

ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

6. Στοιχεία και είδη τριγώνων – Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1 Θέμα 2 - 13682

Στο παρακάτω σχήμα, το M είναι ένα τυχαίο σημείο της ημιευθείας Ox και B, Γ είναι σημεία τέτοια, ώστε $\widehat{BOx} = \widehat{GOx}$ και $OB = OG$.

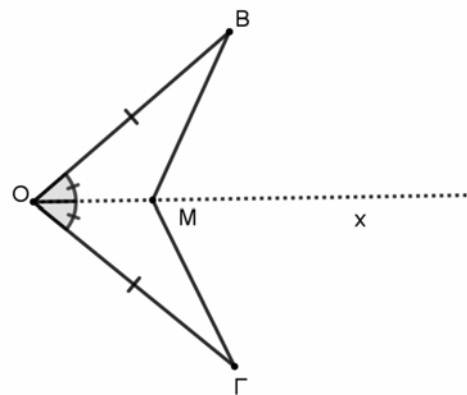
α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα OBM και OGM και να δικαιολογήσετε ότι είναι ίσα.

β. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις με τις άλλες ίσες γωνίες που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα της ισότητας των δυο τριγώνων OBM και OGM.

1. Η γωνία $\widehat{OBM}$ του τριγώνου OBM είναι ίση με την γωνία του τριγώνου OGM.

2. Η γωνία του τριγώνου OBM είναι ίση με την γωνία $\widehat{GMO}$ του τριγώνου OGM.

γ. Είναι οι γωνίες $\widehat{BMx}$ και $\widehat{GMx}$ ίσες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



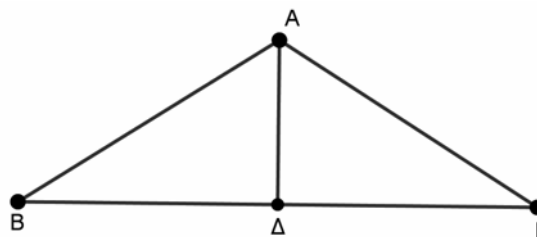
2 Θέμα 2 - 12535

Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ, με $AB = AG$ η γωνία της κορυφής του A είναι ίση με 120° .

Αν η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου τότε:

α. να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία ΒΑΔ.

β. να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα.

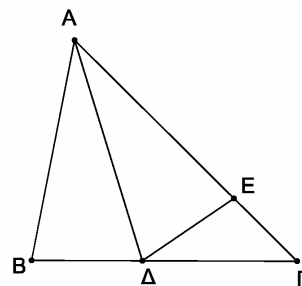


3 Θέμα 2 - 13436

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB = 5$ και $AG = 7$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο E, ώστε $GE = 2$.

α. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ.

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΔ είναι ίσα.



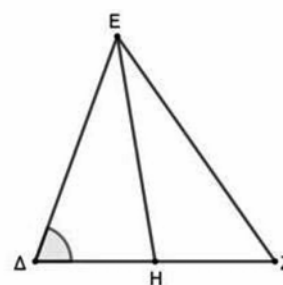
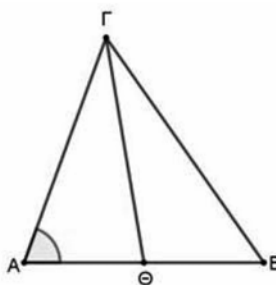
4 Θέμα 2 - 12454

Δίνονται δύο ίσα τρίγωνα ABΓ και ΔZE για τα οποία ισχύει $AB = ΔZ = 4$, $AG = ΔE$ και $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$.

Έστω Θ το μέσο της AB και Η το μέσο της ΔZ.

α. Να υπολογίσετε το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΘ και ΔΗ.

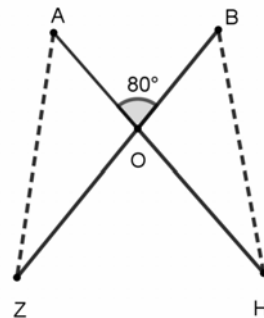
β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΘ και ΔΕΗ είναι ίσα.



5 Θέμα 2 - 13445

Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα ΑΗ και ΒΖ είναι ίσα και τέμνονται σε σημείο Ο έτσι ώστε η γωνία ΑΟΒ να είναι ίση με 80° . Έστω ότι είναι $AH = BZ = 5$ και $OH = OZ = 3$.

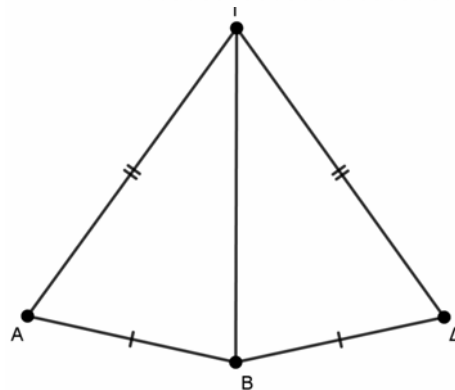
- α. Να αποδείξετε ότι $\widehat{A\hat{O}Z} = \widehat{B\hat{O}H} = 100^\circ$.
- β. Είναι τα τρίγωνα ΑΟΖ και ΒΟΗ ίσα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



6 Θέμα 2 - 12538

Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν $AB = BD$, $AG = GD$ και η $\widehat{BAG} = 75^\circ$.

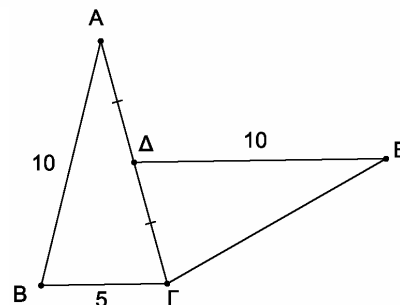
- α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΓ.
- β. Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΔΓ αιτιολογώντας την απάντησή σας.



7 Θέμα 2 - 13527

Δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ με $AB = AG$ και $ED = EG$. Αν $BG = 5$, $AB = ED = 10$ και Δ είναι το μέσο της ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

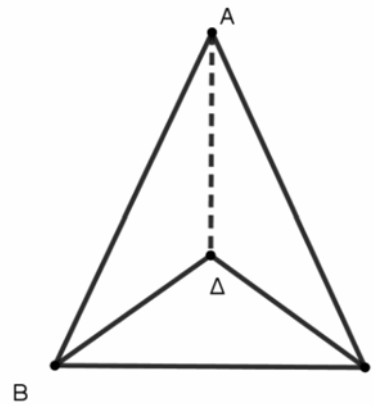
- α. $BG = DG$.
- β. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα.
- γ. $\widehat{A} = \widehat{E}$.



8 Θέμα 2 - 13681

Στο σχήμα που ακολουθεί, τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΒΔΓ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΒΓ.

- α. Στις παρακάτω προτάσεις να συμπληρώσετε τα κενά με τις ίσες πλευρές και τις ίσες γωνίες για τα δυο ισοσκελή τρίγωνα ΒΑΓ και ΒΔΓ.
- Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΒΑΓ είναι οι και
 - Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΒΔΓ είναι οι και
 - Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΓ η γωνία $\widehat{B\hat{\Gamma}\Delta}$ είναι ίση με την γωνία
 - Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΓ η γωνία $\widehat{B\hat{\Gamma}A}$ είναι ίση με την γωνία
- β. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα.
- γ. Στον πίνακα που ακολουθεί, στη στήλη Α δίνονται γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ, ενώ στη στήλη Β δίνονται γωνίες του τριγώνου ΑΔΓ.



Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία του τριγώνου ΑΔΒ με την αντίστοιχη ίση της γωνία του τριγώνου ΑΔΓ που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ του β. ερωτήματος.

Στήλη Α	Στήλη Β
(γωνίες τριγώνου ΑΔΒ)	(γωνίες τριγώνου ΑΔΓ)
1. γωνία $\widehat{A\hat{B}\Delta}$	α. γωνία $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta}$
2. γωνία $\widehat{A\hat{\Delta}B}$	β. γωνία $\widehat{A\hat{\Gamma}\Delta}$
3. γωνία $\widehat{B\hat{A}\Delta}$	γ. γωνία $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$

9 Θέμα 2 - 13683

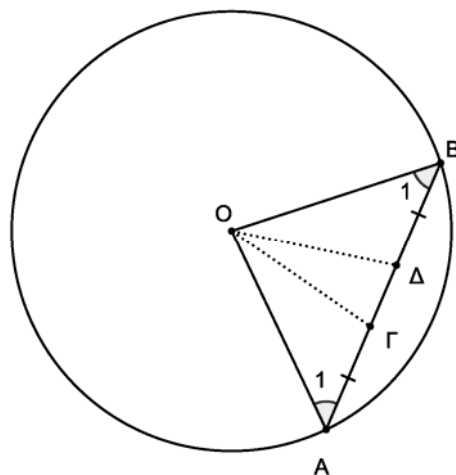
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση την πλευρά $B\Gamma$.

- Να γράψετε τις ιδιότητες που αφορούν τις πλευρές και τις γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Από τις κορυφές B και Γ φέρνουμε τις διαμέσους BM και ΓN που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.
 - Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $B\Gamma M$ και $\Gamma B N$ και να αιτιολογήσετε γιατί είναι ίσα.
 - Να εξηγήσετε γιατί οι διάμεσοι BM και ΓN είναι ίσες.

10 Θέμα 2 - 13685

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και χορδή του AB . Πάνω στη χορδή AB παίρνουμε σημεία Γ και Δ τέτοια, ώστε $A\Gamma = B\Delta$.

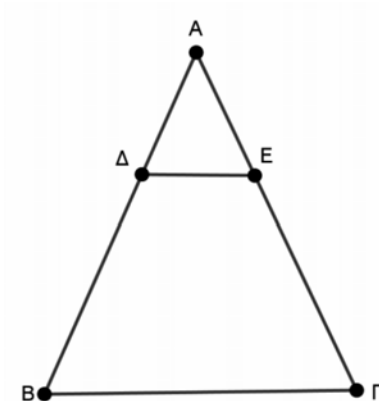
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές και ότι οι γωνίες του $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_1$ είναι ίσες.
- Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα $OA\Gamma$ και $OB\Delta$ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Είναι ίσα τα τμήματα $O\Gamma$ και $O\Delta$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



11 Θέμα 4 - 12512

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και στις ίσες πλευρές του AB , $A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $A\epsilon = \frac{1}{3}A\Gamma$.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta\epsilon$ είναι ισοσκελές.
- Να αποδείξετε ότι τα τμήματα $B\Delta$ και $\Gamma\epsilon$ είναι ίσα.
- Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:
 - τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma\epsilon M$ είναι ίσα.
 - το τρίγωνο $\Delta\epsilon M$ είναι ισοσκελές.



12 Θέμα 4 - 13795

Στις πλευρές μίας γωνίας $x\hat{O}y$ παίρνουμε τα σημεία A, B στην Ox και Γ, Δ στην Oy , ώστε $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Έστω M τυχαίο σημείο της διχοτόμου της γωνίας $x\hat{O}y$.

- Να αποδείξετε ότι $MB = M\Delta$.
- Να αποδείξετε ότι $\hat{A}MB = \hat{\Gamma}M\Delta$.
- Να αποδείξετε ότι $\hat{A}MO = \hat{\Gamma}MO$.

13 Θέμα 4 - 13794

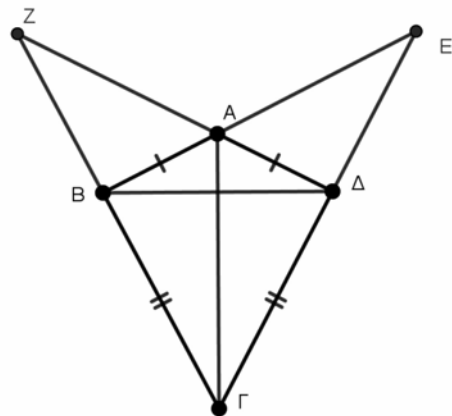
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις των πλευρών του BA προς το A και ΓA προς το A , παίρνουμε σημεία E και Δ αντίστοιχα, ώστε $AE = A\Delta$.

- Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.
- Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma}B\Delta = \hat{B}\Gamma E$.
- Έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.

14 Θέμα 4 - 13287

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν οι προεκτάσεις των BA και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο E , και οι προεκτάσεις των ΔA και ΓB τέμνονται στο Z , να αποδείξετε ότι:

- Η ΓA είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.
- Οι γωνίες $\hat{Z}\hat{A}\hat{\Gamma}$ και $\hat{E}\hat{A}\hat{\Gamma}$ είναι ίσες.
- $\Gamma Z = \Gamma E$

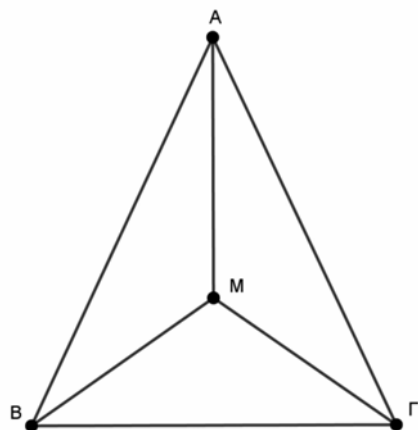


15 Θέμα 4 - 12699

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο M , εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB = M\Gamma$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα MAB και $MA\Gamma$ είναι ίσα.
- Να αιτιολογήσετε γιατί η MA διχοτομεί τη γωνία A .
- Προεκτείνουμε την AM προς το μέρος του M και η προέκταση τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ .

