίρνουμε $x = 10^{\frac{12}{10}} = 10^{\frac{6}{5}} \cong 15,85$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x, x > 0$ και $g(x) = \log(10x - 20), x > 2$.

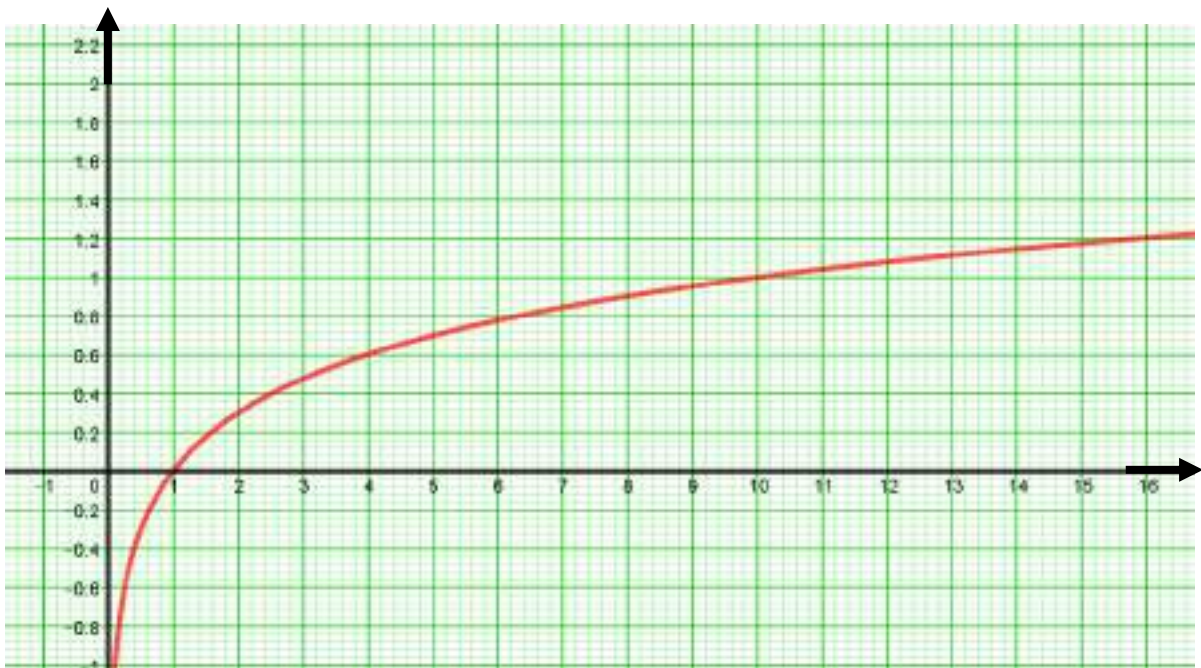
α) Να βρείτε τους αριθμούς $g(2,1)$ και $g(12)$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = 1 + f(x - 2)$.

(Μονάδες 8)

γ) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Να μεταφέρετε το παρακάτω σχήμα στο γραπτό σας, το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.



(Μονάδες 7)

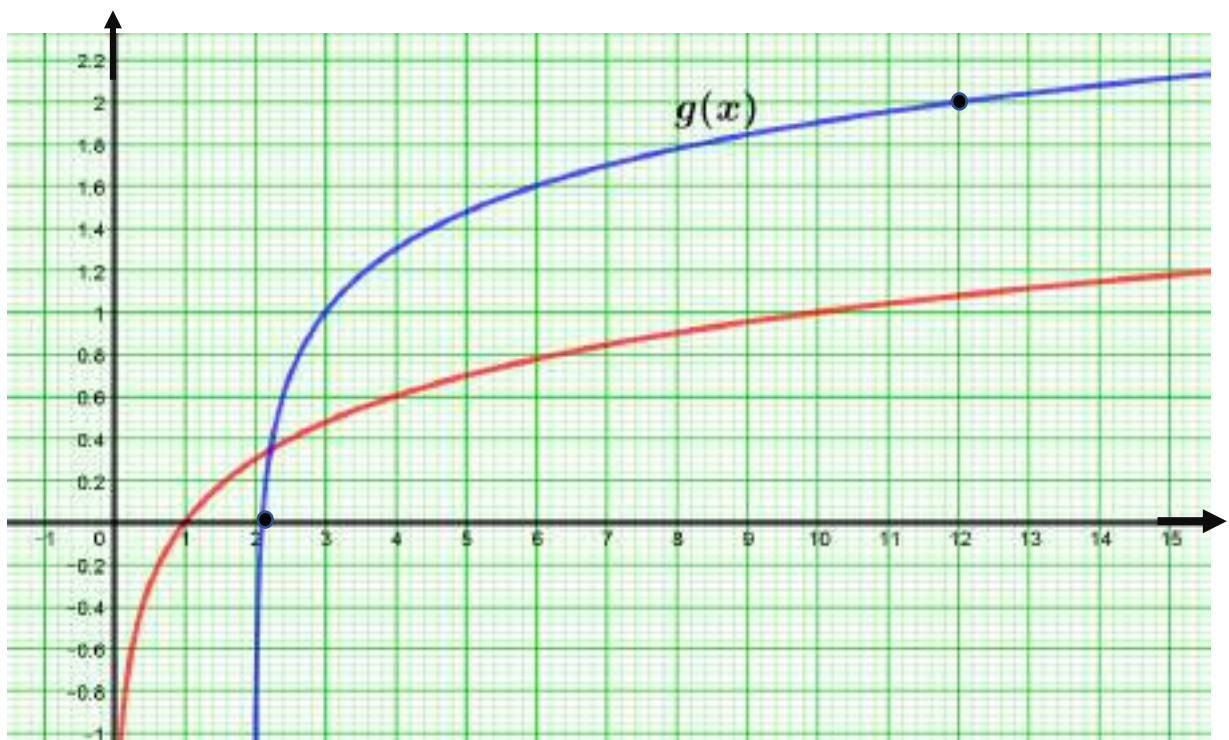
ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $g(2,1) = \log(21 - 20) = \log 1 = 0$.

$g(12) = \log(120 - 20) = \log 100 = 2$.

β) $g(x) = \log[10(x - 2)] = \log 10 + \log(x - 2) = 1 + f(x - 2)$.

γ) Με βάση το β) ερώτημα, η γραφική παράσταση της g θα προκύψει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω και στη συνέχεια μια οριζόντια μετατόπιση 2 μονάδων προς τα δεξιά. Τοποθετούμε στο σύστημα των αξόνων και τα σημεία $(2,1,0)$ και $(12,2)$ τα οποία στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι ανήκουν στη γραφική παράσταση της g .



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $x \in \mathbb{R}$ και έστω α, β, γ οι τετμημένες των σημείων στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση τον άξονα $x'x$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(3) = 0$.

(Μονάδες 5)

β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

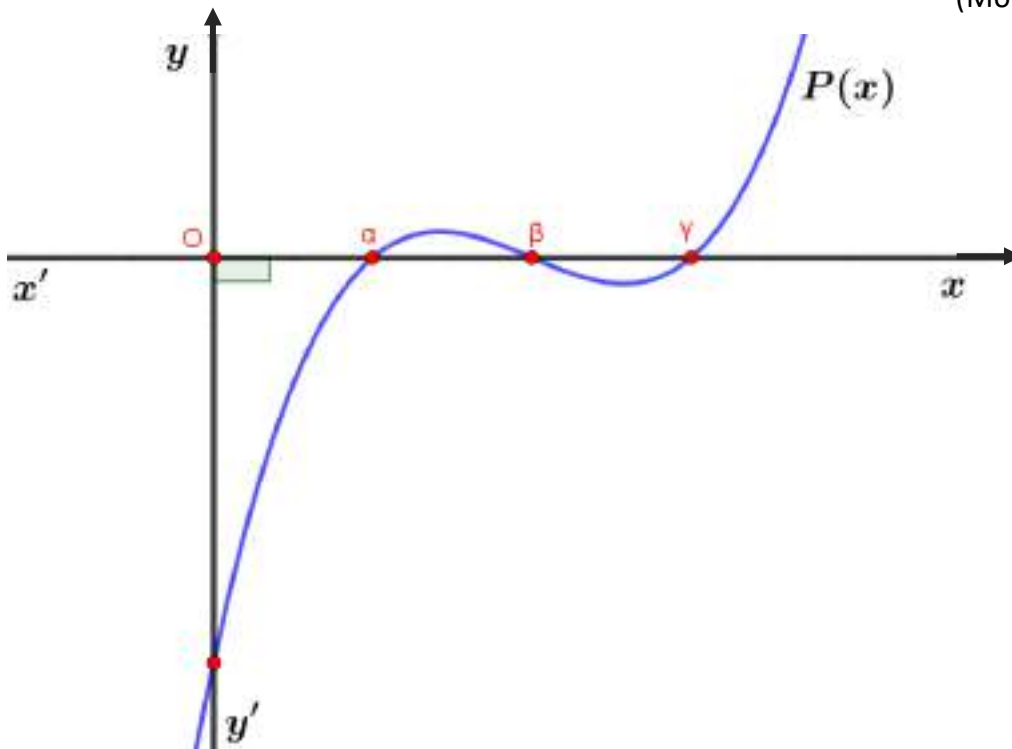
(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε, με αιτιολόγηση, τα α, β, γ .

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) $P(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 6 = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$.

β) Από το α) ερώτημα, διαπιστώνουμε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 3$, άρα η διαίρεση $P(x) : (x - 3)$ είναι τέλεια, οπότε βρίσκουμε το πηλίκο αυτής της διαίρεσης με την βοήθεια του σχήματος Horner.

1	-6	11	-6	3
	3	-9	6	
1	-3	2	0	

Οπότε η εξίσωση $P(x) = 0$ γράφεται $(x - 3)(x^2 - 3x + 2) = 0$, άρα $x = 3$ ή

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) - 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

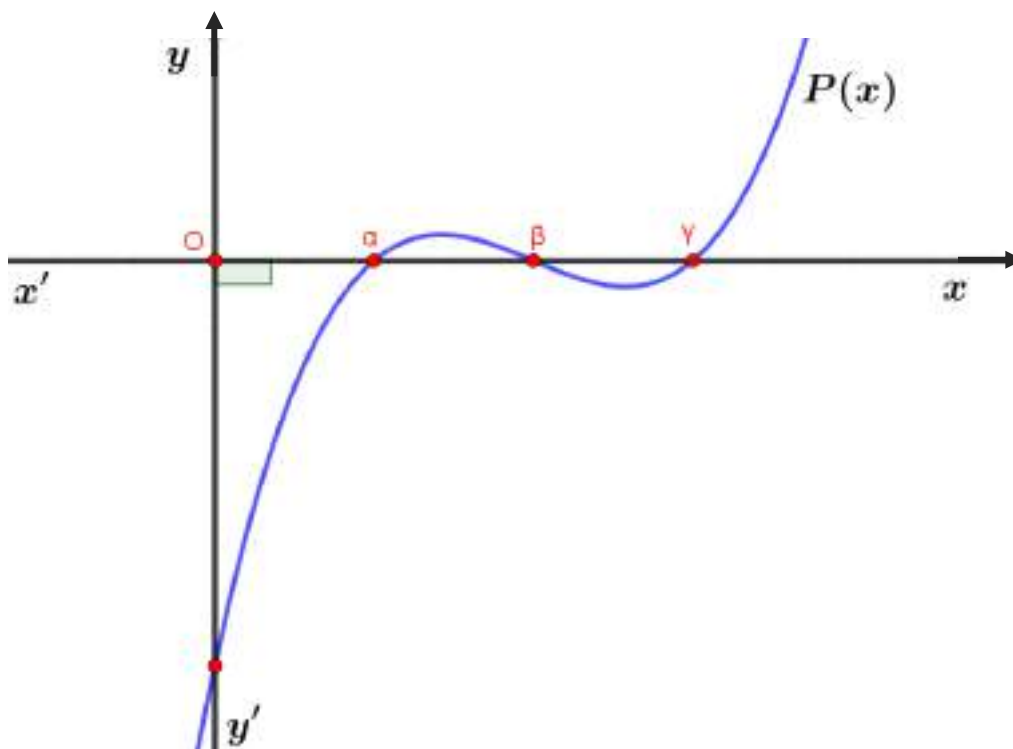
$$(x - 1)(x - 2) = 0 \text{ έτσι } x = 1 \text{ ή } x = 2.$$

Τελικά η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1, 2, 3.

γ) Οι αριθμοί α, β, γ είναι οι τετμημένες των σημείων που τέμνει η γραφική παράσταση της $P(x)$ τον άξονα $x'x$ και επομένως αποτελούν τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$, δηλαδή ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

Άρα $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$.