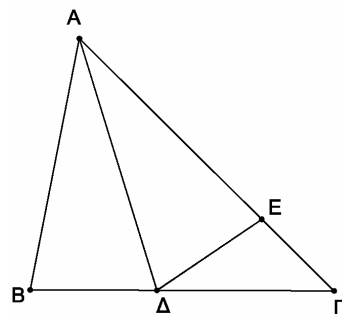
Να αποδείξετε ότι το $M\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $MB\Gamma$.



16 Θέμα 4 - 13530

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 10$ και $A\Gamma = 14$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο E ώστε $\Gamma E = 4$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ είναι ίσα.
- Να δικαιολογήσετε γιατί είναι ίσα τα τμήματα $B\Delta$, ΔE .
- Προεκτείνουμε την $E\Delta$ προς το Δ κατά τμήμα ΔZ , ώστε $\Delta Z = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta B Z} = \hat{\Delta Z B}$.



17 Θέμα 4 - 13793

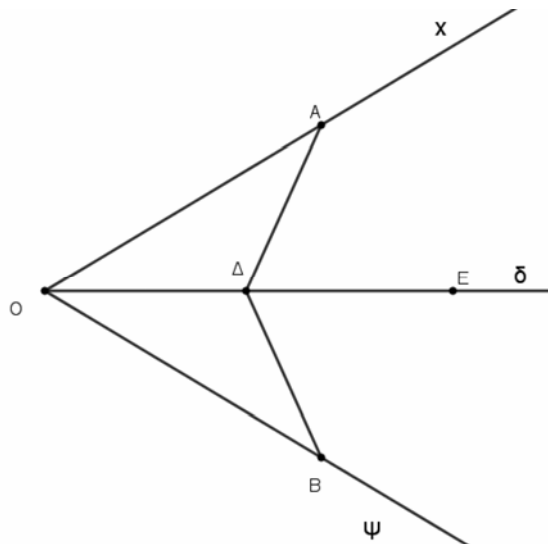
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του $A\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών του AB προς το B και $A\Gamma$ προς το Γ παίρνουμε σημεία E και Z αντίστοιχα ώστε $BE = \Gamma Z$.

- Να αποδείξετε ότι $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta}$.
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα.
- Αν ΔK είναι το ύψος του τριγώνου $E\Delta Z$, να αποδείξετε ότι $EK = KZ$.

18 Θέμα 4 - 13496

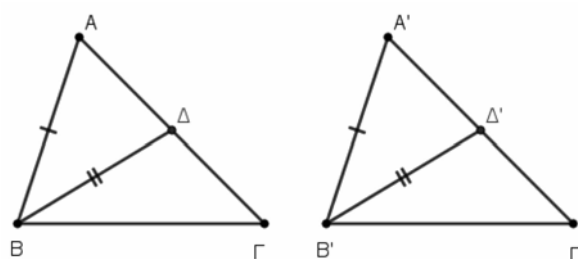
Δίνεται η γωνία $\widehat{x\hat{O}\psi}$ και η διχοτομος της Οδ. Πάνω στις Οx και Οψ παίρνουμε σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε $OA = OB$. Πάνω στην Οδ θεωρούμε σημεία Δ και Ε όπως φαίνονται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΔ είναι ίσα.
- $\widehat{A\hat{D}E} = \widehat{B\hat{D}E}$.
- Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι $AE = BE$. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

**19 Θέμα 4 - 13502**

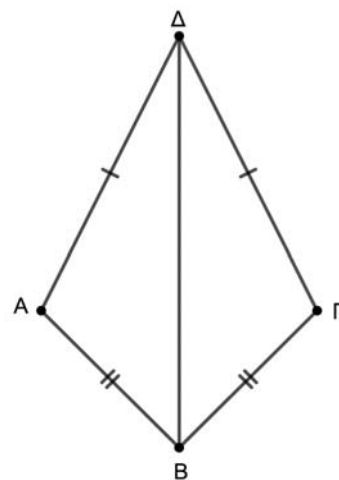
Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' του σχήματος με $AG = A'G'$, $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι ΒΔ και Β'Δ' είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

- $\widehat{A} = \widehat{A'}$.
- Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα στοιχεία που έχουμε δεν αρκούν για να θεωρήσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**20 Θέμα 4 - 13651**

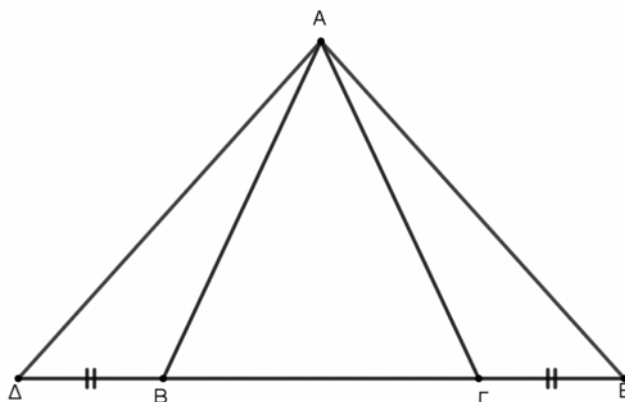
Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι $AD = GD$ και $AB = GB$.

- Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ.
- Να αποδείξετε ότι η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\hat{D}G}$.
- Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «η ΔΒ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ». Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**21 Θέμα 4 - 12972**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$). Στις προεκτάσεις της πλευράς ΒΓ και προς τα δύο άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε $BD = GE$ όπως στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

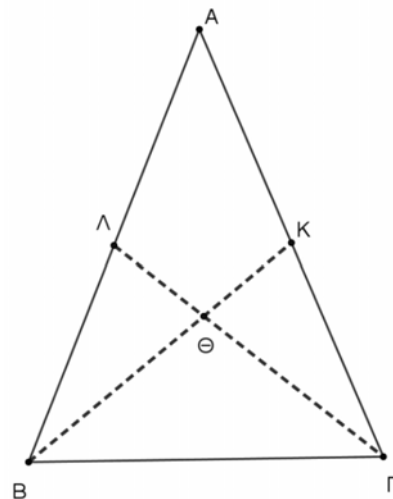
- $\widehat{B_{εξ}} = \widehat{G_{εξ}}$
- Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.
- Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι τα τρία τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Α. Συμφωνείτε ή όχι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



22 Θέμα 4 - 13690

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τις διαμέσους του $B\Lambda$ και $\Gamma\Delta$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Θ .

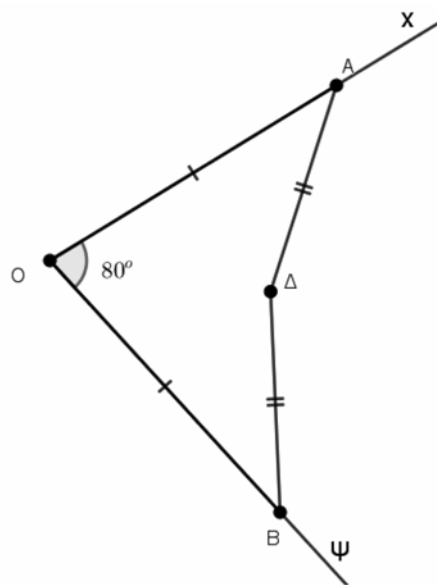
- α. i. Να δικαιολογήσετε γιατί είναι $\Lambda\Theta = \Theta\Gamma$.
- ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Lambda\Theta\Gamma$ και $\Theta\Gamma\Lambda$ είναι ίσα.
- β. Τι είδους τρίγωνο είναι το $B\Theta\Gamma$ ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ. Αν η διάμεσος $B\Lambda$ είναι και ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ στην πλευρά του $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.



23 Θέμα 4 - 13503

Δίνεται η γωνία $\widehat{x\hat{O}\psi} = 80^\circ$. Πάνω στις πλευρές Ox και $O\psi$ παίρνουμε σημεία A και B αντίστοιχα, ώστε $OA = OB$. Έστω Δ σημείο στο εσωτερικό της γωνίας $\widehat{x\hat{O}\psi}$ τέτοιο, ώστε $AD = BD$.

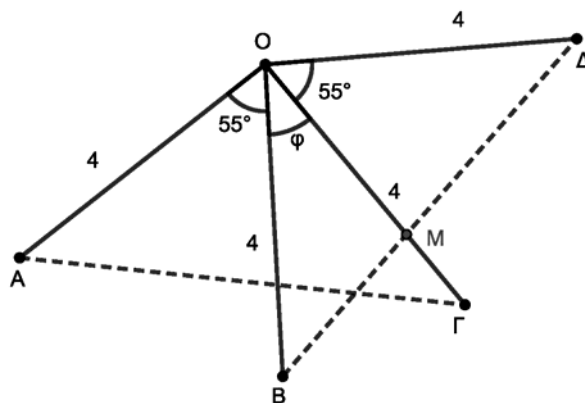
- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Τα τρίγωνα $O\Delta A$ και $O\Delta B$ είναι ίσα.
 - ii. $\widehat{A\hat{O}\Delta} = 40^\circ$.
- β. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η ΔO είναι μεσοκάθετος της AB . Συμφωνείτε μαζί του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



24 Θέμα 4 - 12974

Για τις γωνίες του παρακάτω σχήματος δίνεται ότι: $\widehat{A\hat{O}B} = \widehat{\Gamma\hat{O}\Delta} = 55^\circ$, $\widehat{B\hat{O}\Gamma} = \varphi$ και $OA = OB = OG = OD = 4$.

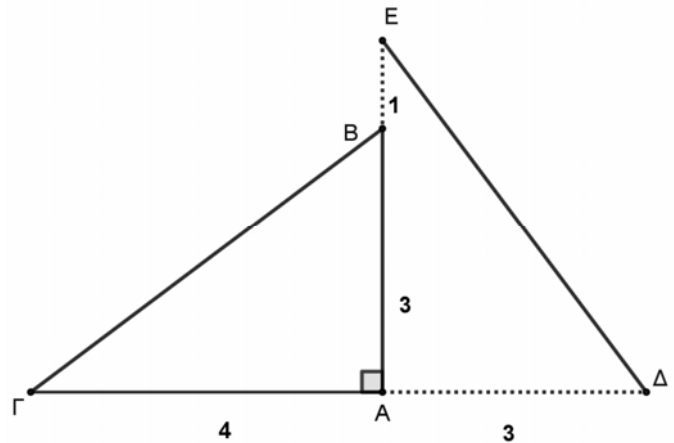
- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Οι γωνίες $\widehat{A\hat{O}\Gamma}$ και $\widehat{B\hat{O}\Delta}$ είναι ίσες.
 - ii. Τα τρίγωνα $\Delta O\Gamma$ και $\Delta O\Delta$ είναι ίσα.
- β. Αν M είναι το σημείο τομής των τμημάτων $O\Gamma$ και $B\Delta$, πόσες μοίρες θα έπρεπε να είναι η γωνία φ , ώστε το σημείο M να είναι το μέσο του τμήματος $B\Delta$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



7. Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

25 Θέμα 2 - 13680

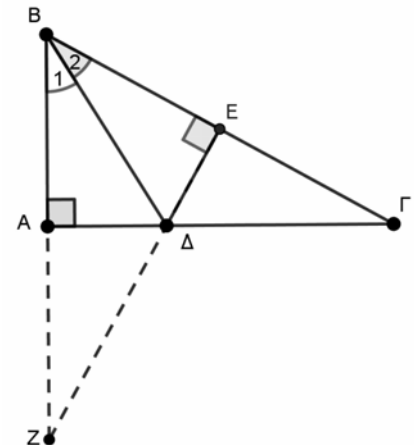
Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΑΓ$ με $\widehat{ΒΑΓ} = 90^\circ$ είναι $ΒΑ = 3$ και $ΑΓ = 4$. Προεκτείνουμε την πλευρά $ΓΑ$ (προς το μέρος του $Α$) και παίρνουμε τμήμα $ΑΔ = 3$ και την πλευρά $ΑΒ$ (προς το μέρος του $Β$) κατά τμήμα $ΒΕ = 1$.



- α. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τρίγωνο $ΔΑΕ$ είναι ορθογώνιο. Είναι ο ισχυρισμός του σωστός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $ΒΑΓ$ και $ΔΑΕ$ είναι ίσα.
- γ. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις με τις ίσες γωνίες που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ του β. ερωτήματος.
- Η γωνία $\widehat{ΒΓΑ}$ του τριγώνου $ΒΑΓ$ είναι ίση με τη γωνία του τριγώνου $ΔΑΕ$.
 - Η γωνία $\widehat{ΑΔΕ}$ του τριγώνου $ΔΑΕ$ είναι ίση με τη γωνία του τριγώνου $ΒΑΓ$.

26 Θέμα 2 - 12698

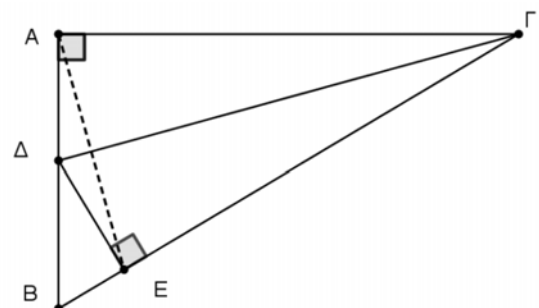
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\widehat{Α} = 90^\circ$) και $ΒΔ$ η διχοτόμος της γωνίας $Β$. Από το $Δ$ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$ και έστω $Ζ$ το σημείο στο οποίο η ευθεία $ΕΔ$ τέμνει την προέκταση της $ΒΑ$ (προς το $Α$). Να αποδείξετε ότι:



- α. $ΑΔ = ΔΕ$ και $ΑΒ = ΕΒ$
- β. $ΔΖ = ΔΓ$
- γ. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΒΖ$ είναι ίσα.

27 Θέμα 4 - 13691

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\widehat{Α} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\widehat{Γ}$, η οποία τέμνει την πλευρά $ΑΒ$ στο $Δ$. Από το $Δ$ φέρουμε τμήμα $ΔΕ$ κάθετο στην πλευρά $ΒΓ$.

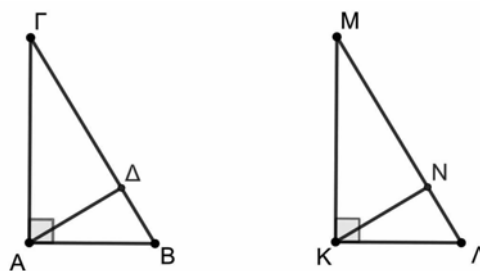


- α. i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΓΔ$ και $ΕΓΔ$ είναι ίσα.
- ii. Να γράψετε τις ισότητες πλευρών και γωνιών που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων $ΑΓΔ$ και $ΕΓΔ$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- β. Να αποδείξετε ότι η $ΓΔ$ είναι μεσοκάθετος του $ΑΕ$.

28 Θέμα 4 - 13779

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$ είναι ορθογώνια με $\hat{A} = \hat{K} = 90^\circ$ και $AG = KM$, $B\Gamma = \Lambda M$. Επίσης τα $A\Delta$ και KN είναι ύψη των τριγώνων:

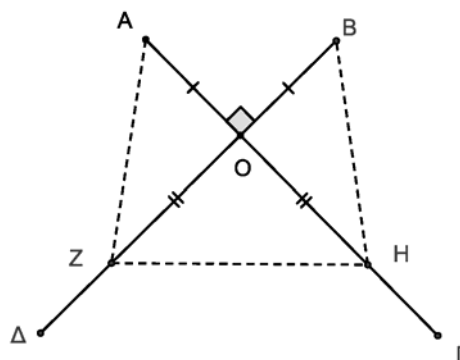
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$ είναι ίσα
- Να αποδείξετε ότι $A\Delta = KN$.
- Ποιο συμπέρασμα βγαίνει από το (β) για τα μήκη των αντίστοιχων υψών ίσων ορθογώνιων, όπως τα $A\Delta$ και KN ;
- Να σχεδιάσετε τα ύψη ΔE και NP των τριγώνων $A\Delta B$ και $KN\Lambda$ και να αποδείξετε ότι είναι ίσα.



29 Θέμα 4 - 13688

Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται κάθετα στο σημείο O έτσι ώστε $OA = OB$. Πάνω στα τμήματα OG και OD θεωρούμε τα σημεία H και Z αντίστοιχα τέτοια ώστε $OH = OZ$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OAZ και OBH είναι ίσα.
- Δύο από τις παρακάτω τέσσερις ιδιότητες προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ιδιότητα των τριγώνων OAZ και OBH του α. ερωτήματος. Να βρείτε ποιες ιδιότητες είναι και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - $O\hat{A}Z = O\hat{B}H$
 - $A\hat{O}B = Z\hat{O}H$
 - $AZ = BH$
 - $AH = BZ$
- Τι θα αλλάζατε ή θα προσθέτατε στα δεδομένα ώστε να προκύπτει ως συμπέρασμα ότι το τμήμα ZH είναι ίσο με τα τμήματα AZ και BH ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

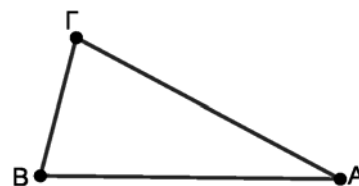


10. Ανισοτικές σχέσεις

30 Θέμα 2 - 13789

Στο παραπάνω σχήμα ισχύει ότι $AB = A\Gamma$ και $\hat{B} > \hat{A}$. Να αποδείξετε ότι:

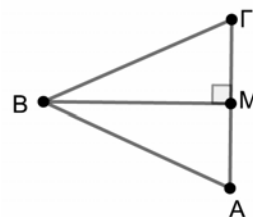
- Οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσες.
- $A\Gamma > B\Gamma$.
- Η μικρότερη γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι η $\hat{A}$.



31 Θέμα 2 - 13786

Στο σχήμα το M είναι μέσο της $A\Gamma$ και τα τμήματα $A\Gamma$ και BM είναι κάθετα.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- Το παρακάτω σχήμα είναι η κάτοψη ενός κήπου. Η πλευρά του κήπου που αντιστοιχεί στην πλευρά $A\Gamma$ της κάτοψης έχει μήκος 12 μέτρα. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 40 μέτρα φράχτη.
 - Πόσα μέτρα φράχτη χρειαζόμαστε για την πλευρά του κήπου που αντιστοιχεί στην AB της κάτοψης;
 - Αν αφήσουμε χωρίς φράχτη μόνο το μέρος του κήπου που αντιστοιχεί στο AM , τότε πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε;

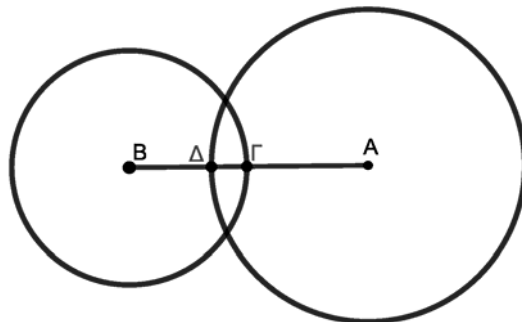


12. Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

32 Θέμα 2 - 13775

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο κύκλοι με κέντρα τα σημεία Α και Β.

Ο κύκλος με κέντρο το Α έχει ακτίνα 4 και ο κύκλος με κέντρο το Β έχει ακτίνα 3.

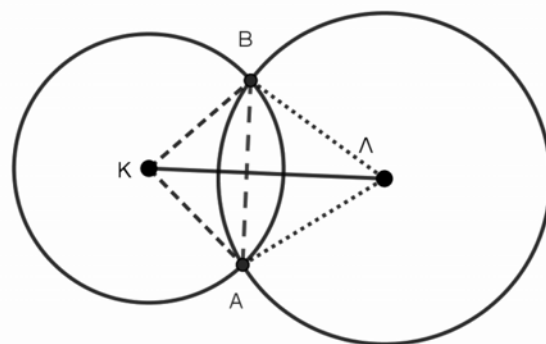


- α. Ποια είναι τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ΒΓ και ΑΔ και γιατί;
- β. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας
 - i. Το μήκος του ΑΒ είναι ίσο με 7.
 - ii. Το μήκος του ΑΒ είναι μικρότερο από 7.
 - iii. Το μήκος του ΑΒ είναι μεγαλύτερο από 7.

33 Θέμα 4 - 13288

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δύο τεμνόμενοι κύκλοι με κέντρα τα σημεία Κ, Λ και έστω Α, Β τα σημεία τομής τους.

Να αποδείξετε ότι:

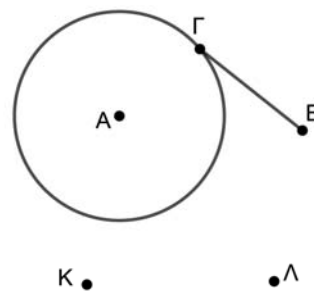


- α. Τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΒΚΛ είναι ίσα.
- β. Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΒ είναι ισοσκελή με βάση την ΑΒ.
- γ. Η ΚΛ είναι:
 - i. διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΑΚΒ}$
 - ii. κάθετη στη χορδή ΑΒ.

34 Θέμα 4 - 13783

Ο κύκλος με κέντρο Α έχει ακτίνα 4. Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ έχει μήκος 5 και η απόσταση των Α και Β είναι 7.

- α. Να βρείτε ένα σημείο Δ του κύκλου (Α, 4), διαφορετικό από το Γ τέτοιο ώστε $ΒΔ = 5$.
- β. Το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ με άκρα τα σημεία Κ και Λ του σχήματος έχει μήκος 7. Ένα σημείο Μ απέχει 4 από το ένα άκρο του ΚΛ και 5 από το άλλο άκρο του. Πόσες είναι οι θέσεις στο επίπεδο που μπορεί να βρίσκεται το Μ; Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



35 Θέμα 4 - 13498

Θεωρούμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) με $R = 4$, $\rho = 3$ και $ΚΛ = 5$.

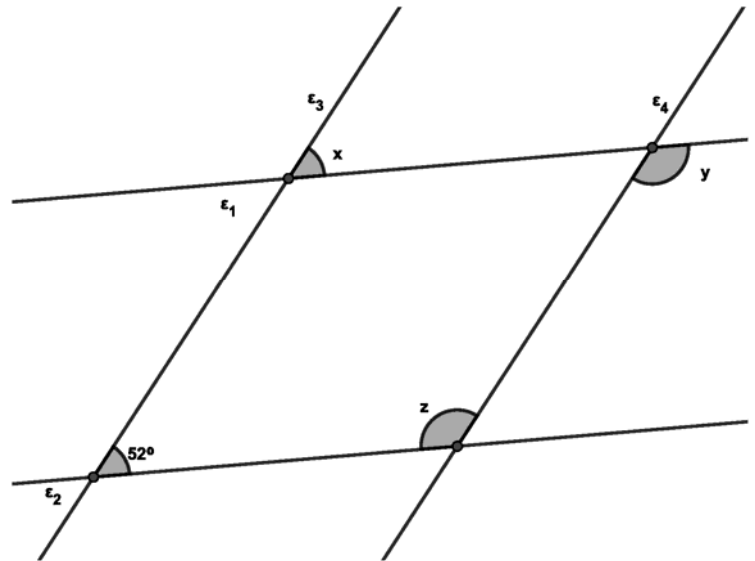
- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω Α και Β.
 - ii. $\widehat{ΑΛΚ} > \widehat{ΛΚΑ}$.
- β. Πόσο πρέπει να είναι το μήκος της ακτίνας ρ έτσι ώστε οι γωνίες $\widehat{ΑΛΚ}$ και $\widehat{ΛΚΑ}$ να είναι ίσες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

14. Παράλληλες ευθείες

36 Θέμα 2 - 13787

Στο διπλανό σχήμα ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$.

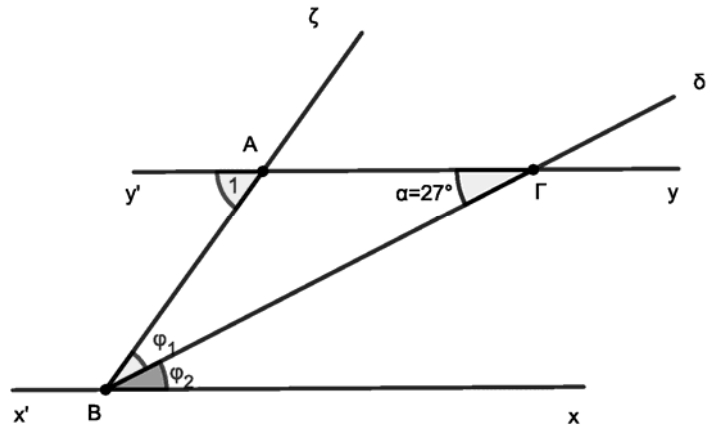
- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{x}$ δικαιολογώντας την απάντησή σας.
- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{z}$ δικαιολογώντας την απάντησή σας.
- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{y}$ δικαιολογώντας την απάντησή σας.



37 Θέμα 2 - 12963

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες, η ημιευθεία $B\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ABx}$ και $\hat{\alpha} = 27^\circ$. Να υπολογίσετε:

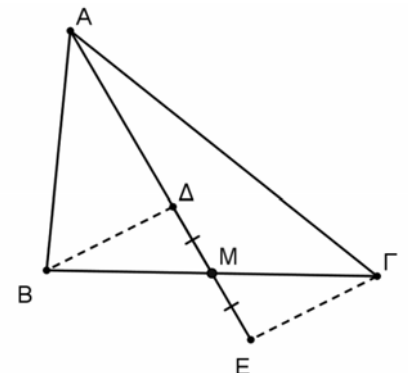
- Τις γωνίες $\hat{\phi}_1$ και $\hat{\phi}_2$ δικαιολογώντας το συλλογισμό σας.
- Τη γωνία $\hat{A}_1$ δικαιολογώντας την απάντησή σας.



38 Θέμα 2 - 13686

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσός του AM και σημείο της Δ . Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM προς το μέρος του M κατά τμήμα $ME = MD$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.
- Είναι οι γωνίες $\widehat{B\Delta M}$ και $\widehat{\Gamma E M}$ των τριγώνων $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ ίσες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να αποδείξετε ότι τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι παράλληλα.

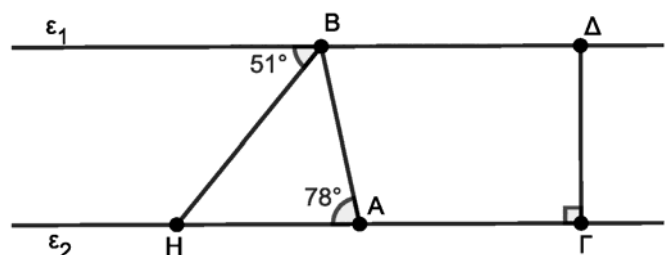


39 Θέμα 2 - 13821

Στο παραπάνω σχήμα η BH είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AB\epsilon_1}$.

Επίσης δίνονται οι γωνίες $\widehat{BAH} = 78^\circ$, $\widehat{H\beta\epsilon_1} = 51^\circ$ και η $A\Gamma\Delta$ είναι ορθή.

- Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{ABH}$.
- Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.
- Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B\Delta\Gamma}$.