δ) Γεωμετρικά, διαπιστώνουμε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $P(x) < 0$ είναι το $\Sigma = (-\infty, 1) \cup (2, 3)$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2 \text{ και } Q(x) = -2x^2(x - 2) + 2.$$

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$;

(Μονάδες 5)

β) Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τη τιμή του πολυωνύμου $Q(x)$ για $x = 1$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ είναι ο εκθέτης του μεγιστοβάθμιου όρου, δηλαδή 3.

β) Για να είναι τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ίσα, πρέπει να είναι ίδιου βαθμού και να έχουν τους αντίστοιχους συντελεστές ίσους.

Κάνουμε τις πράξεις στο $Q(x)$ και έχουμε:

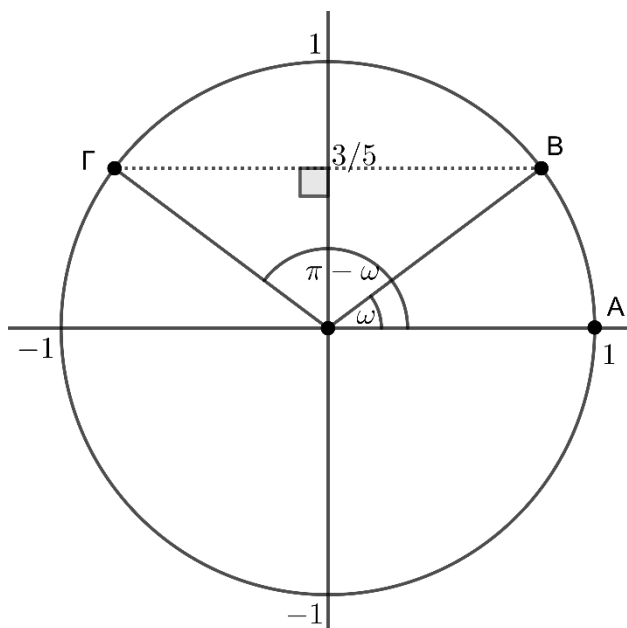
$$Q(x) = -2x^2(x - 2) + 2 = -2x^3 + 4x^2 + 2 = P(x).$$

Τα πολυώνυμα είναι 3^{ου} βαθμού και έχουν τους ίδιους συντελεστές, άρα είναι ίσα.

γ) Από το β ερώτημα και για $x = 1$ έχουμε $Q(1) = -2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 2 = 4$.

ΘΕΜΑ 4

Για τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος ισχύει ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.



α) Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\omega$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5}$, να υπολογίσετε τα $\eta\mu(\pi - \omega)$ και $\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τις $\epsilon\varphi\omega$ και $\epsilon\varphi(\pi - \omega)$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega \xrightarrow{\eta\mu\omega = \frac{3}{5}} \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{16}{25}.$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$. Άρα, $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$. Οπότε, $\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

β) Ισχύει ότι $\eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$.

γ) Έχουμε ότι

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

και

$$\varepsilon\varphi(\pi - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega = -\frac{3}{4}.$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι $\log 100 = 2$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του x ώστε $\log 5 + \log x = 2$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2$.

β) Για $x > 0$ είναι:

$$\log 5 + \log x = 2 \Leftrightarrow \log(5x) = \log 100 \Leftrightarrow 5x = 100 \Leftrightarrow x = 20.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \quad (1).$$

α) Να υπολογίσετε την ορίζουσα D του συστήματος (1).

(Μονάδες 14)

β) Αν $D = 7$, $D_x = 14$ και $D_y = 21$, να γράψετε τη λύση του συστήματος (1).

(Μονάδες 11)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 = 4 + 3 = 7.$$

β) Επειδή $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{14}{7} = 2$$

και

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{21}{7} = 3.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 16x^2 + 4x - 27$.

α) Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 8)$ είναι $v = 5$.

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε το $P(8)$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Κάνουμε τη διαίρεση $P(x): (x - 8)$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

2	-16	4	-27	8
	16	0	32	
2	0	4	5	

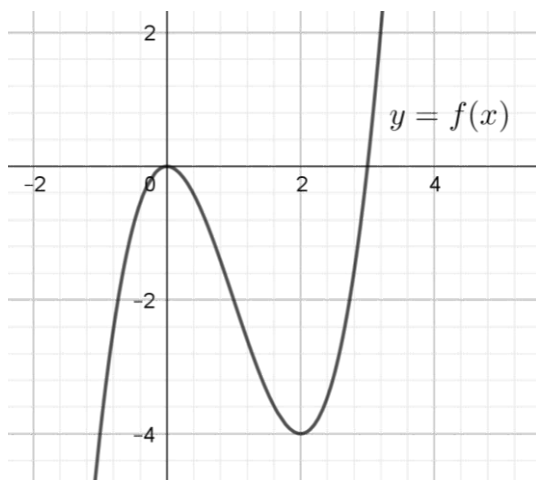
Άρα, το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x): (x - 8)$ είναι $v = 5$.

β) Γνωρίζουμε ότι το $P(8)$ ισούται με το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου με $x - 8$.

Άρα, $P(8) = 5$.

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα 1, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2$ με $x \in \mathbb{R}$.



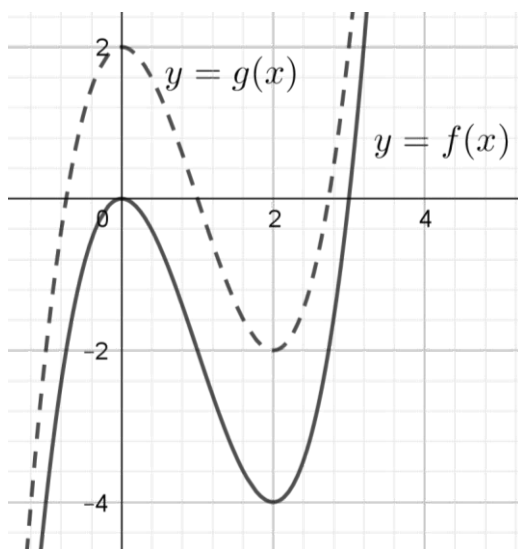
Σχήμα 1

α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 14)

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g του σχήματος 2, η οποία προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της f .

(Μονάδες 11)



Σχήμα 2

ΛΥΣΗ

α) Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,2]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$.

β) Από το σχήμα 2 συμπεραίνουμε ότι η g προκύπτει από την f με μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα πάνω. Άρα, $g(x) = f(x) + 2 \Leftrightarrow g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

ΘΕΜΑ 2

Ένας μαθητής έγραψε στον πίνακα τις ισότητες $\eta\mu x = -\frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$, όπου x , είπε ότι είναι κάποια γωνία σε rad .

α) Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται αυτή η γωνία x ; Εξηγήστε.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης $\epsilon\varphi x + \sigma\varphi x$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Οι γωνίες με θετικό το συνημίτονό τους και αρνητικό το ημίτονό τους, βρίσκονται στο τέταρτο (4^ο) τεταρτημόριο.

β) Είναι $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$, ενώ $\sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} = -\frac{4}{3}$.

Άρα $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = -\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\right) = -\left(\frac{9}{12} + \frac{16}{12}\right) = -\frac{25}{12}$.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τον αριθμό $p = \log 4 + 2 \cdot \log 5$.

α) Να αποδείξετε $\log 4 = 2\log 2$ και στη συνέχεια ότι $p = 2$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε $\ln x = p$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\log 4 = \log(2^2) = 2 \cdot \log 2$, οπότε

$$p = 2 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 5 = 2 \cdot (\log 2 + \log 5) = 2 \cdot \log(2 \cdot 5) = 2 \cdot \log 10 = 2 \cdot 1 = 2.$$

β) Αφού $\ln x = p = 2$, θα έχουμε $x = e^2$.

ΘΕΜΑ 4

Ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο για το πλήθος των ανθρώπων σε μια μαθητική κοινότητα που έχουν ακούσει μια συγκεκριμένη φήμη, περιγράφεται από την ισότητα

$N = P \cdot (1 - e^{-0,15k})$, όπου P ο συνολικός πληθυσμός της κοινότητας και k είναι ο αριθμός των ημερών που έχουν περάσει από τότε που ξεκίνησε η φήμη. Υποθέτουμε ότι ο συνολικός πληθυσμός της κοινότητας είναι 1000 άνθρωποι.

α) Να βρείτε πόσα μέλη της μαθητικής κοινότητας θα έχουν ακούσει τη φήμη μετά από 20 ημέρες.

(Μονάδες 9)

β) Πόσες ημέρες θα περάσουν ώστε να έχουν ακούσει τη φήμη 450 άνθρωποι από τους 1000;

(Μονάδες 10)

γ) Είναι δυνατόν να ακούσουν τη φήμη όλα τα μέλη της κοινότητας; Εξηγήστε.

(Μονάδες 6)

Δίνονται: $e^3 \cong 20$ και $\ln(0,55) \cong -0,6$.

ΛΥΣΗ

α) Για $k = 20$, παίρνουμε $N = 1000 \cdot (1 - e^{-0,15 \cdot 20}) = 1000 \cdot (1 - e^{-3}) = 1000 \left(1 - \frac{1}{e^3}\right) = 1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{20}\right) = 1000(1 - 0,05) = 1000 \cdot 0,95 = 950$.

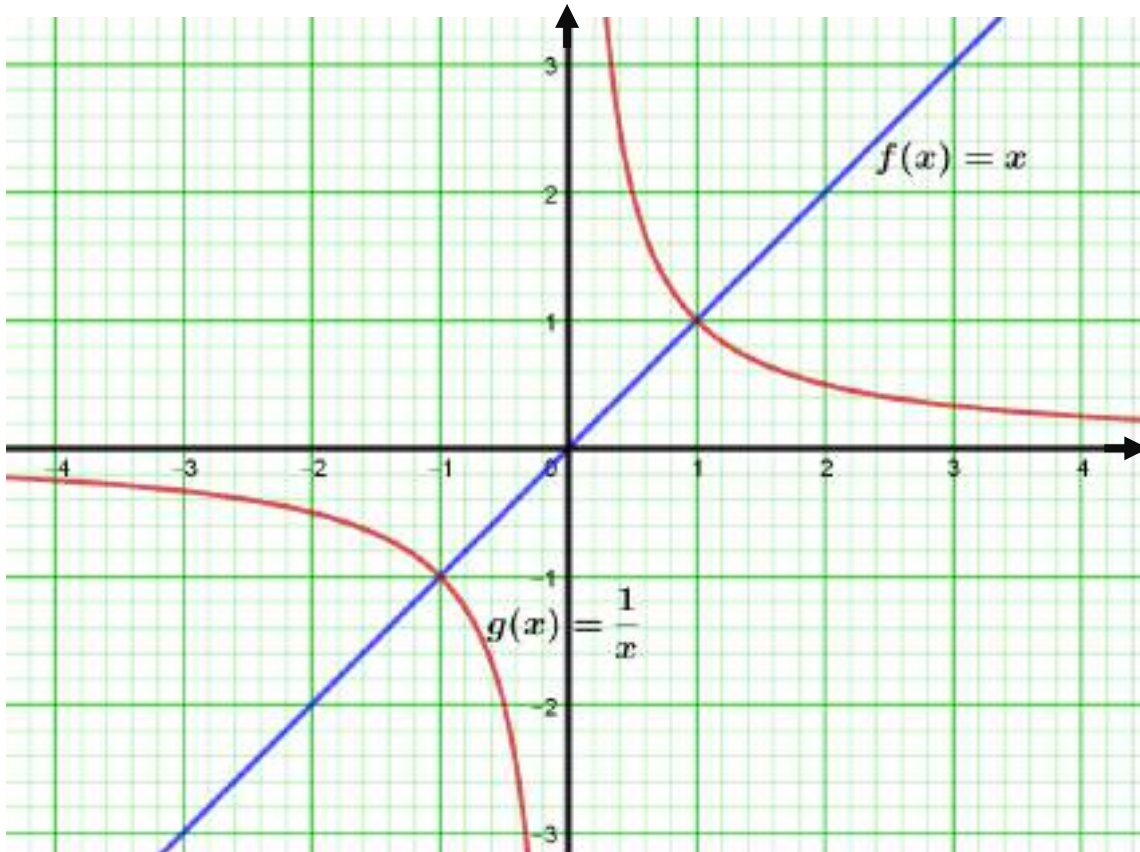
β) Για $N = 450$, παίρνουμε $\frac{450}{1000} = 1 - e^{-0,15k} = 0,45$, άρα $e^{-0,15k} = 0,55$.