40 Θέμα 4 - 13446

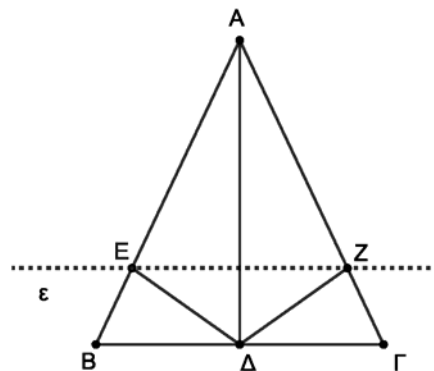
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Φέρουμε μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{A}\hat{E}Z = \hat{B}$ και $\hat{A}\hat{Z}E = \hat{\Gamma}$

ii. Το τρίγωνο $A\Gamma Z$ είναι ισοσκελές

β. Αν η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $A\Delta B$ είναι ίσα.

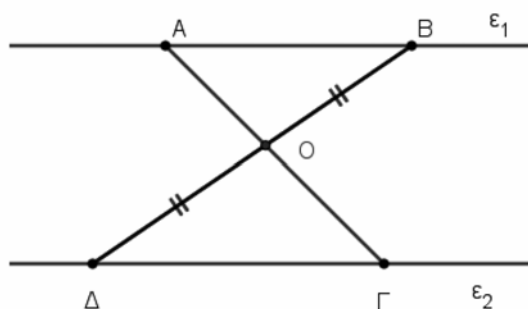
**41 Θέμα 4 - 13495**

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και το σημείο O είναι μέσο του $B\Delta$.

α. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{A}\hat{B}O$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}O$ είναι ίσες.

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABO και $A\Gamma O$ είναι ίσα.

γ. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η $A\Delta$ είναι παράλληλη στην $B\Gamma$. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

**42 Θέμα 4 - 12970**

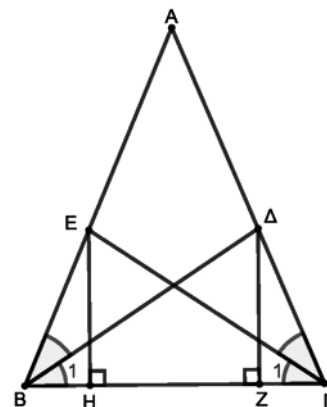
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι $B\Delta$ και ΓE των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Φέρουμε $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα.

ii. $EH = \Delta Z$.

β. Να ονομάσετε P το σημείο τομής των διχοτόμων $B\Delta$ και ΓE και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Το τμήμα PM είναι παράλληλο στα τμήματα EH και ΔZ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

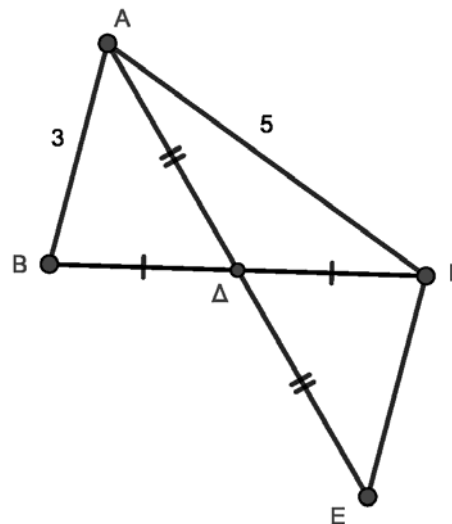
**43 Θέμα 4 - 13001**

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος, στο οποίο $AB = 3$, $A\Gamma = 5$. Φέρουμε τη διάμεσο $A\Delta$ και στην προέκτασή της προς το Δ παίρνουμε σημείο E έτσι ώστε $A\Delta = \Delta E$.

α. i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

ii. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓE .

β. Τα σημεία A, B, Γ, Δ και E στο σχήμα αποτελούν τις θέσεις πέντε χωριών σε ένα σχέδιο και τα μήκη που δίνονται είναι οι χιλιομετρικές αποστάσεις μεταξύ των χωριών. Επιπλέον δίνεται ότι η απόσταση ΓE είναι 3 χιλιόμετρα. Ένας συμμαθητής σας πήγε από το χωριό A στο χωριό E ακολουθώντας τη διαδρομή $A\Delta E$. Χρησιμοποίησε μια εφαρμογή που είχε στο κινητό του για να μετράει τις αποστάσεις που διανύει και είδε ότι είχε κάνει 8,5 χιλιόμετρα. Είναι αυτό δυνατόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

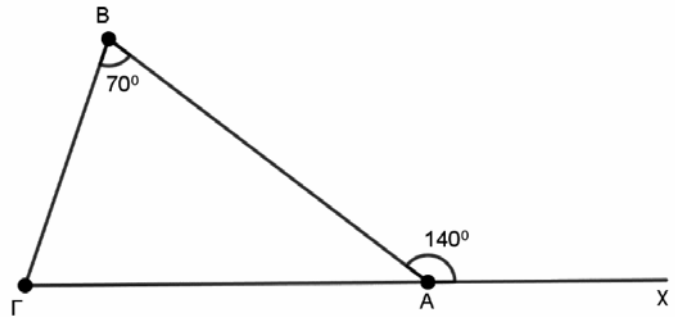


16. Άθροισμα γωνιών τριγώνου

44 Θέμα 2 - 12534

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η εξωτερική γωνία της A , είναι ίση με 140° . Επίσης η γωνία του B ισούται με 70° .

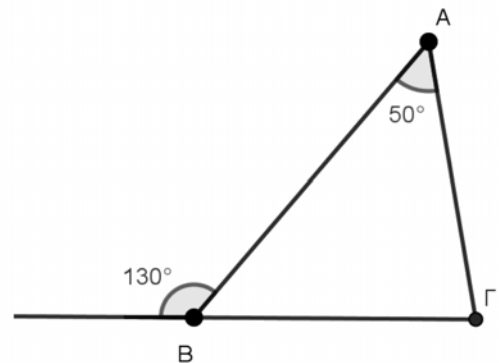
- Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία A του τριγώνου.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



45 Θέμα 2 - 13293

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B}_{\varepsilon} = 130^\circ$ και $\hat{A} = 50^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

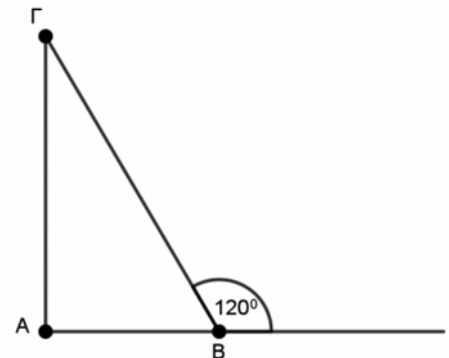
- Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΓAB είναι ισοσκελές και να γράψετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του και ποια είναι η βάση του.



46 Θέμα 2 - 12537

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η εξωτερική γωνία της B ισούται με 120° .

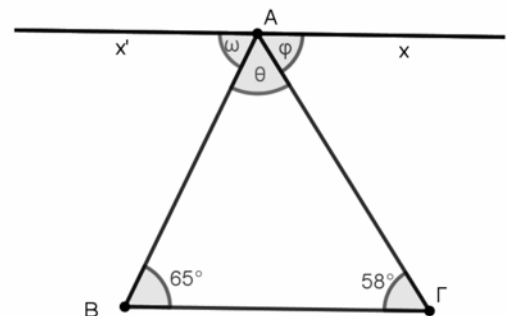
- Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία B του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Αν η γωνία Γ του τριγώνου είναι ίση με 30° να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.



47 Θέμα 2 - 12464

Στο σχήμα που ακολουθεί η $x'x$ διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$. Αν ξέρετε ότι για τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 65^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 58^\circ$:

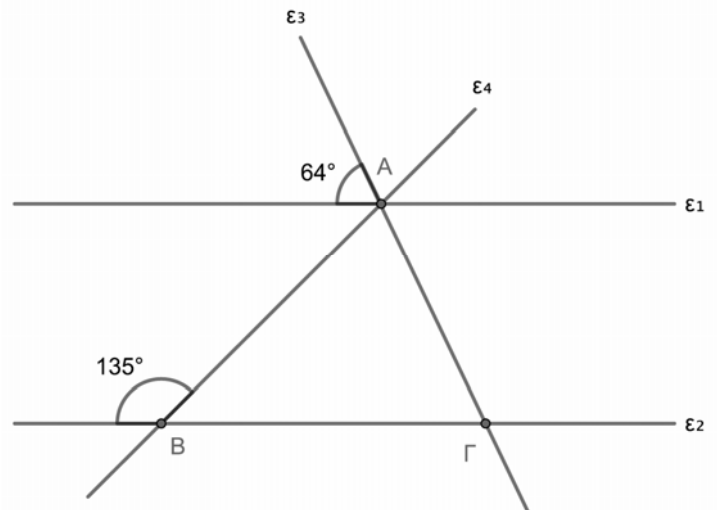
- Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας:
 - Είναι κάποια από τις σημειωμένες γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\phi}$ ή $\hat{\theta}$ ίση με 65° ;
 - Είναι κάποια από τις σημειωμένες γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\phi}$ ή $\hat{\theta}$ ίση με 58° ;
- Να γράψετε πόσες μοίρες είναι καθεμία από τις γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\phi}$ και $\hat{\theta}$.



48 Θέμα 2 - 13627

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 οι οποίες τέμνονται από τις ευθείες ε_3 και ε_4 στα σημεία Α, Β και Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.

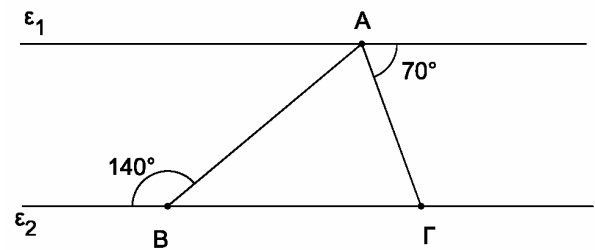
- Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma}\hat{B}\hat{A} = 45^\circ$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 64^\circ$.
- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$.
- Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



49 Θέμα 2 - 13437

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε_1 διέρχεται από την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε_2 που ορίζεται από τις κορυφές Β και Γ.

- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

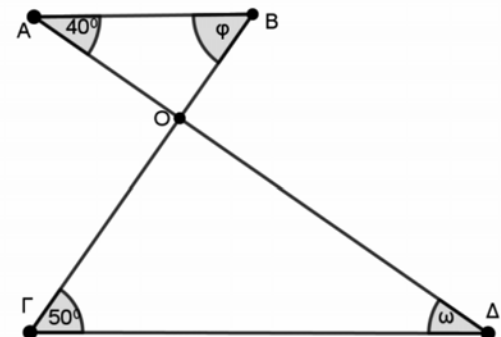


50 Θέμα 2 - 12532

Δίνονται τα παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ του παρακάτω σχήματος.

Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΔ τέμνονται στο Ο, τότε:

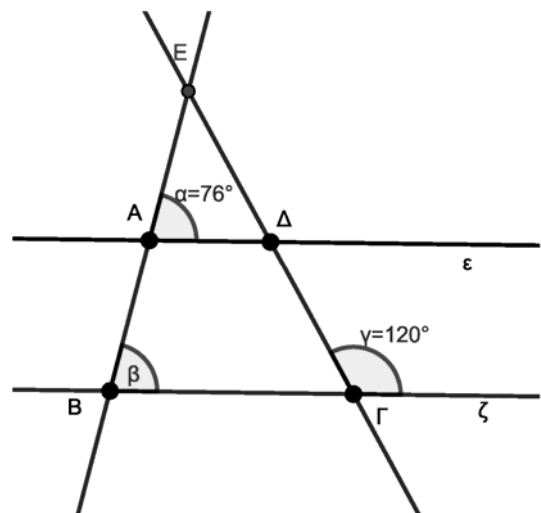
- Να υπολογίσετε σε μοίρες τις γωνίες ω και φ .
- Να δικαιολογήσετε γιατί το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ.



51 Θέμα 2 - 13004

Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες με $\hat{\alpha} = 76^\circ$ και $\hat{\gamma} = 120^\circ$. Να βρείτε:

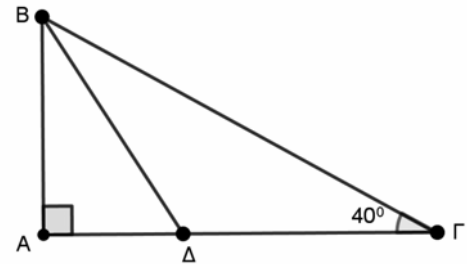
- Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{\beta}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.
- Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{B}\hat{E}\hat{\Gamma}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



52 Θέμα 2 - 12533

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$, η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B . Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας να υπολογίσετε:

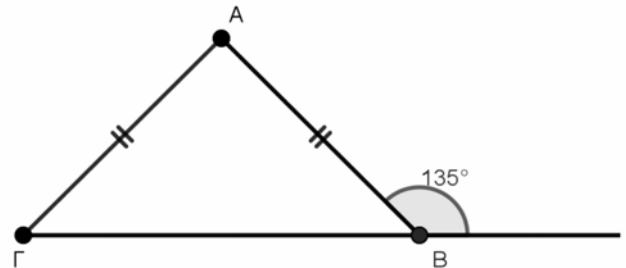
- πόσες μοίρες είναι η γωνία $AB\Gamma$.
- πόσες μοίρες είναι η γωνία $AB\Delta$.
- πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\Delta A$.



53 Θέμα 2 - 13230

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος, δίνεται ότι $AB = A\Gamma$ και $\hat{B}_{εξ} = 135^\circ$.

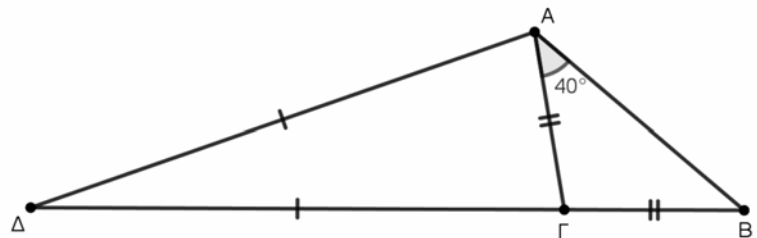
- Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές καθώς και το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.