Έτσι, παίρνουμε $-0,15k = \ln(0,55) = -0,6$, άρα $k = \frac{0,6}{0,15} = \frac{60}{15} = 4$ ημέρες.

γ) Για να γίνει γνωστή η φήμη σε όλα τα μέλη, θα πρέπει $N = P$, άρα $1 - e^{-0,15k} = 1$, οπότε αναγκαστικά θα είναι $e^{-0,15k} = 0$, κάτι που είναι αδύνατο, αφού $e^{-0,15k} > 0$ για κάθε k .

ΘΕΜΑ 4

α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$, να λύσετε την ανίσωση $x > \frac{1}{x}$.



(Μονάδες 7)

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας σωστά συμπληρωμένο τον παρακάτω πίνακα με τα πρόσημα των παραστάσεων x , $x - 1$, $x + 1$, $x(x - 1)(x + 1)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x					
$x - 1$					
$x + 1$					
$x(x - 1)(x + 1)$					

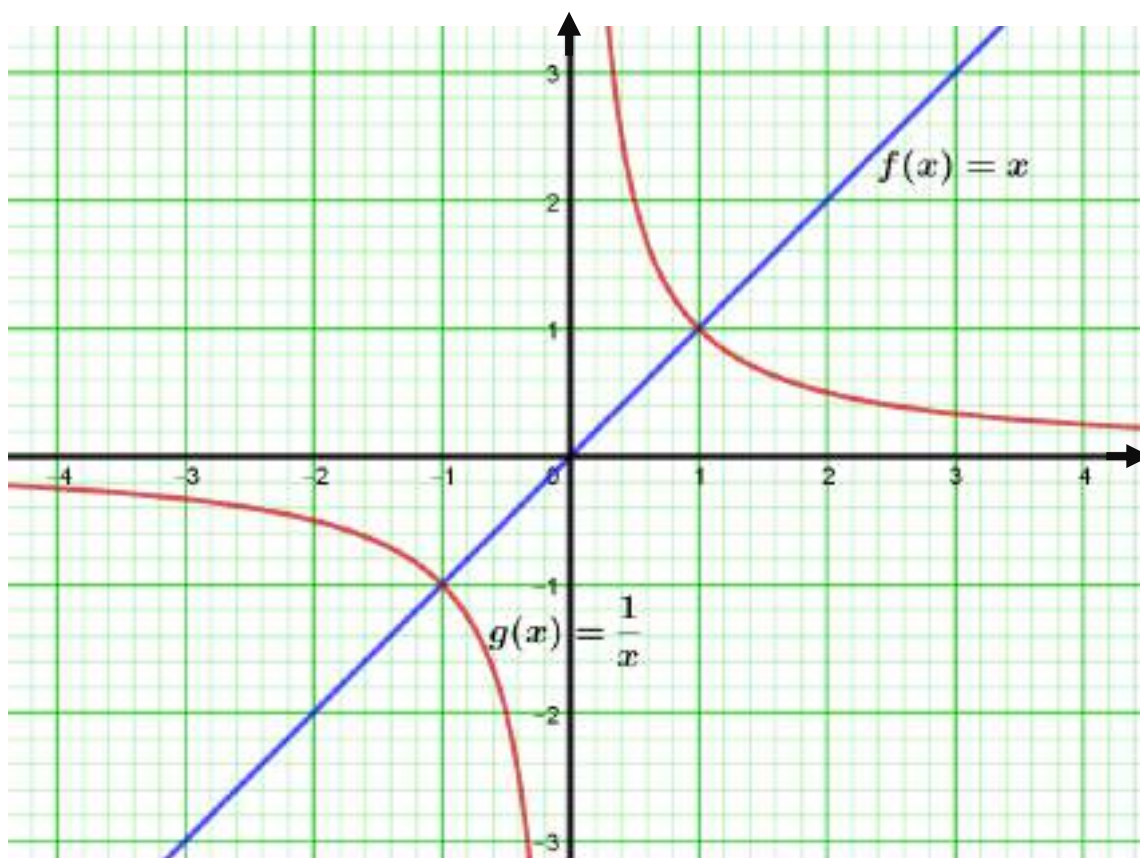
(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $x > \frac{1}{x}$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Αναζητούμε τις τιμές των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης της f , τα οποία σημεία έχουν τεταγμένες μεγαλύτερες από τις τεταγμένες των αντίστοιχων σημείων της γραφικής παράστασης της g . Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει για $-1 < x < 0$ ή $x > 1$.



β)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$x(x - 1)(x + 1)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

γ) Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα $x - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1} - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x} > 0$,
οπότε παίρνουμε $x(x - 1)(x + 1) > 0$.

Από το β) ερώτημα διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι αριθμοί

$x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = 2x - 1$ σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων.

α) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $\sqrt{x} = 2x - 1$.

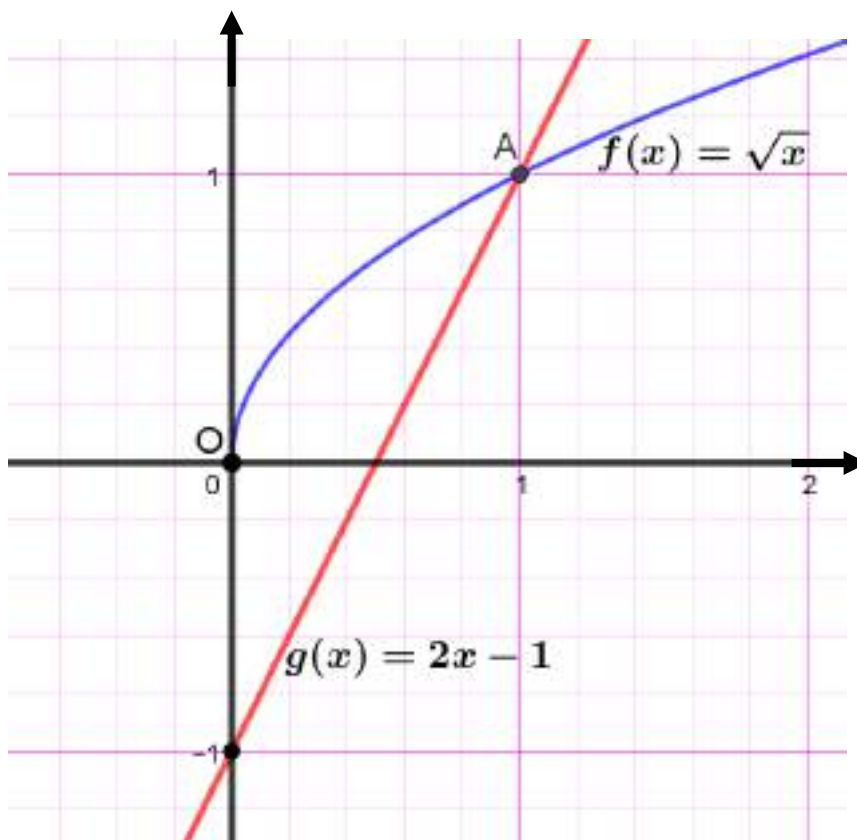
(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση $\sqrt{x} = 2x - 1$.

(Μονάδες 12)

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{x} > 2x - 1$.

(Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Οι λύσεις της εξίσωσης $\sqrt{x} = 2x - 1$ αντιστοιχούν στις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$. Από το σχήμα, παρατηρούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται μόνο σε ένα σημείο, η τετμημένη του οποίου είναι 1. Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση τον αριθμό 1.

β) Αφού στο 1^ο μέλος υπάρχει η $\sqrt{x}$, αναζητούμε λύσεις μόνο για $x \geq 0$.

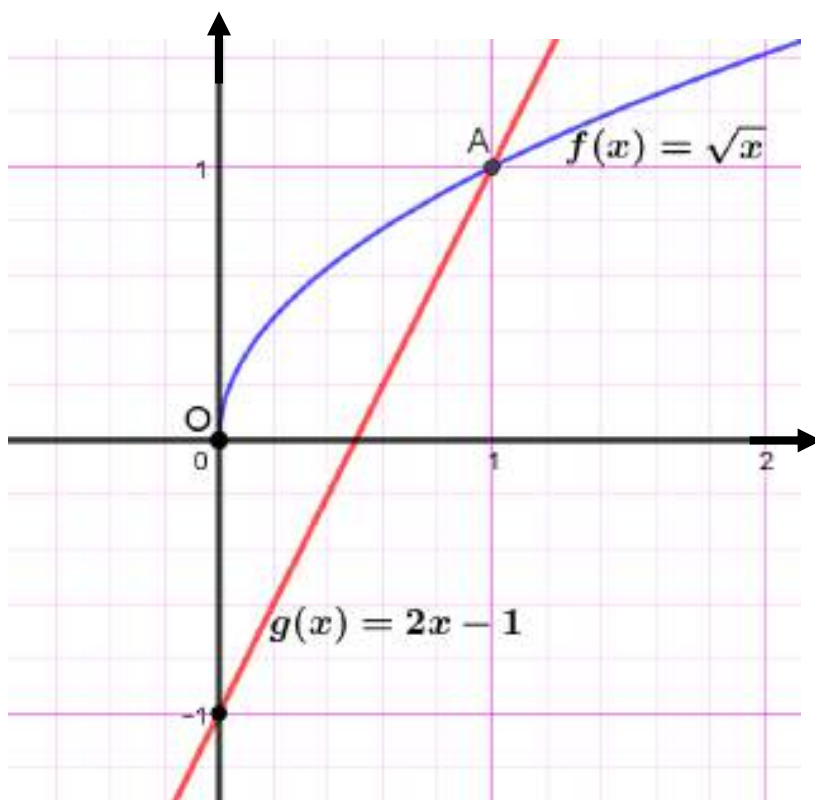
Αν όμως είναι $2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$, η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $\sqrt{x} \geq 0$.

Επομένως, για $x \geq \frac{1}{2}$, έχουμε $(\sqrt{x})^2 = (2x - 1)^2$, άρα $x = 4x^2 - 4x + 1$, οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση $4x^2 - 5x + 1 = 0$, με διακρίνουσα $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$, άρα θα έχουμε $x = \frac{5 \pm 3}{8}$. Έτσι, έχουμε $x = 1$, δεκτή ή $x = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, απορρίπτεται.

Τέλος, διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός 1 επαληθεύει την αρχική εξίσωση, αφού

$$\sqrt{1} = 1 = 2 \cdot 1 - 1.$$

γ) Από το σχήμα, παρατηρούμε ότι για $x \in [0, 1)$ οι αριθμοί $f(x)$ είναι μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους αριθμούς $g(x)$, αφού στο συγκεκριμένο διάστημα, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g . Επομένως, λύσεις της ανίσωσης $\sqrt{x} > 2x - 1$ είναι όλοι οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $0 \leq x < 1$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x - \alpha x$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (0, +\infty)$.

(Μονάδες 06)

β) Αν $f(1) = -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

(Μονάδες 06)

γ) Για $\alpha = 1$, να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει $x > 0$. Οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (0, +\infty)$.

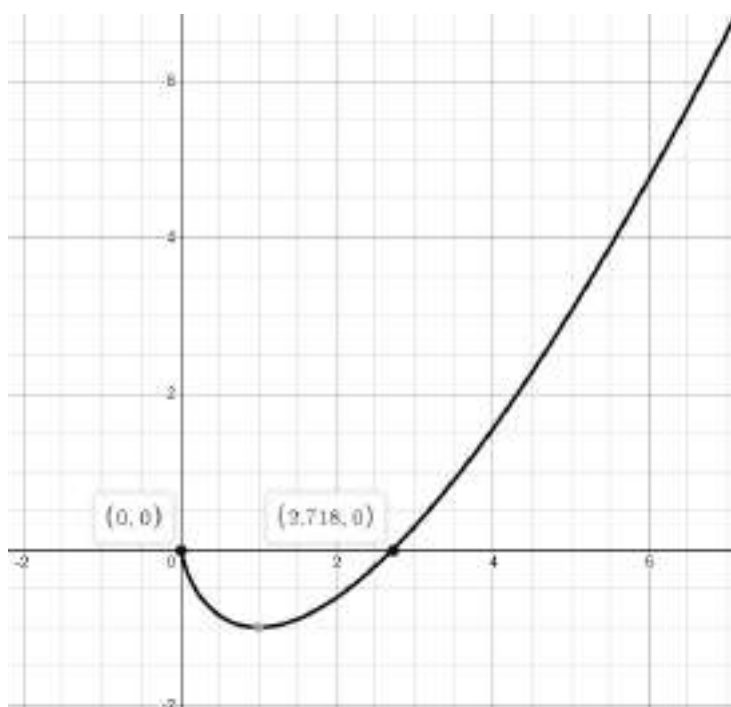
β) Είναι $f(1) = -1 \Leftrightarrow 1 \cdot \ln 1 - \alpha \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow -\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

γ) Με $x > 0$ και $f(x) = x \cdot \ln x - x$ έχουμε:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \cdot \ln x - x < 0 \Leftrightarrow x(\ln x - 1) < 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

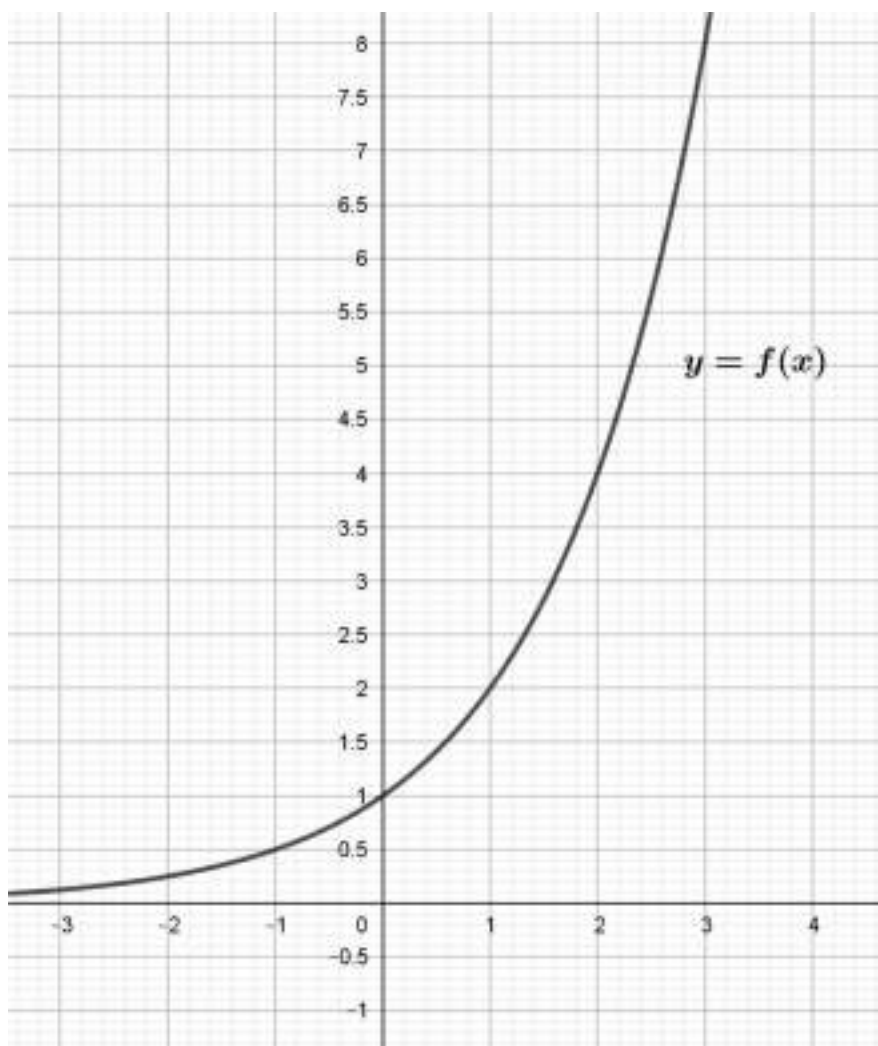
$$\ln x < 1 \stackrel{\substack{y = \ln x \\ \text{γν. αύξουσα}}}{\Leftrightarrow} \ln x < \ln e \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 0 < x < e$$

Σχόλιο: Το αποτέλεσμα φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.



α) Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f .

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

(Μονάδες 10)

β) Αν $f(x) = 2^x$,

i. Να βρείτε το $f(8)$.

(Μονάδες 7)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 32$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Με βάση την γραφική παράσταση της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,5	1	2	4	8

β)

i. Αφού $f(x) = 2^x$, $f(8) = 2^8 = 256$.

ii. Γνωρίζουμε ότι για $a > 0, a \neq 1$ ισχύει η ισοδυναμία: $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Οπότε έχουμε:

$f(x) = 32$, δηλαδή $2^x = 32$, οπότε $2^x = 2^5$ και τελικά $x = 5$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 4x + 3 = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $5^{x^2-4x+3} = 1$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$, οπότε έχει δυο

ρίζες άνισες, τις $x_1 = \frac{-(-4)+2}{2} = 3$ και $x_2 = \frac{-(-4)-2}{2} = 1$.

Άρα η εξίσωση $x^2 - 4x + 3 = 0$ έχει λύσεις τις $x = 3$, $x = 1$.

β) Γνωρίζουμε ότι για $a > 0, a \neq 1$ ισχύει η ισοδυναμία: $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Οπότε έχουμε:

$$5^{x^2-4x+3} = 1, \text{ δηλαδή}$$

$$5^{x^2-4x+3} = 5^0, \text{ οπότε}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad (1).$$

Από το α) ερώτημα, οι ρίζες της εξίσωση (1) είναι $x = 3$, $x = 1$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+5) = \ln(6x)$, $x > 0$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+5) \geq \ln(6x)$, $x > 0$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι για $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ και $x_1, x_2 > 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Οπότε έχουμε:

$$\ln(x+5) = \ln(6x) \Leftrightarrow$$

$$x+5 = 6x \Leftrightarrow$$

$$5x = 5 \Leftrightarrow$$

$x = 1$, που είναι δεκτή γιατί $x > 0$.

β) Έχουμε:

$$\ln(x+5) \geq \overset{\ln x \nearrow}{\ln(6x)} \Leftrightarrow$$

$$x+5 \geq 6x \Leftrightarrow$$

$$5x \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$x \leq 1$$

Επειδή $x > 0$, η ανίσωση αληθεύει για $0 < x \leq 1$.

ΘΕΜΑ 2

Μία γωνία ω είναι ίση με 2 ακτίνια.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω .

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Μία γωνία είναι οξεία και βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο, αν είναι μικρότερη των 90

μοιρών που ισούται με $\frac{\pi}{2}$ ακτίνια. Ενώ είναι στο 2ο τεταρτημόριο, αν είναι μεταξύ 90 και

180 μοιρών που ισοδυναμεί με π ακτίνια. Εφόσον $\pi \approx 3,14$ ισχύει ότι $\frac{\pi}{2} < 2 < 3 < \pi$, άρα η

γωνία είναι αμβλεία.

β) Είναι γνωστό ότι 2π ακτίνια είναι η γωνία η οποία είναι ίση με 360 μοίρες, άρα η γωνία ω

που είναι 2 ακτίνια θα αντιστοιχεί σε $\frac{360}{\pi}$ μοίρες.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σημείο $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας εκθετικής

συνάρτησης $f(x) = a^x, 0 < a < 1$.

α) Να βρείτε το a .

(Μονάδες 9)

β) Αν $a = \frac{1}{2}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$.

(Μονάδες 9)

γ) Για $a = \frac{1}{2}$ να βρείτε τον αριθμό x , ώστε: $a^{x^2} = 8^x$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Εφόσον το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a^x$ οι

συντεταγμένες τους θα ικανοποιούν τον τύπο της οπότε θα ισχύει ότι $a^1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

β) Η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ και είναι εκθετική με βάση $a<1$ οπότε θα είναι

μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Επειδή ισχύει $\sqrt{2}<\sqrt{3}$, θα έχουμε ότι

$$f(\sqrt{2})>f(\sqrt{3})\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}.$$

γ) Για $a=\frac{1}{2}$ ισχύει:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=8^x\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=(2^3)^x\Leftrightarrow(2^{-1})^{x^2}=(2^3)^x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{-x^2}=2^{3x}\Leftrightarrow -x^2=3x\Leftrightarrow x^2+3x=0\Leftrightarrow x(x+3)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-3.$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $\log 3 + 2\log 4 = \log 48$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log 4 x = \log 3 + 2\log 4$.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Η προς απόδειξη γράφεται ισοδύναμα:

$$\log 3 + 2 \log 4 = \log 48 \Leftrightarrow \log 3 + \log 4^2 = \log 48 \Leftrightarrow \log 3 \cdot 4^2 = \log 48 \Leftrightarrow$$

$$\log 3 \cdot 16 = \log 48, \text{ το οποίο ισχύει.}$$

β) Η εξίσωση έχει νόημα για $x > 0$ και γράφεται ισοδύναμα:

$$\log 4x = \log 48 \Leftrightarrow 4x = 48 \Leftrightarrow x = 12 > 0.$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση:

$$\log(x+1) = -\log 2 - \log(1-x).$$

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1) = -\log 2 - \log(1-x)$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, να βρείτε ποιος από τους αριθμούς $\log_2 a, \log_2(-2b)$ είναι

θετικός.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει να είναι $x+1>0$ και $1-x>0$.

Ισοδύναμα πρέπει $x>-1$ και $x<1$. Οπότε η εξίσωση ορίζεται για $x \in (-1, 1)$.

β) Για $x \in (-1, 1)$, η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\log(x+1) &= -\log 2 - \log(1-x) \Leftrightarrow \log(x+1) + \log(1-x) = \log 1 - \log(2) \Leftrightarrow \\ \log[(x+1)(1-x)] &= \log\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (x+1)(1-x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$1-x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x^2 = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \in (-1, 1)$$

δεκτές και οι δύο λύσεις.

$$\gamma) \text{ Ισχύει ότι } \log_2 a = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_2 \frac{2^{1/2}}{2} = \log_2 2^{1/2-1} = \log_2 2^{-1/2} = -\frac{1}{2} < 0.$$

$$\text{Ακόμα } \log_2(-2b) = \log_2\left(-2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{1/2} = \frac{1}{2} > 0.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{2} \ln x - \sqrt{\ln x} = 0$ (1) .

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση (1).

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα: $4 \ln(x) - (\ln x)^2 = 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Για να ορίζεται η εξίσωση (1) πρέπει να είναι $x > 0$ και $\ln x \geq 0$.

Ισοδύναμα $x > 0$ και $\ln x \geq \ln 1 \Leftrightarrow x > 0$ και $x \geq 1$.

Δηλαδή η εξίσωση ορίζεται για $x \geq 1$.

β) Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα για $x \geq 1$:

$$\frac{1}{2} \ln x - \sqrt{\ln x} = 0 \Leftrightarrow \ln x - 2\sqrt{\ln x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2\sqrt{\ln x} \Leftrightarrow (\ln x)^2 = 4 \ln x \Leftrightarrow 4 \ln x - (\ln x)^2 = 0.$$

γ) Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$4 \ln x - (\ln x)^2 = 0 \Leftrightarrow (\ln x)(4 - \ln x) = 0.$$

Οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$\ln x = 0 \text{ ή } \ln x = 4 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = e^4.$$

Πρέπει $x \geq 1$, άρα δεκτές λύσεις $x = 1, x = e^4$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $\ln(x-2) > 1$ (1) .

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η (1) και να την λύσετε.

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 4, 6 είναι λύσεις της ανίσωσης (1).

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Πρέπει $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.

Για τα παραπάνω x η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\ln(x-2)>1 \Leftrightarrow \ln(x-2)>\ln(e) \stackrel{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow} x-2>e \Leftrightarrow x>2+e.$$

β) Ισχύει ότι $2<e<3 \Leftrightarrow 4<e+2<5$.

Συνεπώς το 4 δεν είναι λύση της ανίσωσης (1), ενώ το 6 είναι λύση της ανίσωσης 1.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $e^{x-2} > 1$ (1) .

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η (1) και να την λύσετε.

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς $e, 1$ είναι λύσεις της ανίσωσης (1).

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Η εκθετική συνάρτηση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, οπότε $x \in \mathbb{R}$.

Η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$e^{x-2} > 1 \Leftrightarrow e^{x-2} > e^0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

β) Ισχύει ότι $2 < e < 3$, άρα το e είναι λύση της ανίσωσης (1).

Ισχύει ότι $1 \leq 2$, οπότε το 1 δεν είναι λύση της ανίσωσης (1).

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \ln e^{\frac{1}{2}} + \ln \frac{1}{e}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = -\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log|x| = 2A$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $A = \ln e^{\frac{1}{2}} + \ln \frac{1}{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} + \ln e^{-1} = \frac{1}{2} \ln e - \ln e = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

β) Η εξίσωση $\log|x| = A$ ορίζεται για κάθε x με $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Είναι $\log|x| = 2A \Leftrightarrow \log|x| = 2(-\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \log|x| = -1 \Leftrightarrow |x| = 10^{-1} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{10}$.