54 Θέμα 2 - 12965

Δίνονται ισοσκελές τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ με $\Delta A = \Delta \Gamma$. Στην προέκταση της $\Delta\Gamma$ προς το μέρος του Γ θεωρούμε σημείο B τέτοιο ώστε $\Gamma B = \Gamma A$. Αν $\hat{\Gamma A B} = 40^\circ$, να υπολογίσετε:

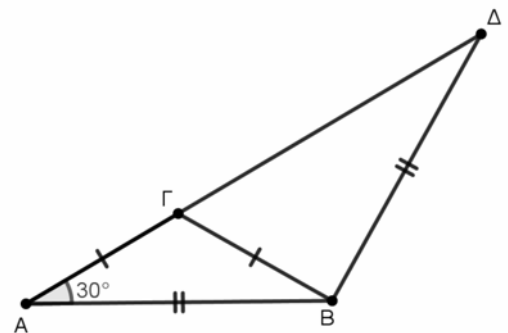
- Τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma A B$.
- Τις γωνίες του τριγώνου $\Delta A\Gamma$.



55 Θέμα 2 - 12968

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $B A \Delta$ με $BA = B\Delta$. Έστω Γ ένα εσωτερικό σημείο της $A\Delta$ τέτοιο ώστε $\Gamma A = \Gamma B$. Αν η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $B A \Delta$ είναι ίση με 30° .

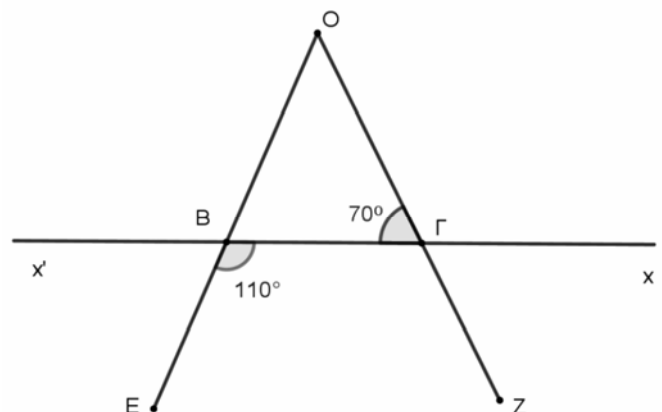
- Να υπολογίσετε:
 - τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma A B$.
 - τις γωνίες του τριγώνου $B A \Delta$.
- Ποια είναι η σχέση της γωνίας $\hat{A B \Delta}$ με τη γωνία $\hat{A}$;



56 Θέμα 2 - 13827

Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα OE και OZ τέμνονται από την ευθεία $x'x$ στα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Αν είναι $\hat{E B \Gamma} = 110^\circ$ και $\hat{O \Gamma B} = 70^\circ$ τότε:

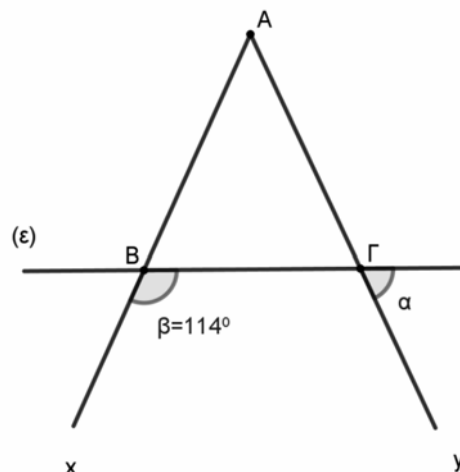
- Να αιτιολογήσετε γιατί είναι $\hat{O B \Gamma} = 70^\circ$.
- Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου $O B \Gamma$ ως προς τις πλευρές του. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B O \Gamma}$ του τριγώνου $O B \Gamma$.



57 Θέμα 2 - 13684

Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ημιευθείες Αx και Ay τέμνονται από την ευθεία (ε) στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Έστω ότι οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{A}$ είναι παραπληρωματικές με $\hat{B} = 114^\circ$.

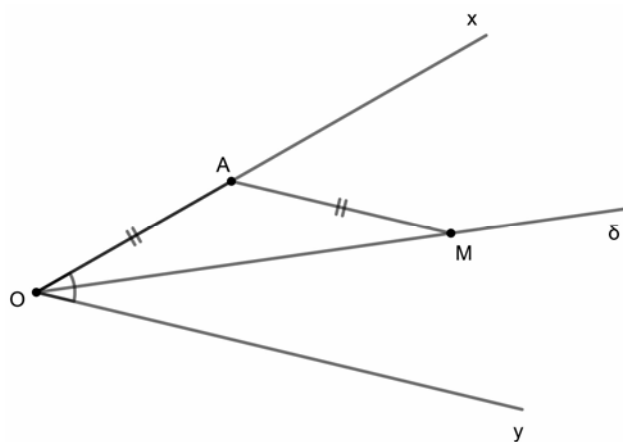
- Να αιτιολογήσετε γιατί είναι $\hat{ABG} = \hat{AGB} = 66^\circ$.
- Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{BAG}$.



58 Θέμα 2 - 13624

Σχεδιάζουμε γωνία $\hat{xOy} = 40^\circ$ και παίρνουμε τυχαίο σημείο Α πάνω στην πλευρά Οx. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας $\hat{xOy}$ και θεωρούμε σημείο Μ στην Οδ, τέτοιο ώστε $AO = AM$.

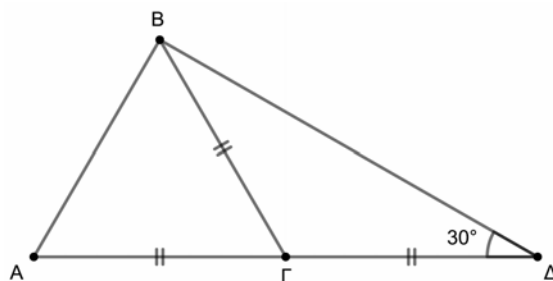
- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{dOy}$.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ.
- Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΟΜ ως προς τις γωνίες του και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



59 Θέμα 2 - 13673

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι $AG = GB = GD$ και $\hat{A} = 30^\circ$.

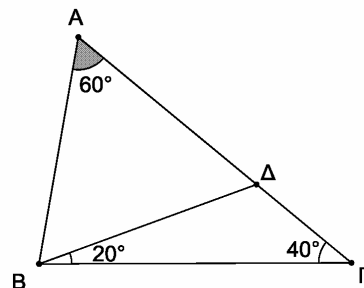
- Να αποδείξετε ότι $\hat{ABG} = 30^\circ$ και $\hat{AGB} = 120^\circ$.
- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{BGA}$.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.



60 Θέμα 2 - 13438

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{G} = 40^\circ$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $\hat{GBD} = 20^\circ$.

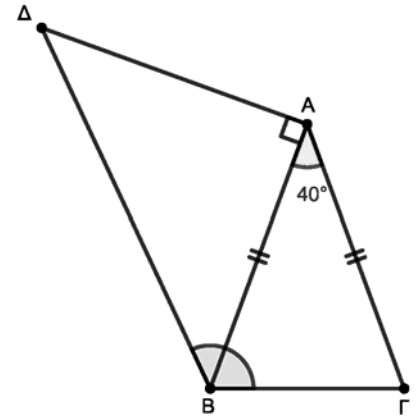
- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{ADB}$.
- Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΔ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



61 Θέμα 2 - 12456

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 40^\circ$.

- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β. Με πλευρά την AB και εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $BA\Delta$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να δικαιολογήσετε γιατί η γωνία $\Delta B\Gamma$ είναι ίση με 115° .

**62 Θέμα 2 - 12463**

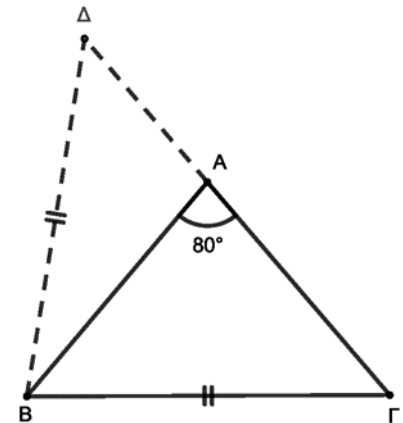
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω $B\Delta$ το ύψος του τριγώνου από την κορυφή B . Να υπολογίσετε:

- α. Τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β. Τη γωνία $\Delta B\Gamma$.

63 Θέμα 2 - 12962

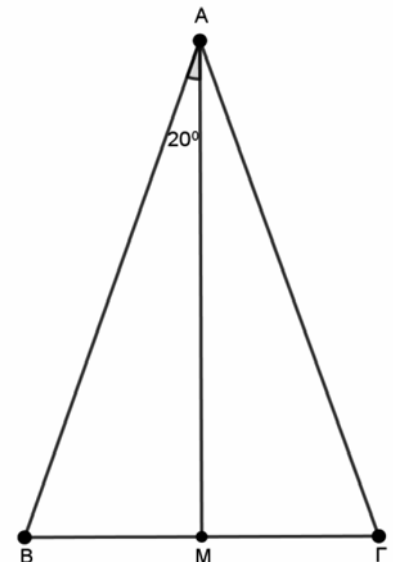
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με γωνία $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω Δ σημείο στην προέκταση της πλευράς $A\Gamma$ προς το μέρος του A , τέτοιο ώστε $B\Delta = B\Gamma$.

- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Gamma B\Delta$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$.

**64 Θέμα 2 - 12536**

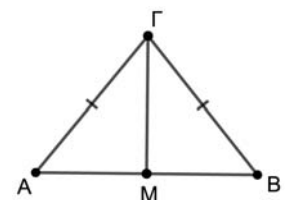
Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και η AM είναι διχοτόμος του τριγώνου.

- α. Αν η $A\Gamma = 5$, να υπολογίσετε το μήκος της AB .
- β. Αν η γωνία BAM είναι ίση με 20° , να υπολογίσετε:
 - i. πόσες μοίρες είναι η γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - ii. πόσες μοίρες είναι οι γωνίες B και Γ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

**65 Θέμα 2 - 12658**

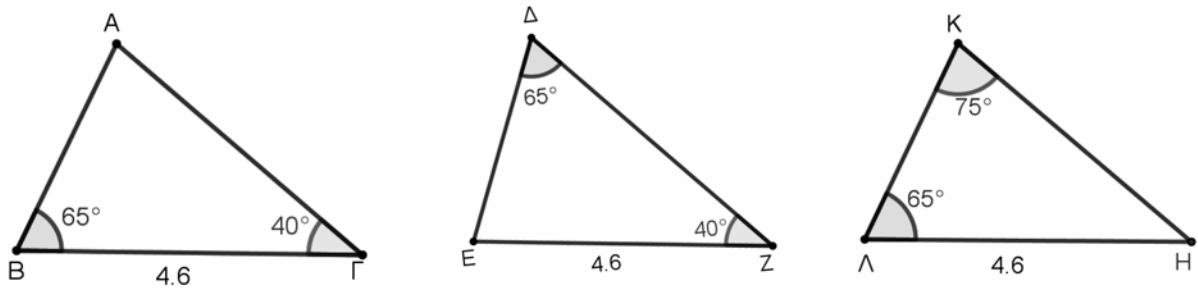
Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma = B\Gamma$ και η γωνία $\Gamma A B$ είναι η ίση με 55° .

- α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\Gamma B A$.
- β. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\Gamma B$.
- γ. Αν επιπλέον το ΓM είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ να υπολογίσετε τη γωνία $A\Gamma M$.



66 Θέμα 2 - 12964

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ και $K\Lambda H$ στα οποία είναι σημειωμένες δύο γωνίες τους και επιπλέον οι πλευρές $B\Gamma$, EZ και ΛH είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή $B\Gamma = EZ = \Lambda H = 4,6$.

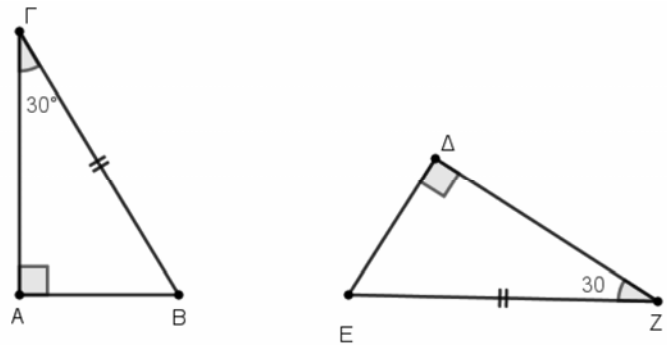


- Να υπολογίσετε τις τρίτες γωνίες τους $\hat{A}$, $\hat{E}$ και $\hat{H}$ αντίστοιχα των τριών τριγώνων.
- Δύο από τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος είναι ίσα μεταξύ τους. Να γράψετε ποια είναι αυτά δικαιολογώντας την απάντησή σας.

67 Θέμα 2 - 13494

Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ με $B\Gamma = EZ$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z} = 30^\circ$.