ΘΕΜΑ 2

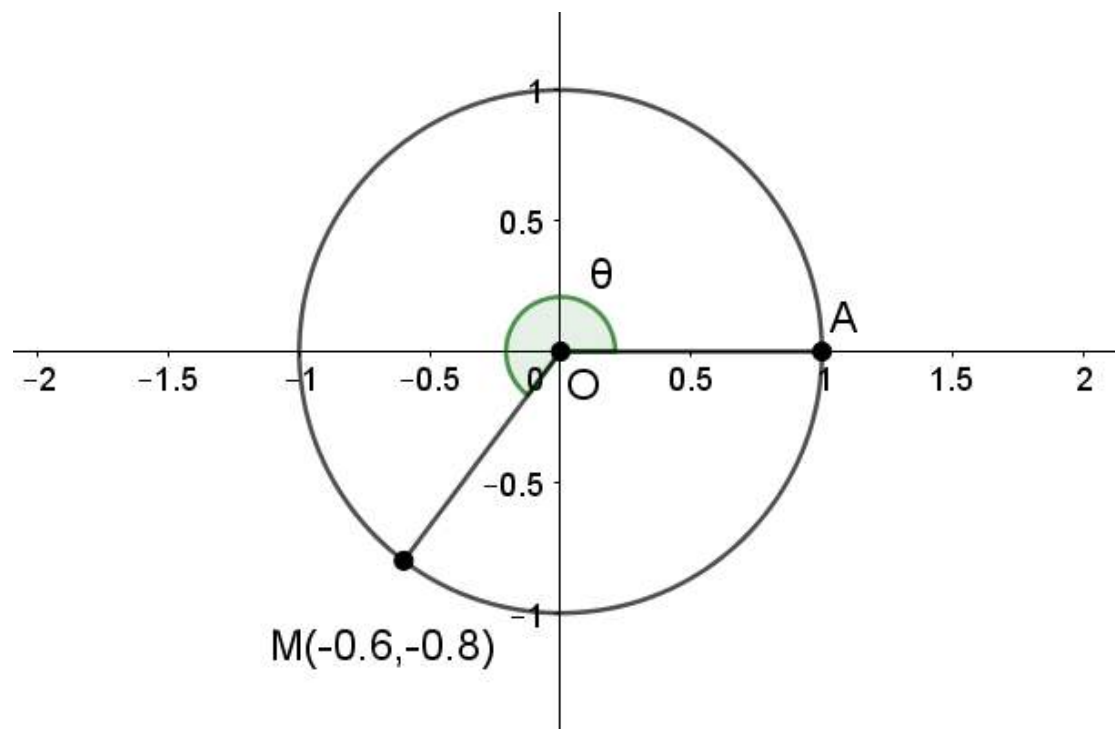
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $A(1,0)$, $M(-0.6,-0.8)$ και η μη κυρτή γωνία $\theta = \widehat{AOM}$. Να βρείτε :

α) το $\sin\theta$ και το $\eta\mu\theta$.

(Μονάδες 13)

β) την $\varepsilon\phi\theta$ και τη $\sigma\phi\theta$.

(Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Η τελική πλευρά OM της γωνίας $\theta = \widehat{AOM}$, τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(-0.6, -0.8)$, οπότε $\sin\theta = -0.6$ και $\eta\mu\theta = -0.8$.

β) Είναι $\epsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sin\theta} = \frac{-0.8}{-0.6} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$ και $\sigma\phi\theta = \frac{\sin\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{-0.6}{-0.8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} 2^{x+y}=8 \\ 2^{x-y}=4 \end{cases}$.

α) Να λύσετε το σύστημα $(\Sigma'): \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \end{cases}$.

(Μονάδες 9)

β) Να σχεδιάσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις ευθείες

$(\varepsilon_1): x+y=3, (\varepsilon_2): x-y=2$ και να βρείτε το σημείο τομής τους.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε το σύστημα (Σ) .

(Μονάδες 8)

Λύση

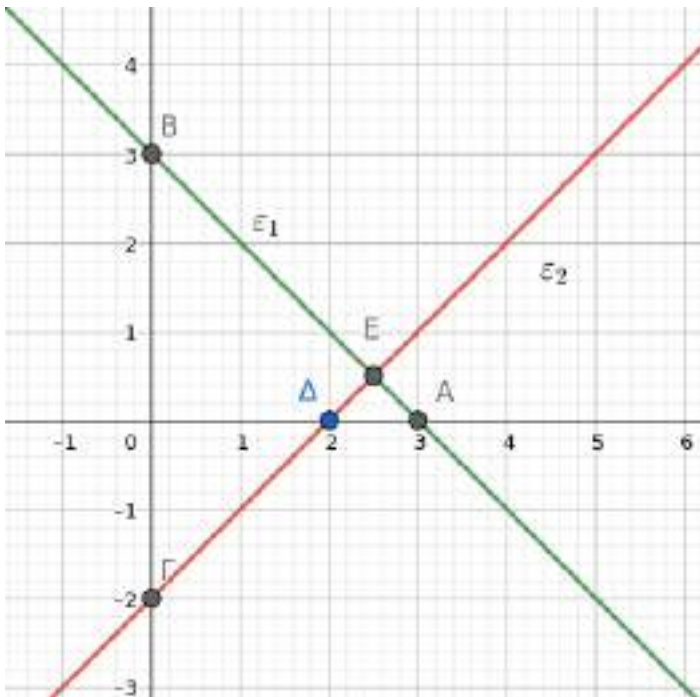
α) Το σύστημα (Σ') γράφεται ισοδύναμα:

$$(\Sigma): \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=5 \\ x=2+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ x-2=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα έχει λύση $(x, y) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

β) Για να σχεδιάσουμε τις ευθείες $(\varepsilon_1): x+y=3, (\varepsilon_2): x-y=2$ βρίσκουμε από δύο σημεία τους: $(\varepsilon_1): x=0 \Rightarrow y=3, y=0 \Rightarrow x=3$. Οπότε $A(3,0), B(0,3)$ δύο σημεία της ε_1 .

Αντίστοιχα για την $(\varepsilon_2): x=0 \Rightarrow y=-2, y=0 \Rightarrow x=2$. Οπότε $\Gamma(0,-2), \Delta(2,0)$ δύο σημεία της ε_2 .



Το σημείο τομής τους E θα έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος (Σ'), αφού ανήκει και στις δύο ευθείες, άρα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις.

γ) Το σύστημα (Σ) γράφεται ισοδύναμα:

$$(\Sigma): \begin{cases} 2^{x+y}=8 \\ 2^{x-y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+y}=2^3 \\ 2^{x-y}=2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \end{cases} \stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 2

Αν $\eta\mu\theta = 0,6$ και $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ να βρείτε :

α) το $\sigma\upsilon\nu\theta$.

(Μονάδες 15)

β) την $\varepsilon\phi\theta$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\nu\nu^2\theta = 1$ με αντικατάσταση του $\eta\mu\theta = 0,6$ έχουμε

$$(0,6)^2 + \sigma\nu\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow 0,36 + \sigma\nu\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sigma\nu\nu^2\theta = 1 - 0,36 \Leftrightarrow \sigma\nu\nu^2\theta = 0,64.$$

Όμως $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ οπότε $\sigma\nu\nu\theta < 0$ και επομένως $\sigma\nu\nu\theta = -0,8$.

$$\beta) \text{ Είναι } \varepsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\nu\nu\theta} = \frac{0,6}{-0,8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \eta\mu(\frac{\pi}{2} - \theta) - \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 2\sigma\upsilon\nu\theta$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες θ για τις οποίες ισχύει $A = 1$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $A = \eta\mu(\frac{\pi}{2} - \theta) - \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta - (-\sigma\upsilon\nu\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = 2\sigma\upsilon\nu\theta$.

β) Αφού όπως δείξαμε στο α) $A = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ η εξίσωση $A = 1$ γίνεται

$$1 = 2\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \theta = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x \end{cases}$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η έχουμε

$$x^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Για $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ από τη 2η εξίσωση έχουμε $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε μία λύση του συστήματος

είναι το ζεύγος $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Για $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ από τη 2η εξίσωση έχουμε $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε η άλλη λύση του

συστήματος είναι το ζεύγος $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

β) Είναι

$$\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \theta = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ \frac{\pi}{2} - \theta = 2\kappa\pi - \theta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2\theta = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ 0\theta = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = -\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \text{ή} \\ \text{αδύνατο} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow \theta = -\kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$ αφού η δεύτερη εξίσωση είναι αδύνατη.

Εναλλακτικά, αφού για κάθε γωνία θ ισχύει $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$, αν θέσουμε $\eta\mu\theta = x$

και $\sigma\upsilon\nu\theta = y$, τότε θα έχουμε ότι $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x \end{cases}$. Όπως δείξαμε στο α) θα είναι

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ δηλαδή } \eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Σε}$$

κάθε περίπτωση θα είναι $\varepsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Σημείωση : Το σύνολο των λύσεων $\theta = -k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ που βρήκαμε με τον 1ο τρόπο και το σύνολο των λύσεων $\theta = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ που βρήκαμε με τον 2ο τρόπο είναι ακριβώς το ίδιο για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον xx' .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον xx' .

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλες τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x > 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x > e^0 \Leftrightarrow$$

$$x > 0$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, +\infty)$.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' , είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$, στο διάστημα $(0, +\infty)$. Είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 1) = \ln 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x = 2 \Leftrightarrow$$

$$x = \ln 2$$

Η λύση $\ln 2$ είναι δεκτή αφού $\ln 2 > \ln 1 \Leftrightarrow \ln 2 > 0$.

Συνεπώς το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' είναι το $(\ln 2, 0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα xx' , για όλες τις θετικές τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$. Είναι:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 1) < \ln 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x - 1 < 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x < 2 \Leftrightarrow$$

$$x < \ln 2$$

Όμως πρέπει $x > 0$, οπότε τελικά η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον xx' για κάθε $x \in (0, \ln 2)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$.

α) Να δείξετε ότι το $P(x)$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(Μονάδες 8)

β) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (2x+1)$ και να δείξετε ότι $P(x) = (2x+1)(x^2+1)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + 2\sigma\upsilon\nu\theta + 1 = 0$

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ έχει ακέραιους συντελεστές οπότε αν είχε ακέραια ρίζα θα διαιρούσε το σταθερό όρο, δηλαδή το 1. Συνεπώς θα ήταν μία εκ των διαιρετών του 1, δηλαδή το 1 ή το -1.

Όμως $P(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 6 \neq 0$ και

$$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = -2 \neq 0.$$

Συνεπώς το $P(x)$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

β) Η διαίρεση $P(x) : (2x+1)$ φαίνεται παρακάτω

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 + 2x + 1 \\ - (2x^3 + x^2) \\ \hline 2x + 1 \\ - (2x + 1) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + 1 \\ \hline x^2 + 1 \end{array}$$

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε ότι $P(x) = (2x+1)(x^2+1)$.

γ) Αν θέσουμε $\sin \theta = x$ η εξίσωση $2\sin^3 \theta + \sin^2 \theta + 2\sin \theta + 1 = 0$ γίνεται $2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ που όπως δείξαμε στο β) είναι ισοδύναμη με την $(2x+1)(x^2+1) = 0$. Όμως $x^2+1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση

$(2x+1)(x^2+1) = 0$ αληθεύει μόνο για $x = -\frac{1}{2}$. Συνεπώς είναι

$$\sin \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \theta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sin \theta = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \theta = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} \log(x+y)=2 \\ \log(y-x+1)=0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τον αριθμό $a>0$ για τον οποίο ισχύει: $\log(a)=2$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε το σύστημα (Σ) .

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Η σχέση $\log(a)=2$ γράφεται ισοδύναμα: $\log(a)=\log 10^2 \Leftrightarrow a=100$.

β) Πρέπει $x+y > 0$, $y-x+1 > 0$.

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$$\log(y-x+1)=0 \Leftrightarrow y-x+1=1 \Leftrightarrow y-x=0$$

Το σύστημα (Σ) γράφεται ισοδύναμα:

$$(\Sigma): \begin{cases} \log(x+y)=2 \\ \log(y-x+1)=0 \end{cases} \stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y=100 \\ y-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=100 \\ y-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=50 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=50 \\ x=50 \end{cases}$$

τα οποία $(x,y)=(50,50)$ ικανοποιούν τους περιορισμούς που τέθηκαν στην αρχή του ερωτήματος.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων

με τύπους $f(x)=a^x$, $g(x)=a^{x-2}$, $h(x)=\frac{1}{a^x}$, με $a>1$, χωρίς να αντιστοιχούν απαραίτητα

με αυτή τη σειρά στις δοθείσες γραφικές παραστάσεις.