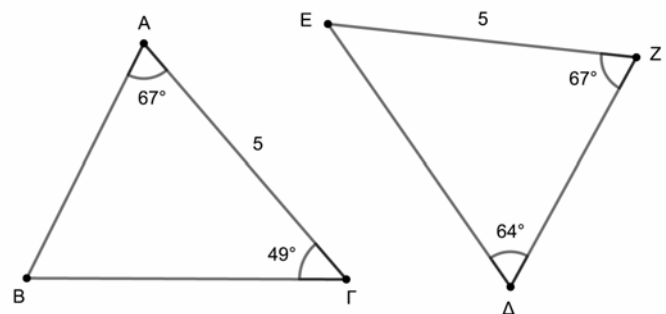
- Να υπολογίσετε τη γωνία E .
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.
- Αν είναι $AB = 5$, τότε να βρείτε το μήκος της ΔE και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



68 Θέμα 2 - 13631

Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ του σχήματος με $A\Gamma = 5$, $\hat{A} = 67^\circ$, $\hat{\Gamma} = 49^\circ$, $EZ = 5$, $\hat{\Delta} = 64^\circ$ και $\hat{Z} = 67^\circ$.

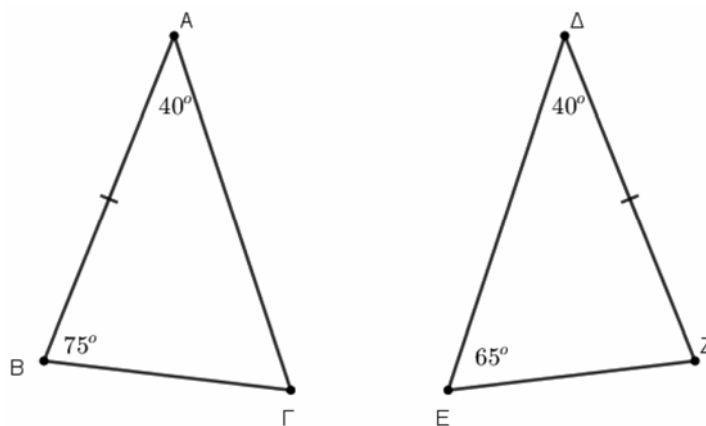
- Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 64^\circ$ και $\hat{E} = 49^\circ$.
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.
- Να αντιγράψετε και να συμπληρώσετε στην κόλλα σας τις δύο επόμενες ισότητες, οι οποίες προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα της ισότητας των τριγώνων $AB\Gamma$ και ΔEZ , και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:
 $B\Gamma = \dots$, $AB = \dots$



69 Θέμα 2 - 13492

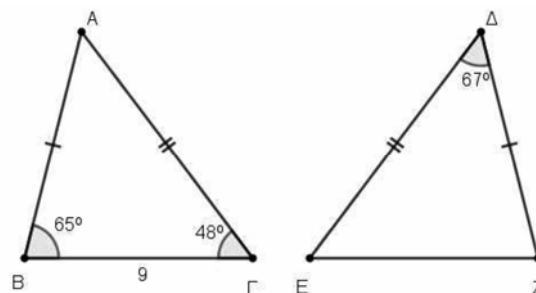
Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔZE με $AB = \Delta Z$, $\hat{B} = 75^\circ$, $\hat{A} = 40^\circ$, $\hat{\Delta} = 40^\circ$ και $\hat{E} = 65^\circ$.

- Να αποδείξετε ότι $\hat{Z} = 75^\circ$.
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔZE είναι ίσα.
- Αν $A\Gamma = 8$, να υπολογίσετε την ΔE .

**70 Θέμα 2 - 12359**

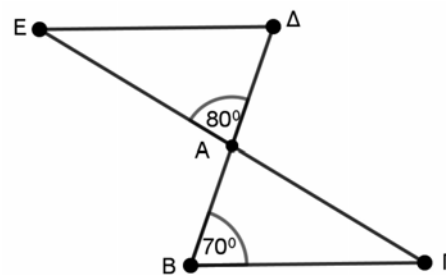
Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔZE με $AB = \Delta Z$, $A\Gamma = \Delta E$, $\hat{B} = 65^\circ$, $\hat{\Gamma} = 48^\circ$, $\hat{\Delta} = 67^\circ$.

- Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 67^\circ$.
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔZE είναι ίσα.
- Αν $B\Gamma = 9$ να υπολογίσετε την πλευρά EZ .

**71 Θέμα 2 - 12511**

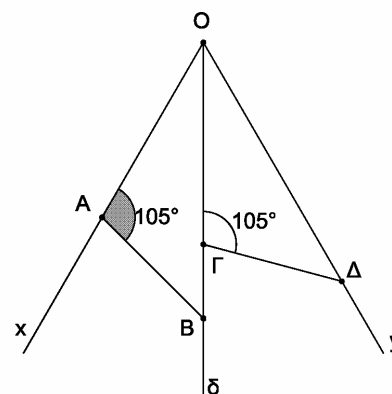
Στο παρακάτω σχήμα το A είναι μέσο των ευθυγράμμων τμημάτων $B\Delta$ και ΓE . Αν η γωνία $AB\Gamma$ ισούται με 70° και η γωνία ΔAE ισούται με 80° τότε:

- Να υπολογίσετε τη γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να υπολογίσετε τη γωνία Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔAE είναι ίσα.

**72 Θέμα 2 - 13529**

Στο παρακάτω σχήμα η γωνία $x\hat{O}y$ είναι 60° . Η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ και ισχύει $OA = O\Gamma$. Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

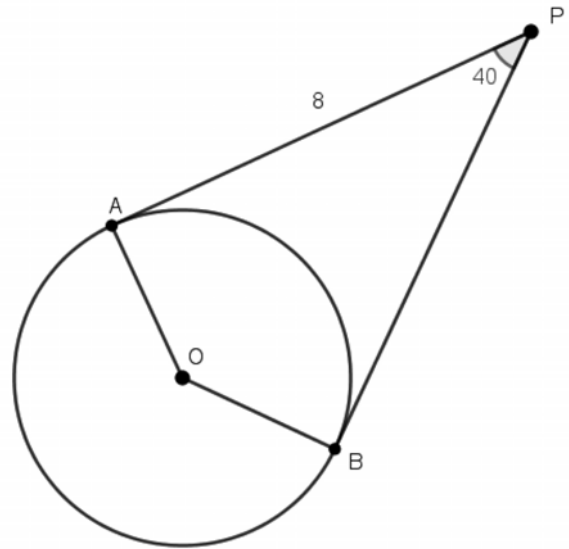
- να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου OAB .
- να συγκρίνετε τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ και να αιτιολογήσετε γιατί είναι $AB = \Gamma\Delta$.



73 Θέμα 2 - 13493

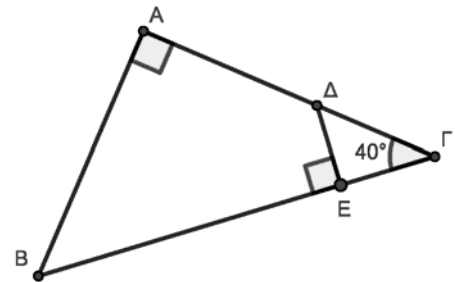
Δίνεται κύκλος κέντρου O και ακτίνας ρ . Από σημείο P εκτός του κύκλου φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν είναι $PA = 8$ και $\widehat{APB} = 40^\circ$, τότε να υπολογίσετε:

- Το εφαπτόμενο τμήμα PB .
- Την $\widehat{APO}$.
- Την $\widehat{POB}$.

**74 Θέμα 2 - 13000**

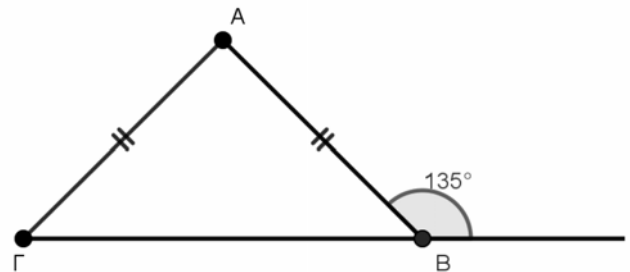
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$ και $\widehat{\Gamma} = 40^\circ$. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$, φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στη $B\Gamma$. Να υπολογίσετε:

- Τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.
- Τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Delta E B$.

**75 Θέμα 4 - 13290**

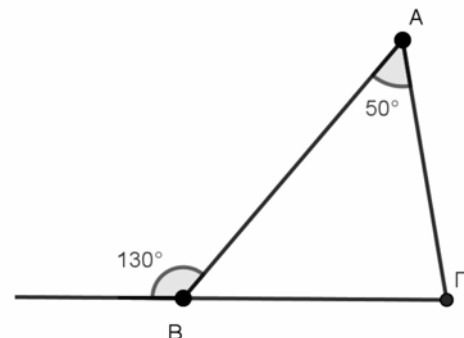
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B_{\text{εξ}}} = 135^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

- Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
- Να σχεδιάσετε το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και να χαρακτηρίσετε το είδος του τριγώνου $A\Delta\Gamma$:
 - Ως προς τις γωνίες του.
 - Ως προς τις πλευρές του.

**76 Θέμα 4 - 13291**

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B_{\text{εξ}}} = 130^\circ$ και $\widehat{A} = 50^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

- Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΓAB είναι ισοσκελές και να γράψετε ποια είναι η βάση του.
- Αν M είναι το μέσο του τμήματος AB και το τμήμα $M\Delta$ είναι παράλληλο στη $B\Gamma$, τότε:
 - Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma M\Delta$.
 - Ποιο είναι το είδος του τριγώνου $\Gamma M\Delta$ ως προς τις πλευρές του;



77 Θέμα 4 - 13504

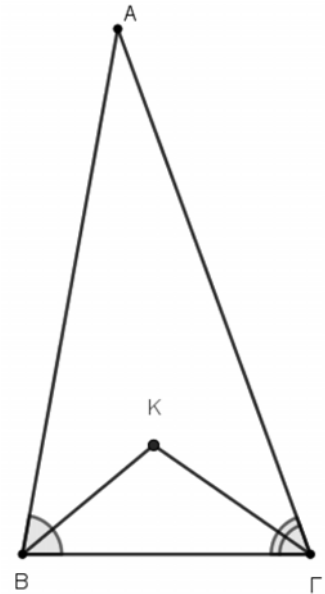
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο K .

α. Αν $\hat{B} = 80^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 70^\circ$.

i. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 30^\circ$.

ii. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου $BK\Gamma$.

β. Αν το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές ($BK = \Gamma K$), τι τρίγωνο θα ήταν το $AB\Gamma$, ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



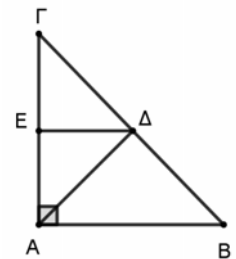
78 Θέμα 4 - 12971

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$ και $AB = A\Gamma$) και $A\Delta$ η διάμεσός του. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β. $\Delta E = E\Gamma$.

γ. Το σημείο E είναι μέσο της πλευράς $A\Gamma$.



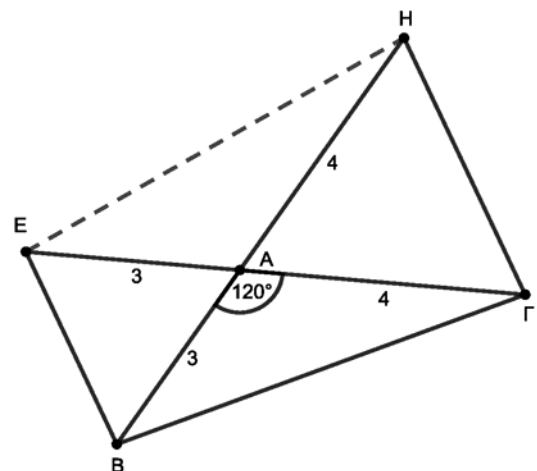
79 Θέμα 4 - 12973

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 120^\circ$, $AB = 3$ και $A\Gamma = 4$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το μέρος του A , κατά τμήμα $AH = 4$ και την πλευρά ΓA προς το μέρος του A , κατά τμήμα $AE = 3$, όπως στο παρακάτω σχήμα.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma H$ και ABE είναι ισόπλευρα.

β. Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο AEH είναι ίσο με το αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$.

γ. Το τμήμα BE είναι παράλληλο στο τμήμα ΓH ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



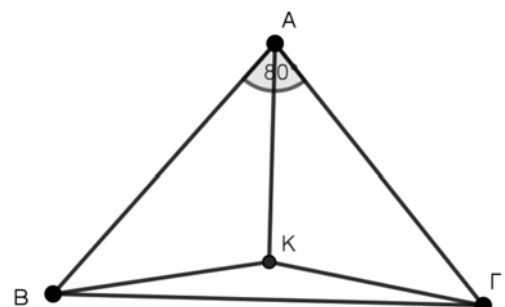
80 Θέμα 4 - 13002

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος έχουμε $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Το σημείο K είναι πάνω στη διχοτόμο της γωνίας A και τέτοιο ώστε $KA = KB = K\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα.

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{ABK}$ και $\hat{A\Gamma K}$.

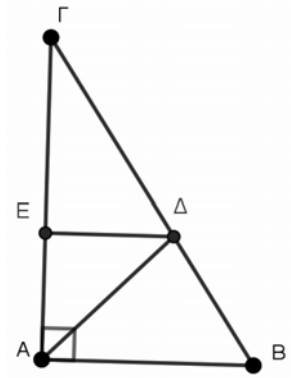
γ. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{BK\Gamma}$.



81 Θέμα 4 - 13285

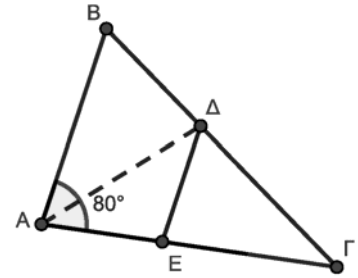
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος $A\Delta$ της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- β. Να υπολογίσετε την $\hat{A\Delta E}$.
- γ. Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{E\Delta\Gamma}$.

**82 Θέμα 4 - 13286**

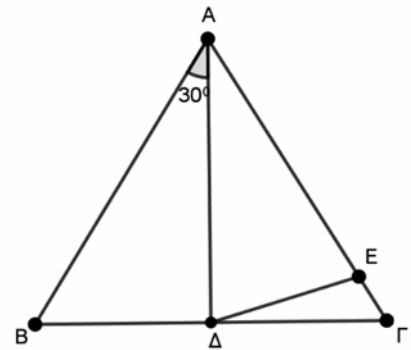
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνεται ότι $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$. Φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ της γωνίας $\hat{A}$.

- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου.
- β. Αν η παράλληλη στην AB από το σημείο Δ τέμνει την $A\Gamma$ στο E , τότε:
 - i. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.
 - ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.

**83 Θέμα 4 - 12697**

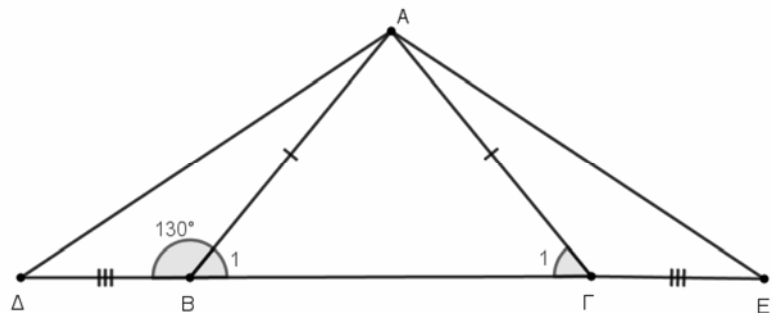
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσος του $A\Delta$ τέτοια, ώστε $\hat{B\Delta A} = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Delta = AE$.

- α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta A\Gamma$.
- β. Να αιτιολογήσετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοπλευρό.
- γ. Να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.

**84 Θέμα 4 - 12360**

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) προεκτείνουμε την $B\Gamma$ προς το μέρος του B και προς το μέρος του Γ κατά ίσα τμήματα $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα.

- α. Αν $\hat{B_{\text{εξωτ}}} = 130^\circ$, τότε:
 - i. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - ii. Να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE$.
- β. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των σημείων B και Γ από τις $A\Delta$ και AE αντίστοιχα, είναι ίσες.



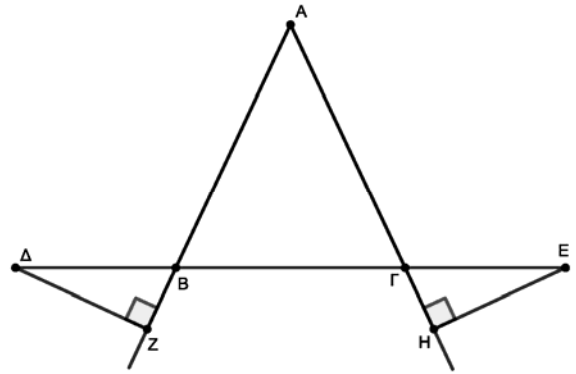
85 Θέμα 4 - 12458

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημεία Δ και E στις προεκτάσεις της $B\Gamma$ προς το B και το Γ , τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Έστω ότι $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp A\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι:

- i. $BZ = \Gamma H$
- ii. Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

β. Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH .



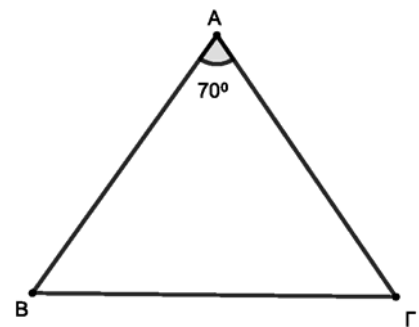
86 Θέμα 4 - 13448

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 70^\circ$.

α. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι άλλες δυο γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσες με 55° . Είναι ο ισχυρισμός του σωστός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Αν E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές με $\hat{AEZ} = \hat{AZE} = 55^\circ$.
- ii. Η πλευρά EZ του τριγώνου AEZ είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.



87 Θέμα 4 - 13501

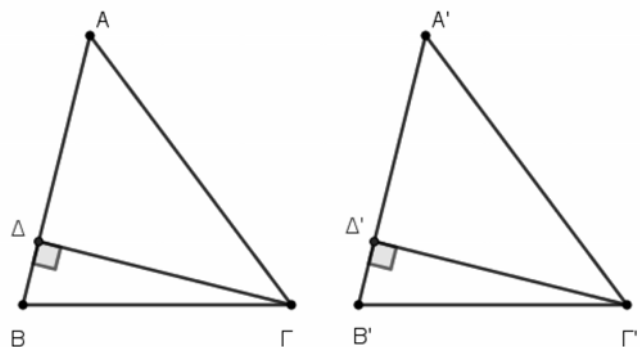
Δίνονται τα οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με ίσα ύψη $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$.

α. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = B'\Gamma'$

β. Αν επιπλέον $\hat{A} = \hat{A}'$, να αποδείξετε:

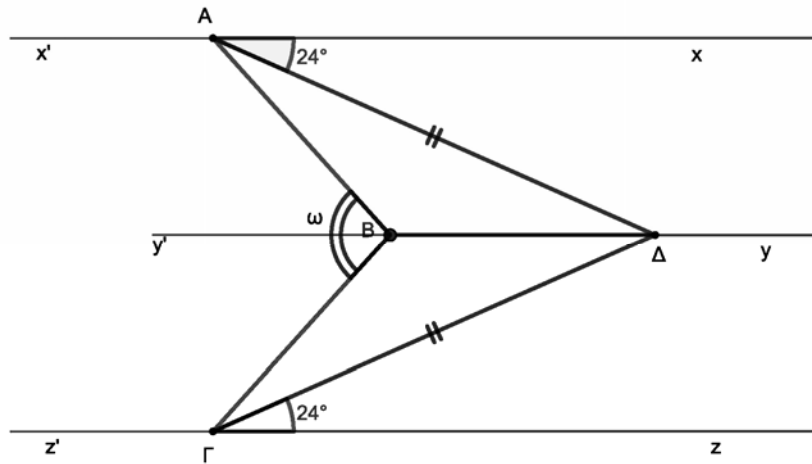
- i. $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$
- ii. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα

γ. Αν επιπλέον στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το ίχνος Δ του ύψους του $\Gamma\Delta$ είναι το μέσο της πλευράς AB , ποιο είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



88 Θέμα 4 - 12975

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $x'x$, $y'y$ και $z'z$ είναι παράλληλες. Για τις γωνίες $\hat{x}\hat{A}\hat{\Delta}$ και $\hat{z}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ ισχύει ότι $\hat{x}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{z}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 24^\circ$. Τα τμήματα $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

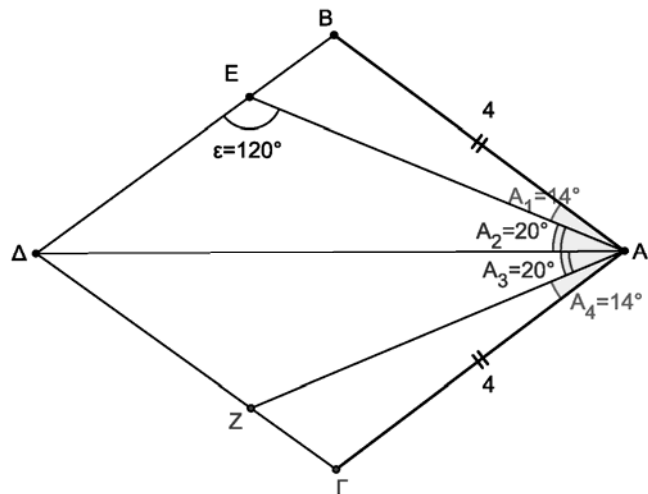


- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ είναι ίσα.
- β. Αν τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ είναι ισοσκελή με βάσεις $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε:
 - i. Τις γωνίες των τριγώνων $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$.
 - ii. Τη γωνία $\hat{\omega}$.

89 Θέμα 4 - 12969

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_4 = 14^\circ$, $\hat{A}_2 = \hat{A}_3 = 20^\circ$, και $AB = A\Gamma = 4$.

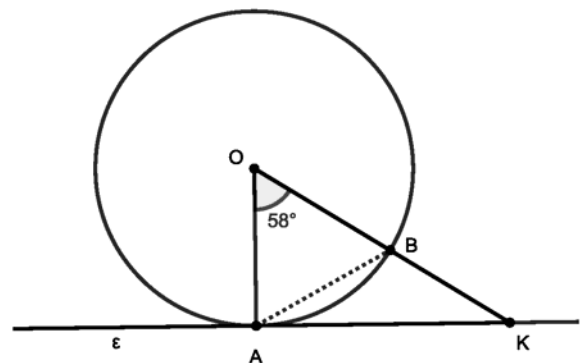
- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
 - ii. Οι γωνίες $B\hat{\Delta}A$ και $\Gamma\hat{\Delta}A$ είναι ίσες.
- β. Να αποδείξετε ότι $\Delta E = \Delta Z$.
- γ. Αν για τη γωνία $\hat{\epsilon}$ ισχύει ότι $\hat{\epsilon} = 120^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.



90 Θέμα 4 - 12466

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Η ευθεία ϵ είναι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο A , και η προέκταση της ακτίνας OB τέμνει την ευθεία ϵ στο K .

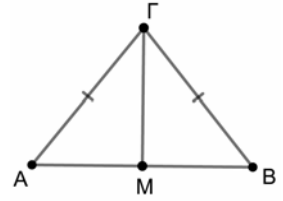
- α. Αν η γωνία $\hat{O}$ είναι 58° :
 - i. Να υπολογίσετε τη γωνία $O\hat{B}A$.
 - ii. Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ABK .
- β. Πόσες μοίρες έπρεπε να είχαμε σχεδιάσει τη γωνία $\hat{O}$ ώστε η χορδή AB να είναι ίση με την ακτίνα ρ ;



91 Θέμα 4 - 12660

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $AG = BG$, η GM είναι διάμεσος της AB , το $BM = 3$ και η γωνία $\widehat{A\Gamma M}$ είναι ίση με 33° .

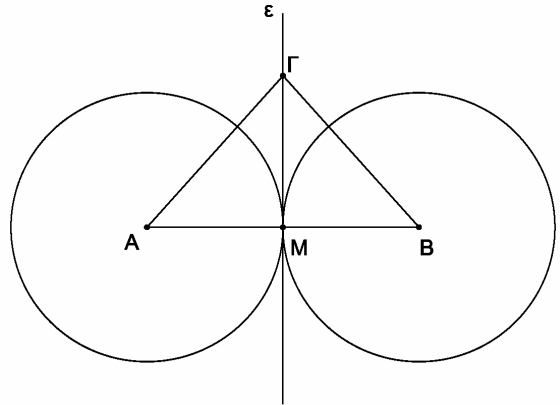
- Να υπολογίσετε το μήκος της AB .
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Αν δεν σας δίνεται ότι $\widehat{A\Gamma M} = 33^\circ$ αλλά, αντί για αυτό, έχετε ότι $AG = 6$, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



92 Θέμα 4 - 13531

Δύο ίσοι κύκλοι (A, ρ) και (B, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M . Στην κοινή εφαπτομένη ε των κύκλων στο σημείο M παίρνουμε ένα σημείο Γ , διαφορετικό του M .

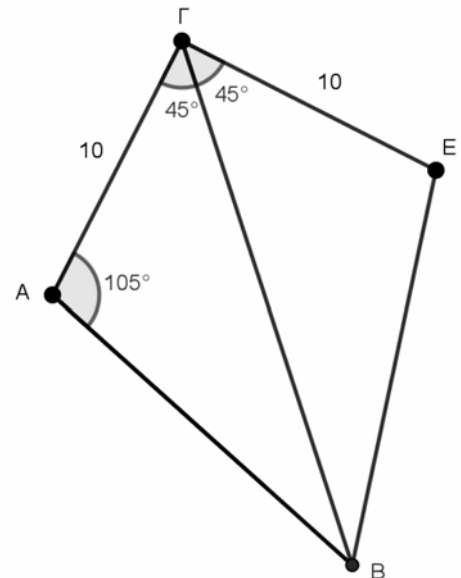
- Πόσων μοιρών είναι η γωνία $\widehat{AMB}$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να αποδείξετε ότι $AG = BG$.
- Πόσων μοιρών πρέπει να είναι η γωνία $\widehat{MAG}$, ώστε η AG να είναι κάθετη στη $B\Gamma$;



93 Θέμα 4 - 13292

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα ΓA και ΓE είναι ίσα με 10 και η γωνία $\widehat{A}$ είναι ίση με 105° . Επιπλέον δίνεται ότι, $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{B\Gamma E} = 45^\circ$.

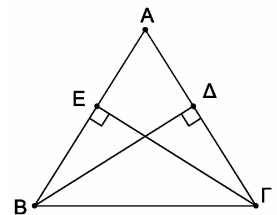
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma B$ και $E\Gamma B$ είναι ίσα.
- Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\widehat{ABE}$.
- Να βρείτε το είδος του τριγώνου ABE .



94 Θέμα 4 - 13440

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE .

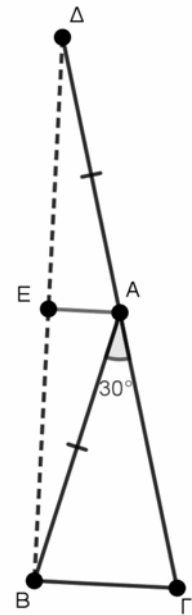
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ είναι ίσα.
- Να δικαιολογήσετε γιατί $B\Delta = \Gamma E$.
- Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE του τριγώνου είναι και διάμεσοι, να αποδείξετε ότι $\widehat{A} = 60^\circ$.