α) Να βρείτε ποια συνάρτηση αντιστοιχεί σε ποια γραφική παράσταση.

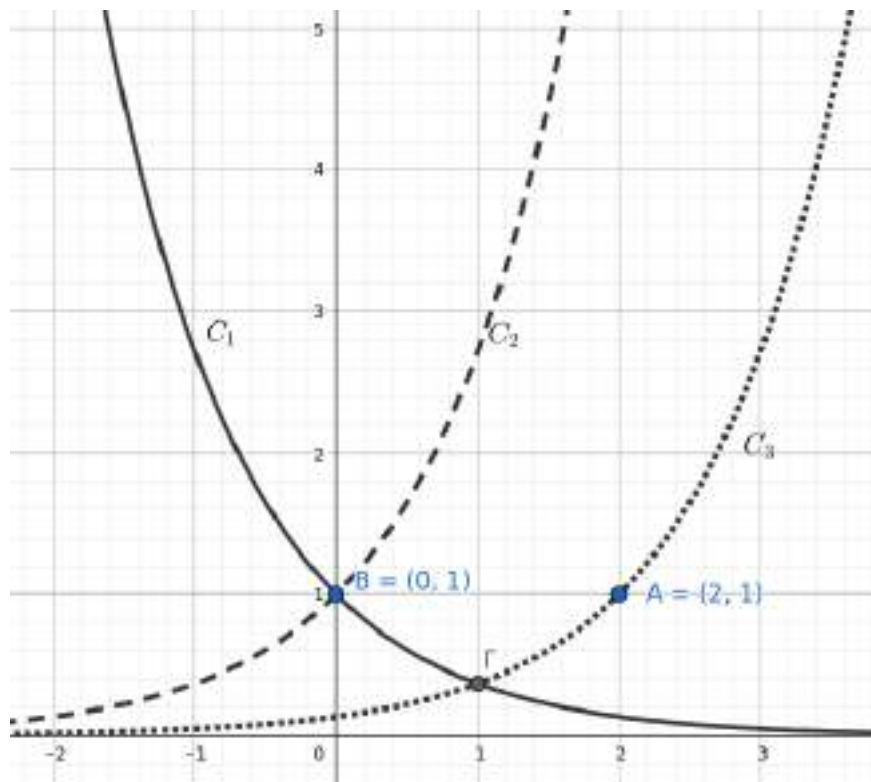
(Μονάδες 9)

β) Να αιτιολογήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g, h .

(Μονάδες 9)

γ) Αν η C_1 αντιστοιχεί στη συνάρτηση $h(x)=e^{-x}$ και η C_3 αντιστοιχεί στη συνάρτηση $g(x)=e^{x-2}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των C_1 και C_3 και να λύσετε την ανίσωση $h(x)<g(x)$.

(Μονάδες 7)



Λύση

$$\alpha) \text{ Ισχύουν } f(0)=a^0=1, g(0)=a^{0-2}=a^{-2}, h(0)=\frac{1}{a^0}=\frac{1}{1}=1.$$

Συνεπώς, η g είναι η μόνη που έχει $g(0)<1$ οπότε αντιστοιχεί στην C_3 . Εναλλακτικά από το σχήμα δίνεται ότι το σημείο $A(2,1)$ ανήκει στη C_3 οπότε για $g(2)=1$ ισχύει ότι η C_3 αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της g .

$$\text{Επιπλέον } h(1)=\frac{1}{a^1}=\frac{1}{a}<1, f(1)=a^1=a>1.$$

Επομένως η h αντιστοιχεί στη C_1 και η f αντιστοιχεί στην C_2 .

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα, όπως βλέπουμε από τη γραφική παράσταση C_2 που της αντιστοιχεί και επιπλέον είναι εκθετική $a^x, a>1$.

Η $g(x)=a^{x-2}=a^{-2} \cdot a^x, a>1$, είναι επίσης γνησίως αύξουσα, όπως φαίνεται από τη γραφική της παράσταση C_3 και επειδή $a>1$, αφού:

$$\text{Αν } x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \stackrel{a^{-2}>0}{\Leftrightarrow} a^{-2} \cdot a^{x_1} < a^{-2} \cdot a^{x_2} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2).$$

Τέλος η $h(x)=\frac{1}{a^x}=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x, \frac{1}{a}<1$ είναι γνησίως φθίνουσα ως εκθετική με βάση

μικρότερη του 1 και όπως φαίνεται και στη γραφική παράσταση C_1 που της αντιστοιχεί.

γ) Για το σημείο τομής των C_1 και C_3 ισχύει ότι

$$h(x)=g(x) \Leftrightarrow e^{-x}=e^{x-2} \Leftrightarrow -x=x-2 \Leftrightarrow 2=2x \Leftrightarrow x=1.$$

Οπότε θα είναι το $\Gamma(1, g(1))$ δηλαδή το $\Gamma(1, e^{-1})$.

Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα $h(x)<g(x) \Leftrightarrow e^{-x}<e^{x-2} \stackrel{e>1}{\Leftrightarrow} -x<x-2 \Leftrightarrow 2<2x \Leftrightarrow 1<x$.

Συνεπώς οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x \in (1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^3}{x-1} - \frac{2}{x^2+1} = \frac{2}{(x^2+1)(x-1)}$ (1) .

α) Να βρείτε για ποιους αριθμούς $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση (1).

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε ποιος από τους αριθμούς 1 και 0 είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Η εξίσωση (1) ορίζεται όταν κανένας παρονομαστής δε μηδενίζεται.

Πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x^2+1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$, το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση (1) ορίζεται για $x \neq 1$.

β) Ο αριθμός 1 δεν μπορεί να είναι λύση της εξίσωσης (1), αφού για αυτόν δεν ορίζεται η εξίσωση.

Για $x=0$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{0^3}{0-1} - \frac{2}{0^2+1} = \frac{2}{(0^2+1)(0-1)} \Leftrightarrow 0-2 = \frac{2}{-1} \Leftrightarrow -2 = -2$.

Οπότε ικανοποιείται η εξίσωση, άρα το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{x}=x$ (1) .

α) Να βρείτε για ποιους αριθμούς $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση (1).

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Η εξίσωση (1) ορίζεται όταν η υπόριζη ποσότητα δεν είναι αρνητική.

Οπότε πρέπει $x \geq 0$.

β) Για $x \geq 0$ η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$\sqrt{x} = x \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = x^2 \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1.$$

Οπότε ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $x = 0, x = 1$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$. Αν η διαίρεση $P(x):(x-1)$ δίνει πηλίκο x^2+1 , τότε:

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $P(x)=(x-1)(x^2+1)$

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα προκύπτει ότι η διαίρεση $P(x) : (x - 1)$ είναι τέλεια, οπότε η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει:

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$$

β) Επειδή για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $x^2 + 1 > 0$, έχουμε:

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 1) \leq 0 \Leftrightarrow x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $8x^4 - 9x + 1 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι δεν έχει άλλη ακέραια ρίζα.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Με $x=1$ έχουμε:

$$8x^4 - 9x + 1 = 8 \cdot 1^4 - 9 \cdot 1 + 1 = 8 - 9 + 1 = 9 - 9 = 0$$

οπότε ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης.

β) Η εξίσωση έχει ακέραιους συντελεστές οπότε κάθε ακέραια ρίζα της είναι διαιρέτης του 1 (σταθερού όρου της). Αυτό σημαίνει ότι η μοναδική, πέρα από το 1 ακέραια ρίζα της μπορεί να είναι το -1 . Με $x=-1$ έχουμε:

$$8x^4 - 9x + 1 = 8 \cdot (-1)^4 - 9 \cdot (-1) + 1 = 8 + 9 + 1 = 18 \neq 0$$

Επομένως η εξίσωση δεν έχει άλλη ακέραια ρίζα.

ΘΕΜΑ 3

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $2^{3x-2y} = 16$ και $3^{x+2y} = 81$

α) Να αποδείξετε ότι $3x - 2y = 4$ και $x + 2y = 4$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y .

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει: $16 = 2^4$ και $81 = 3^4$, οπότε:

$$2^{3x-2y} = 16 \Leftrightarrow 2^{3x-2y} = 2^4 \Leftrightarrow 3x - 2y = 4$$

και

$$3^{x+2y} = 81 \Leftrightarrow 3^{x+2y} = 3^4 \Leftrightarrow x + 2y = 4$$

β) Οι εξισώσεις του προηγούμενου ερωτήματος σχηματίζουν το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Αν προσθέσουμε τις εξισώσεις του συστήματος, παίρνουμε $4x = 8$, οπότε $x = 2$. Με $x = 2$ στην δεύτερη εξίσωση του συστήματος, έχουμε:

$$x + 2y = 4 \Leftrightarrow 2 + 2y = 4 \Leftrightarrow 2y = 2 \Leftrightarrow y = 1$$

ΘΕΜΑ 3

Έστω x, y θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν

$$\ln(x \cdot y) = 4 \text{ και } \ln x - \ln y = 2$$

α) Να αποδείξετε ότι $\ln x = 3$ και $\ln y = 1$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y .

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων έχουμε $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$. Έτσι, για τους αριθμούς x, y ισχύουν:

$$\ln x + \ln y = 4 \text{ και } \ln x - \ln y = 2$$

Με πρόσθεση των δυο αυτών ισοτήτων, παίρνουμε: $2\ln x = 6$, οπότε $\ln x = 3$. Τότε η πρώτη γράφεται $3 + \ln y = 4$, οπότε $\ln y = 1$. Έτσι, έχουμε $\ln x = 3$ και $\ln y = 1$

β) Με $\ln x = 3$ και $\ln y = 1$ έχουμε $x = e^3$ και $y = e$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $g(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $f(\pi)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x) + 1 = 0$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ είναι της μορφής $g(x+c)$ με $c = \frac{\pi}{6}$. Επομένως η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της g αν την μετατοπίσουμε αριστερά κατά $\frac{\pi}{6}$ μονάδες.

β) Είναι:

$$f(0) = \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \text{ και}$$

$$f(\pi) = \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

γ) Είναι:

$$2f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x + \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \text{ ή } x = (2\kappa + 1)\pi \right), \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\sqrt{3}$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{2}f(x) < f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x) = \ln(3x - 2)$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln \sqrt{3} - \ln 2$$

και

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

Επομένως

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \sqrt{3} - \ln 2 + \ln 2 = \ln \sqrt{3}$$

β) Η ανίσωση, με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος, γράφεται:

$$\frac{1}{2}f(x) < \ln \sqrt{3}$$

Έτσι, με $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{1}{2}f(x) < \ln \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln x < \ln \sqrt{3} \Leftrightarrow \ln x < 2\ln \sqrt{3} \Leftrightarrow \ln x < \ln 3 \Leftrightarrow x < 3$$

Επομένως λύσεις της ανίσωσης είναι οι αριθμοί του διαστήματος $(0, 3)$.

γ) Η εξίσωση ορίζεται μόνο όταν $x > 0$ και $3x - 2 > 0$, δηλαδή μόνο όταν $x > \frac{2}{3}$. Με $x > \frac{2}{3}$

έχουμε:

$$2f(x) = \ln(3x - 2) \Leftrightarrow 2\ln x = \ln(3x - 2) \Leftrightarrow \ln x^2 = \ln(3x - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$$

Οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τον περιορισμό και είναι δεκτές.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 - (\beta + 2)x + 6$ και το τριώνυμο $x^2 - x - 6$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 6)

β) Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα κάθε παράγοντα του τριωνύμου, τότε:

i. να αιτιολογήσετε γιατί $P(3) = P(-2) = 0$.

(Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 3$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - x - 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$ και ρίζες τους αριθμούς -2 και 3 , οπότε η παραγοντοποίηση του δίνει $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$.

β) i. Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα κάθε παράγοντα του τριωνύμου, οι $x + 2$, $x - 3$ είναι παράγοντές του οπότε έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 3 . Άρα, $P(3) = P(-2) = 0$.

ii. Ισχύουν:

$$P(3) = 0 \Leftrightarrow 27 - 9\alpha - 3\beta - 6 + 6 = 0 \Leftrightarrow 9\alpha + 3\beta = 27 \Leftrightarrow 3\alpha + \beta = 9, (1)$$

και

$$P(-2) = 0 \Leftrightarrow -8 - 4\alpha + 2\beta + 4 + 6 = 0 \Leftrightarrow -4\alpha + 2\beta = -2 \Leftrightarrow 2\alpha - \beta = 1, (2)$$

Αν προσθέσουμε τις (1) και (2) βρίσκουμε $5\alpha = 10$, οπότε $\alpha = 2$ και $\beta = 2\alpha - 1 = 4 - 1 = 3$

γ) Είναι:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος Horner

βρίσκουμε ότι:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2$$

1	-2	-5	6	3
	3	3	-6	
1	1	-2	0	

Επομένως η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $-2, 1$ και 3 .