95 Θέμα 4 - 13289

Στο σχήμα που ακολουθεί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^\circ$.

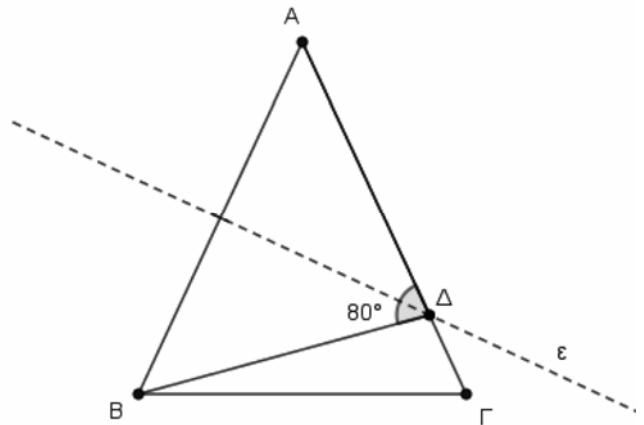
- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β. Προεκτείνουμε την ΓA προς το μέρος του A και παίρνουμε τμήμα $A\Delta = AB$. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας συμπληρωμένη την πρόταση που ακολουθεί και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
«Στο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ το τμήμα BA είναι που αντιστοιχεί στην πλευρά $\Delta\Gamma$ ».
- γ. Αν το τμήμα AE είναι παράλληλο προς την πλευρά $B\Gamma$ και τέμνει τη ΔB στο E , τότε:
 - i. Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες $\hat{BAE}$ και $\hat{EAD}$.
 - ii. Να δικαιολογήσετε γιατί το AE είναι κάθετο στο τμήμα ΔB .



96 Θέμα 4 - 13447

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η μεσοκάθετος (ϵ) της πλευράς του AB τέμνει την πλευρά του $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο Δ . Αν η γωνία $\hat{A\Delta B}$ είναι ίση με 80° , τότε να αποδείξετε ότι:

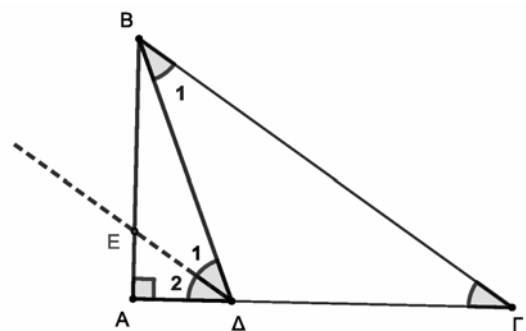
- α. i. Το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές με $\Delta A = \Delta B$.
- ii. $\hat{A} = 50^\circ$.
- β. Αν είναι $\hat{\Delta B\Gamma} = 15^\circ$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



97 Θέμα 4 - 13449

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{A\Delta B}$ η οποία τέμνει την AB σε σημείο E . Στην προέκταση της $A\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $\Delta\Gamma = \Delta B$.

- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. $\hat{B_1} = \hat{\Gamma}$.
 - ii. $\hat{\Delta_1} = \hat{\Gamma}$.
 - iii. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\Delta B}$ είναι παράλληλη στο τμήμα $B\Gamma$.
- β. Αν $\hat{A\Delta B} = 70^\circ$ να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

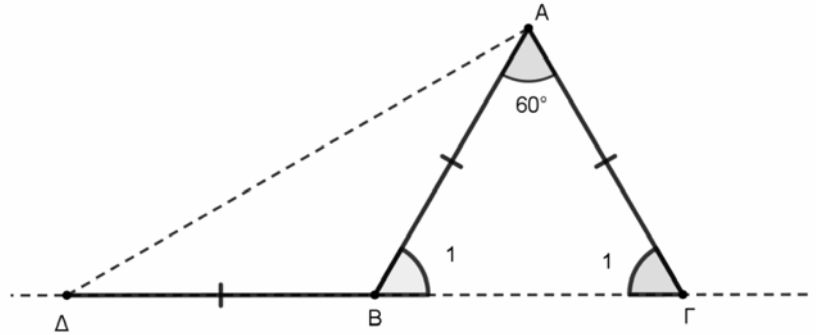


98 Θέμα 4 - 13689

Στο παρακάτω σχήμα, τα σημεία Δ, Β και Γ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τα τμήματα ΒΔ, ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα και $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$.

Να αποδείξετε ότι:

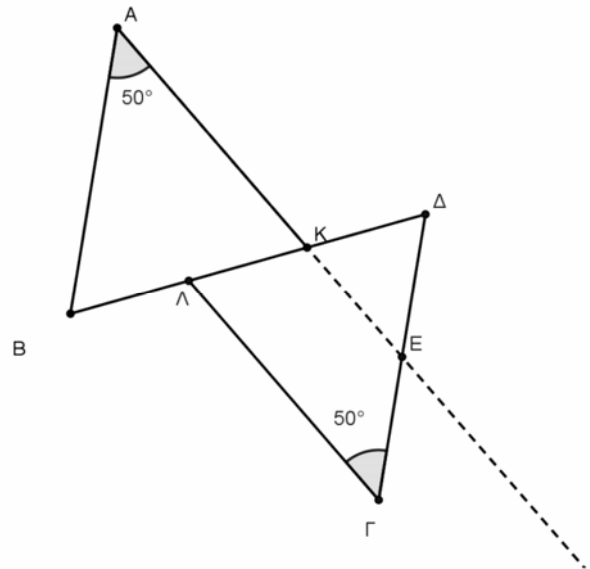
- $\widehat{B_1} = \widehat{\Gamma_1} = 60^\circ$ και $\widehat{A\hat{B}\Delta} = 120^\circ$.
- το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ορθογώνιο.
- το τμήμα ΑΒ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΔΑΓ.



99 Θέμα 4 - 13694

Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ισοσκελή και ίσα με $AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$ και $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 50^\circ$.

- Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.
- Αν η προέκταση της ΑΚ (προς το Κ) τέμνει την ΓΔ σε σημείο Ε, να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΚΔΕ ως προς τις πλευρές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Τι θα αλλάζατε ή θα τροποποιούσατε στα δεδομένα ώστε το τρίγωνο ΚΔΕ να είναι ισόπλευρο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



100 Θέμα 4 - 13792

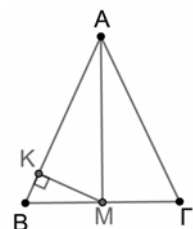
Σε τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι: $\widehat{A_{εξ}} = 130^\circ$ και $\widehat{B} = 60^\circ$.

- Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.
- Έστω ΒΕ και ΓΖ οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα που τέμνονται στο σημείο Ο. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$.

101 Θέμα 4 - 13820

Θεωρούμε το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επίσης η ΜΚ είναι κάθετη στην ΑΒ.

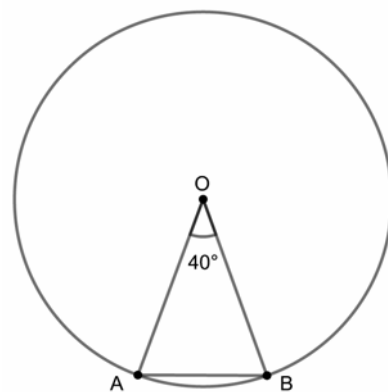
- Να αιτιολογήσετε ότι η $\widehat{B}$ είναι συμπληρωματική της $\widehat{B\hat{M}K}$.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΜ στην περίπτωση που $\widehat{B\hat{M}K} = 20^\circ$.
- Ποια γωνία του τριγώνου ΑΒΜ του σχήματος είναι ίση με τη γωνία $\widehat{B\hat{M}K}$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή που δώσατε.



102 Θέμα 4 - 13674

Σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R θεωρούμε σημεία A και B ώστε $\widehat{AOB} = 40^\circ$.

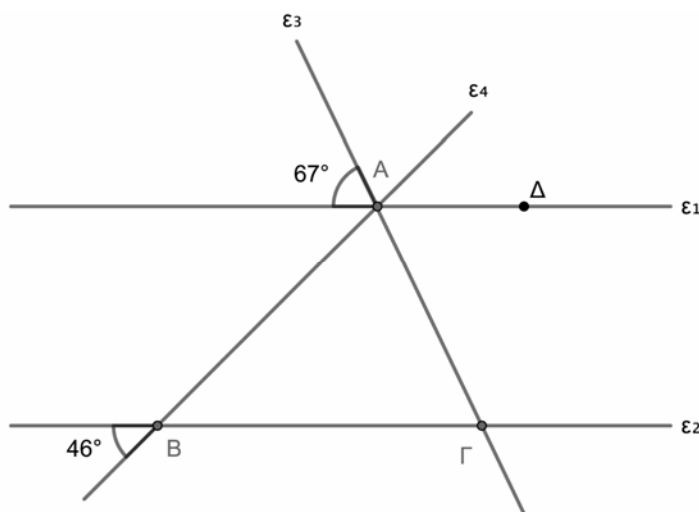
- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ του τριγώνου OAB .
- β. Προεκτείνουμε τις ακτίνες OA και OB κατά τμήματα AG και BD αντίστοιχα έτσι ώστε $AG = OA$ και $BD = OB$.
 - i. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{O\Gamma\Delta}$ και $\widehat{O\Delta\Gamma}$.
 - ii. Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.
- γ. Αν προεκτείνουμε τις ακτίνες OA και OB κατά τμήματα AG και BD αντίστοιχα έτσι ώστε $AG = 2OA$ και $BD = 2OB$, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



103 Θέμα 4 - 13652

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 οι οποίες τέμνονται από τις ευθείες ϵ_3 και ϵ_4 στα σημεία A , B και Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.

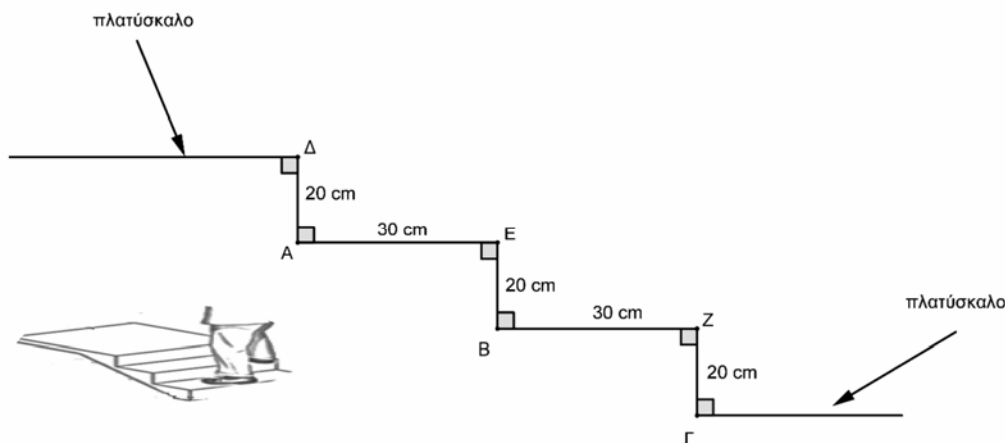
- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ. i. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Gamma\Delta A}$.
 ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «η AG είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\Delta\Gamma}$ ». Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



104 Θέμα 4 - 13692

Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά την πλάγια όψη τμήματος σκάλας. Λαμβάνοντας υπόψη τις πληροφορίες του σχήματος, δηλαδή $\Delta A = EB = Z\Gamma = 20\text{ cm}$, $AE = BZ = 20\text{ cm}$ και οι γωνίες $\widehat{\Delta} = \widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{B} = \widehat{Z} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$, να αποδείξετε ότι:

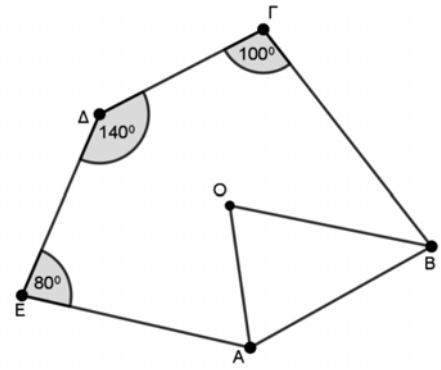
- α. τα σημεία A και Γ απέχουν το ίδιο από το σημείο B .
- β. τα σημεία A , B και Γ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



105 Θέμα 4 - 12701

Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100° , η γωνία του Δ ισούται με 140° και η γωνία του Ε ισούται με 80° τότε, να υπολογίσετε:

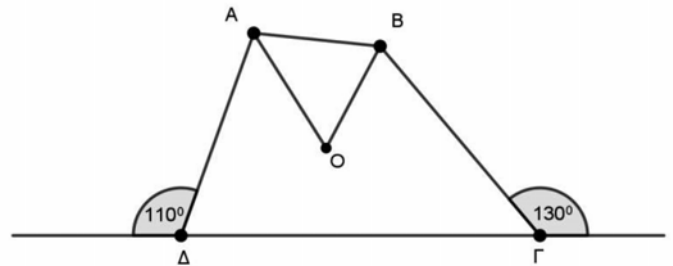
- σε μοίρες, το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E}$.
- σε μοίρες, το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.
- σε μοίρες, το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.



106 Θέμα 4 - 12700

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ η εξωτερική γωνία της Γ ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110° . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο, τότε να υπολογίσετε:

- τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.
- το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.
- το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.



107 Θέμα 4 - 13675

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι $\hat{A}_{εξ} = 100^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ο, τότε:

- Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.
- Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΟΓ του τριγώνου ΒΟΓ.
- Πόσες μοίρες πρέπει να είναι καθεμιά από τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ έτσι ώστε $AD \parallel BG$;