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y .

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3x \circledast y = -9 \end{cases} (\Sigma), \text{ όπου στη θέση του } \circledast \text{ μπορεί ένας μαθητής να τοποθετήσει κάποιο από}$$

τα σύμβολα των τεσσάρων πράξεων (δηλαδή ένα από τα σύμβολα $+$ $-$ $\cdot$ $:$).

α) Ένας μαθητής Α τοποθέτησε στην θέση του $\circledast$ το σύμβολο της πρόσθεσης.

Να αποδείξετε ότι τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση, η οποία και να βρεθεί.

(Μονάδες 9)

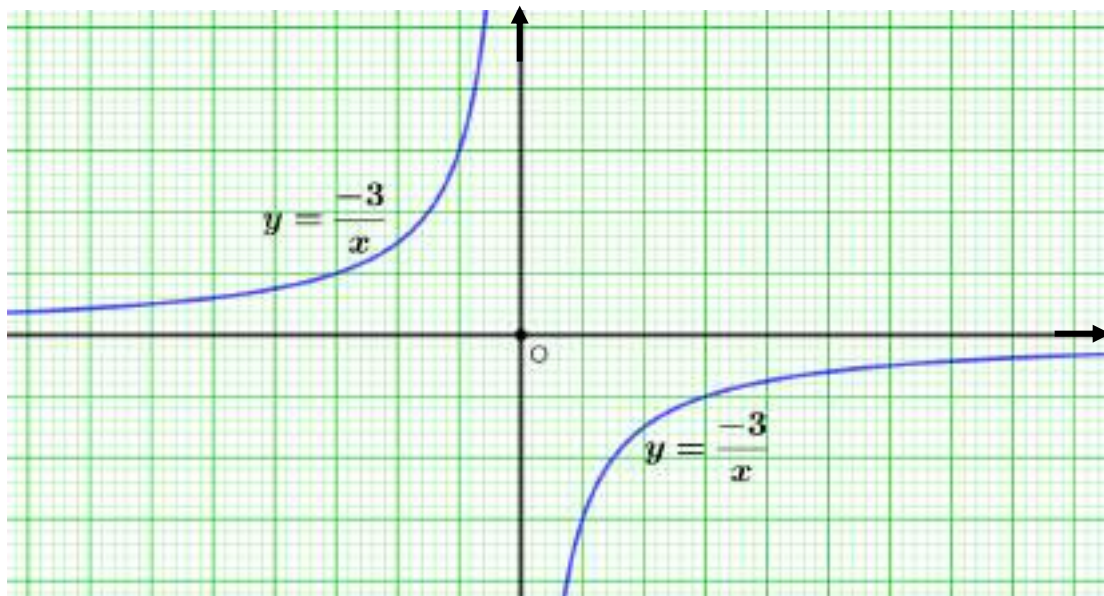
β) Ένας μαθητής Β τοποθέτησε στην θέση του $\circledast$ το σύμβολο του πολλαπλασιασμού.

Να αποδείξετε ότι τότε το (Σ) είναι αδύνατο.

(Μονάδες 9)

γ) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την γραμμή

$y = 2x + 1$ ώστε να αποδώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του (Σ) για το β) ερώτημα.



(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το σύστημα γίνεται $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3x + y = -9 \end{cases}$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση την τιμή του y παίρνουμε $3x + 2x + 1 = -9 \Leftrightarrow 5x = -10 \Leftrightarrow x = -2$. Τότε $y = 2(-2) + 1 = -3$. Άρα, το (Σ) έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x, y) = (-2, -3)$.

β) Το σύστημα γίνεται $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3xy = -9 \end{cases}$ επομένως $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ xy = -3 \end{cases}$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση την τιμή του y παίρνουμε $x(2x + 1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x + 3 = 0$ η οποία είναι αδύνατη αφού έχει διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -23 < 0$, άρα και το (Σ) θα είναι αδύνατο.

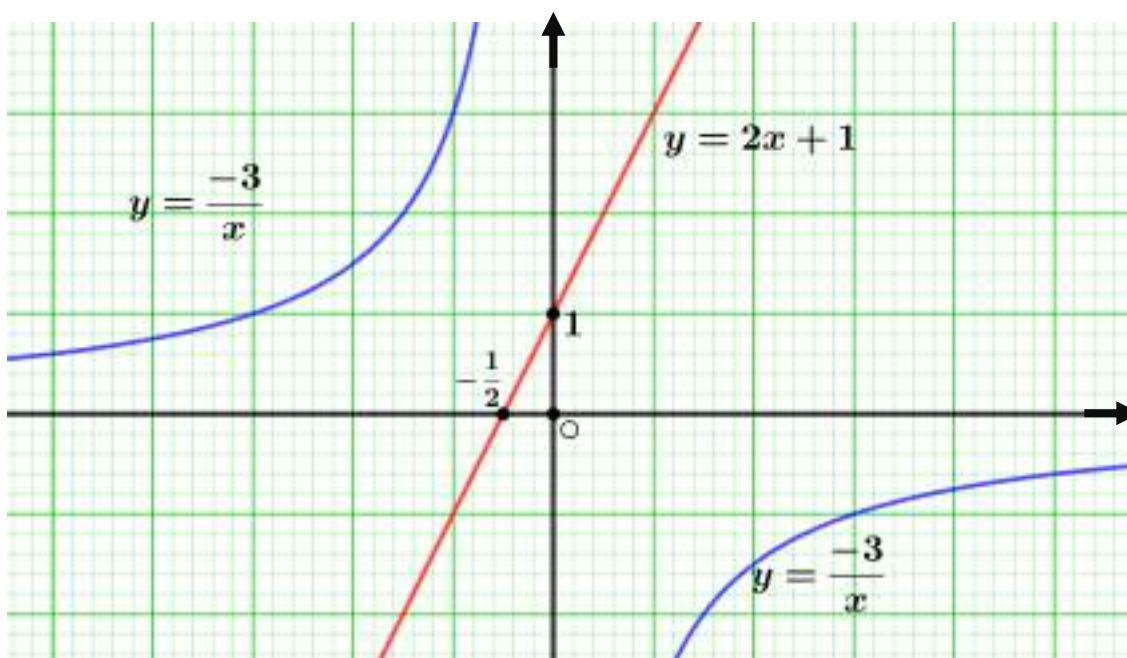
γ) Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $y = 2x + 1$ παριστάνει μια ευθεία σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, επομένως για να τη σχεδιάσουμε αρκεί να βρούμε δύο σημεία της. Βρίσκουμε τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες x' και y' .

Για $x = 0$, παίρνουμε $y = 1$, δηλαδή το σημείο $(0, 1)$

Για $y = 0$, παίρνουμε $0 = 2x + 1$, άρα $x = -\frac{1}{2}$ δηλαδή το σημείο $(-\frac{1}{2}, 0)$.

Η δεύτερη εξίσωση του (Σ) παριστάνει την υπερβολή $xy = -3 \Leftrightarrow y = \frac{-3}{x}$ οι κλάδοι της οποίας βρίσκονται στο 2^ο και 4^ο τεταρτημόριο αφού x, y είναι ετερόσημοι.

Παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές $y = \frac{-3}{x}$ και $y = 2x + 1$ δεν έχουν κοινά σημεία, άρα το (Σ) του ερωτήματος β) είναι αδύνατο.



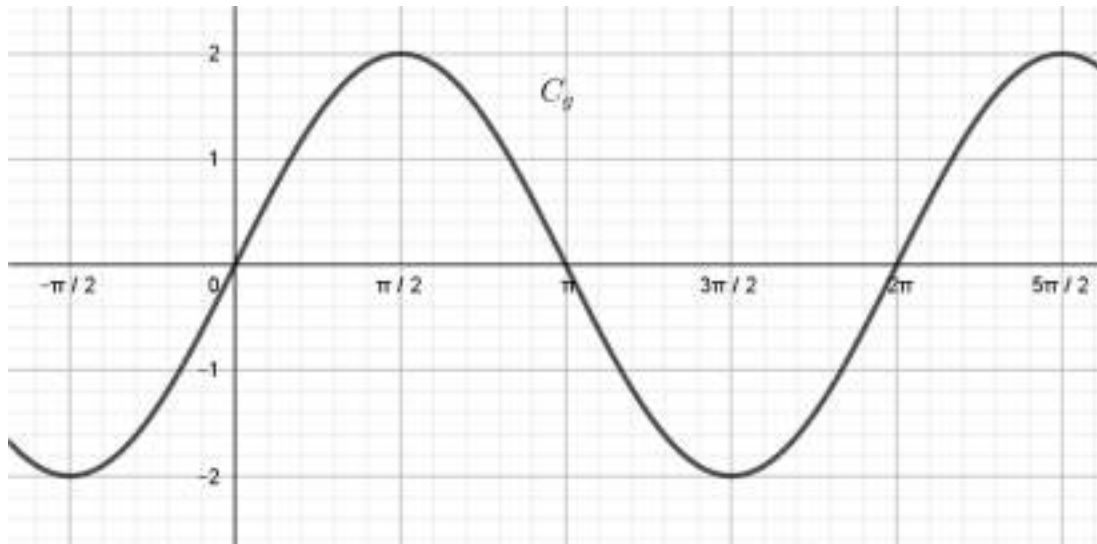
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha\eta\mu\beta x$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ii. Για $\alpha = 2$ και $\beta = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 3x$ είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu\omega x$ με $\rho = 2$ και $\omega = 3$. Οπότε έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$, μέγιστη τιμή $\max f(x) = 2$ και ελάχιστη τιμή $\min f(x) = -2$.

β)

i. Από την γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης g , παρατηρούμε ότι παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{\pi}{2}$ και το επόμενο μέγιστο για $x = \frac{5\pi}{2}$. Άρα η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi$, οπότε $\beta = 1$. Επίσης

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 2$$

Τελικά $g(x) = 2\eta\mu x$.

ii. Η εξίσωση γίνεται:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu 3x = 2\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 3x = \eta\mu x \Leftrightarrow$$

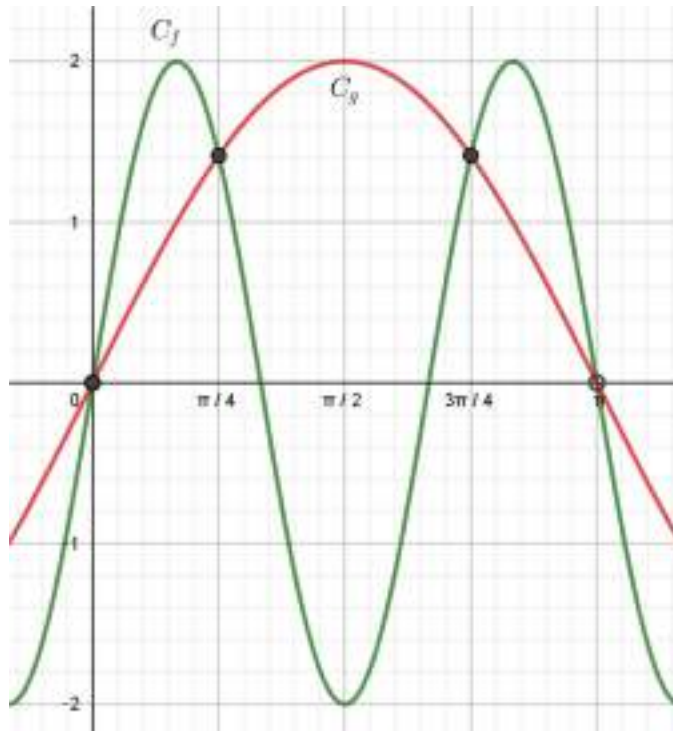
$$\begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + x \\ \text{ή} \\ 3x = 2\kappa\pi + (\pi - x) \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Δηλαδή: $\begin{cases} x = \kappa\pi \\ \text{ή} \\ x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$. Επειδή $x \in [0, \pi)$, για $\kappa = 0$ στον πρώτο τύπο λύσεων προκύπτει

$x = 0$ και στον δεύτερο τύπο λύσεων προκύπτει $x = \frac{\pi}{4}$. Για $\kappa = 1$ στον δεύτερο τύπο λύσεων

προκύπτει $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Από τις άλλες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$ προκύπτουν λύσεις οι οποίες δεν ανήκουν στο διάστημα $[0, \pi)$.

Η γραφική λύση της εξίσωσης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τελικά η εξίσωση έχει τρεις λύσεις στο $[0, \pi)$, τις $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ και $x=\frac{3\pi}{4}$.

ΘΕΜΑ 4

Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών) και δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = 2\eta\mu(\frac{\pi}{6}t) + 4$, με $0 \leq t \leq 24$.

α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = 12$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

t	0	3	6	9	12
y					

(Μονάδες 5)

iii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 2 \cdot \eta\mu(\frac{\pi}{6}t) + 4$, με $0 \leq t \leq 24$.

(Μονάδες 6)

β)

i. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = 12$;

(Μονάδες 4)

ii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιού χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α)

i. Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = \frac{12\pi}{\pi} = 12$ ώρες.

ii. Για να συμπληρώσουμε τον πίνακα τιμών, πρέπει να βρούμε το βάθος y του νερού τις χρονικές στιγμές t που δίνονται.

$$\text{Για } t = 0, \quad y = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0\right) + 4 = 2 \cdot \eta\mu(0) + 4 = 2 \cdot 0 + 4 = 4.$$

$$\text{Για } t = 3, \quad y = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} \cdot 3\right) + 4 = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4 = 2 \cdot 1 + 4 = 6.$$

$$\text{Για } t = 6, \quad y = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) + 4 = 2 \cdot \eta\mu(\pi) + 4 = 2 \cdot 0 + 4 = 4.$$

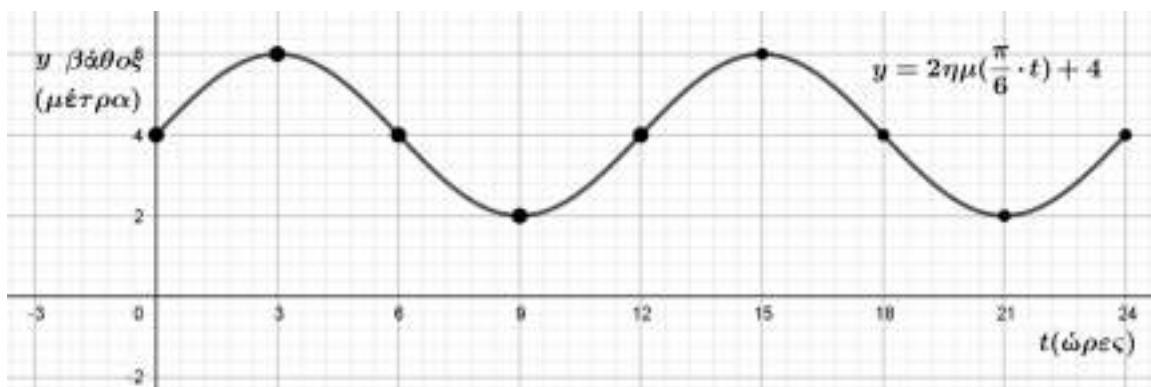
$$\text{Για } t = 9, \quad y = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} \cdot 9\right) + 4 = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 4 = 2 \cdot (-1) + 4 = 2.$$

$$\text{Για } t = 12, \quad y = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} \cdot 12\right) + 4 = 2 \cdot \eta\mu(2\pi) + 4 = 2 \cdot 0 + 4 = 4.$$

Άρα ο πίνακας συμπληρωμένος είναι ο παρακάτω:

t	0	3	6	9	12
y	4	6	4	2	4

iii. Η γραφική παράσταση της $y = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4$, με $0 \leq t \leq 24$ είναι σε διάστημα δυο περιόδων και είναι η παρακάτω:



β) Από την γραφική παράσταση της $y = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4$ στο αiii) ερώτημα,

- i. Βλέπουμε ότι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι (δηλαδή τη χρονική στιγμή $t=12$) είναι 4 μέτρα.
- ii. Βλέπουμε ότι το πλοίο θα δέσει με ασφάλεια το χρονικό διάστημα $[12,18]$, δηλαδή από τις 12 το μεσημέρι μέχρι τις 6 το απόγευμα, γιατί στο διάστημα αυτό το βάθος του νερού είναι $y \geq 4$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} y = x^2 & (1) \\ 2x^2 - y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

α) Με αντικατάσταση, να δείξετε ότι $(x^2 - 1)^2 = 0$.

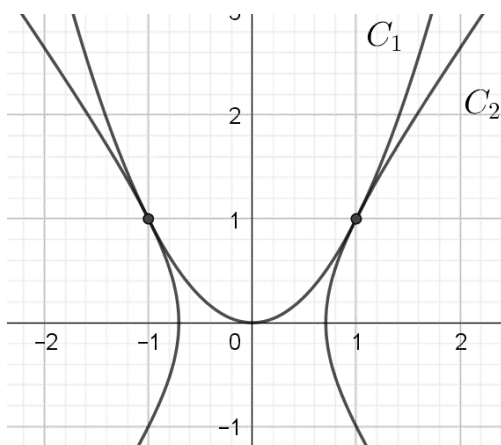
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις λύσεις (x, y) του συστήματος.

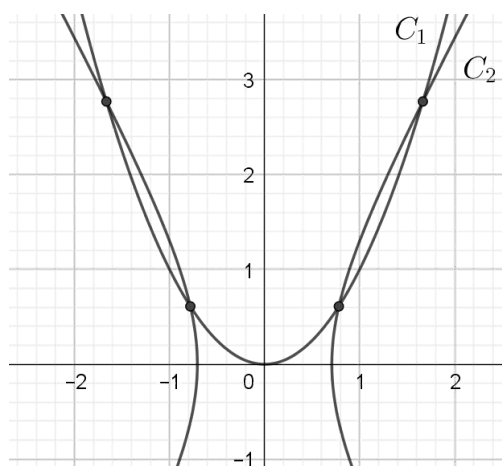
(Μονάδες 9)

γ) Αν η εξίσωση (1) αντιστοιχεί στην παραβολή C_1 και η εξίσωση (2) αντιστοιχεί στην υπερβολή C_2 , από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στο παραπάνω σύστημα και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

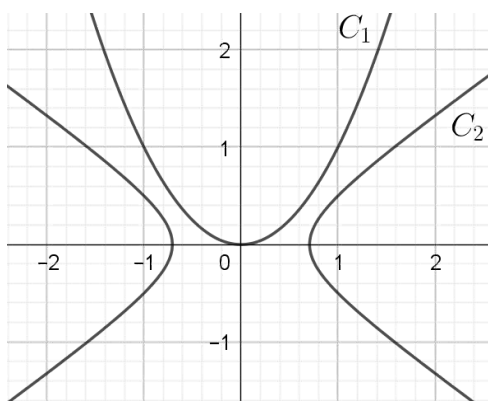
1)



2)



3)



(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2) το y με x^2 , από την εξίσωση (1), έχουμε:

$$2x^2 - (x^2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 0.$$

β) Από το ερώτημα α) είναι $(x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

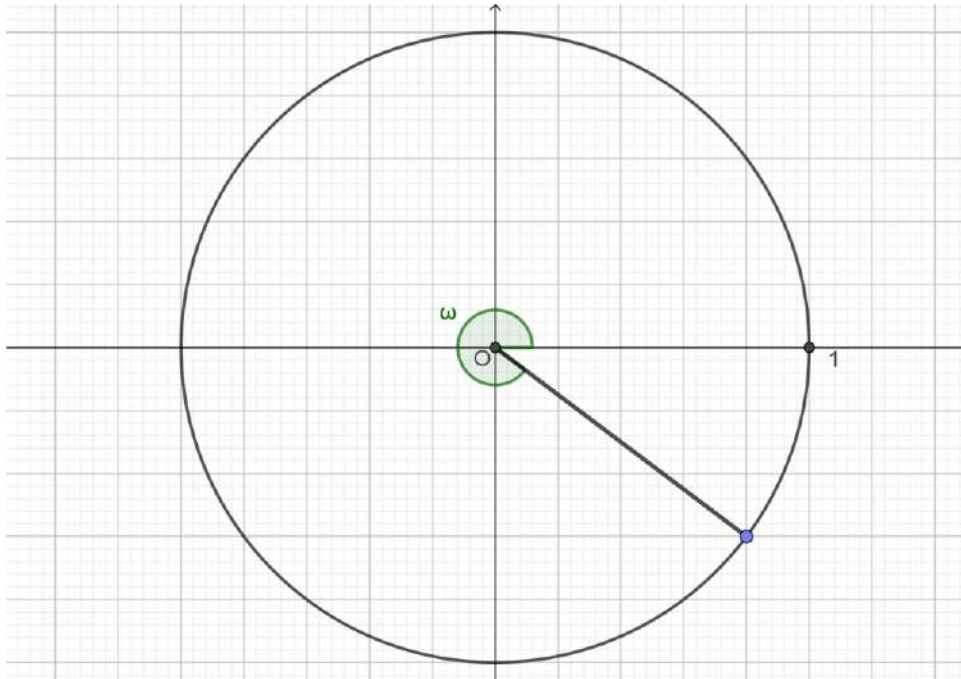
$$x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Από την εξίσωση (1) για $x = 1$ παίρνουμε $y = 1^2 = 1$ και για $x = -1$ παίρνουμε $y = (-1)^2 = 1$. Άρα, το σύστημα έχει δύο λύσεις $(x, y) = (-1, 1)$ και $(x, y) = (1, 1)$.

γ) Επειδή το σύστημα έχει δύο λύσεις, η παραβολή C_1 και η υπερβολή C_2 έχουν δύο κοινά σημεία. Άρα, η σωστή γραφική παράσταση είναι η 1).

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω κύκλο έχει σχεδιαστεί η γωνία $\hat{\omega}$. Δίνεται ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$.



α) Να υπολογίσετε το $\eta\mu\omega$.

(Μονάδες 13)

β) Αν είναι $\eta\mu\omega = -\frac{4}{5}$, να υπολογίσετε την $\epsilon\varphi\omega$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm \frac{4}{5}.$$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$, οπότε $\eta\mu\omega < 0$. Επομένως $\eta\mu\omega = -\frac{4}{5}$.

$$\beta) \text{ Έχουμε } \varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

α) Να δείξετε ότι το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ είναι οι αριθμοί $-2, 1$ και 3 , να λύσετε την εξίσωση $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το $x - \rho$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$ αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$. Έχουμε $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 \Leftrightarrow P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 \Leftrightarrow P(1) = 0$, άρα το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Από το σχήμα Horner για $x = 1$ έχουμε

1	-2	-5	6	1
	1	-1	-6	
1	-1	-6	0	

Επομένως $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - 6) = 0$.

Άρα $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 3$ ($\Delta = 25$).

Τελικά ρίζες της εξίσωσης $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ είναι οι αριθμοί $-2, 1$ και 3 .

γ) Από το β) ερώτημα παίρνουμε, για $x > 0$:

$$\ln x = -2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-2} \Leftrightarrow x = e^{-2}$$

$$\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow x = e$$

$$\ln x = 3 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^3 \Leftrightarrow x = e^3.$$

Τελικά λύσεις είναι οι αριθμοί e^{-2}, e, e^3 .

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log_{\alpha}(x+1)$, $0 < \alpha \neq 1$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

(Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την τιμή του α με $0 < \alpha \neq 1$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(7, 3)$

(Μονάδες 08)

γ) Για $\alpha = 2$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \log_2 x = \log_2(2x + 2)$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί να ισχύει $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το διάστημα $(-1, +\infty)$

β) Η συνάρτηση f ορίζεται για $x = 7$. Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(7, 3)$ αν και μόνο αν ισχύει $f(7) = 3 \Leftrightarrow \log_{\alpha}(7+1) = 3 \Leftrightarrow \log_{\alpha} 8 = 3 \Leftrightarrow \alpha^3 = 8$. Επομένως $\alpha^3 = 8 \Leftrightarrow \alpha^3 = 2^3 \Leftrightarrow \alpha = 2$

γ) Για $\alpha = 2$, η συνάρτηση f γίνεται $f(x) = \log_2(x+1)$, $x > -1$. Επομένως ζητάμε τις λύσεις της εξίσωσης $\log_2(x+1) + \log_2 x = \log_2(2x+2)$, με περιορισμούς $x > -1$ και $x > 0$ και $2x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$, οι οποίοι συναληθεύουν όταν $x > 0$. Για $x > 0$, έχουμε $\log_2(x+1) + \log_2 x = \log_2(2x+2) \Leftrightarrow \log_2[x(x+1)] = \log_2(2x+2) \Leftrightarrow x(x+1) = 2x+2$
 $\Leftrightarrow x^2 + x = 2x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

Η παραπάνω εξίσωση έχει λύσεις $x = -1$ ή $x = 2$. Από τους περιορισμούς βλέπουμε ότι δεκτή είναι μόνο η λύση $x = 2$.